

NPDE 学习笔记

李顺

2024 年 秋

目录

第一章 绪论与预备内容	1
1.1 绪论	1
1.2 预备内容	2
第二章 模型方程：一维常系数线性对流/扩散方程	4
2.1 一维常系数线性对流/扩散方程的性质	4
2.2 经典格式	4
2.3 基于三角插值的收敛性证明	4
2.4 稳定性与放大因子	5
2.5 相容性与局部截断误差	5
2.6 收敛性与整体误差	6
2.7 CFL 条件与迎风格式	6
2.8 不稳定格式的修正	7
2.9 其它方法构造差分格式	8
2.10 变系数对流/扩散方程	8
2.11 一阶线性偏微分方程组问题	8
第三章 适定问题	10
3.1 预备知识	10
3.2 一维常系数标量方程的适定性	11
3.3 一维常系数方程组的适定性	12
3.3.1 双曲型方程组	12
3.3.2 抛物型方程组	13
3.3.3 一般常系数方程组	13
3.3.4 半有界算子与适定性	14
第四章 差分方法的性质	16
4.1 相容性	16
4.2 稳定性	17
4.3 收敛性	17
4.4 Lax 定理	17
4.5 稳定性证明	18
4.5.1 Fourier 方法	18
4.5.2 CFL 方法	19

4.5.3	冻结系数法	19
4.5.4	离散最大模原理	19
4.5.5	能量方法 *	20
4.5.6	半有界离散算子与稳定性 *	24
4.6	耗散性和色散性	25
4.6.1	方程的耗散性/色散性	25
4.6.2	差分格式的耗散性/色散性	27
4.6.3	差分格式的数值耗散/数值色散	28
4.6.4	一些例子	28
第五章	二维问题	31
5.1	二维常系数对流问题	31
5.2	二维变系数对流问题	32
5.3	二维常系数扩散问题	32
5.4	一般的算子分裂方法	33
第六章	初边值问题	35
6.1	一维扩散方程的边界处理	35
6.2	一维对流方程的边界处理	35
6.3	初边值问题的性质分析	36
6.3.1	相容性	36
6.3.2	稳定性	37
6.3.3	收敛性	38
6.3.4	Lax 定理	38
6.3.5	一些例子	38
6.3.6	能量稳定性	44
6.4	二维扩散方程的边界处理	47
第七章	模型方程：一维非线性双曲守恒律方程	49
7.1	预备知识	49
7.2	特征线	49
7.3	弱解、黏性解和熵解	51
7.3.1	弱解	51
7.3.2	黏性解 *	53
7.3.3	熵解 *	53
7.3.4	一些例子	55
7.4	数值格式	56
7.4.1	数值格式示例 (一)	56
7.4.2	守恒型格式	58
7.4.3	单调保持和单调格式	59
7.4.4	TVD 格式	61
7.4.5	数值格式示例 (二)	62

附录 A Fourier 基础	65
A.1 Fourier 级数	65
A.2 三角插值	66

第一章 绪论与预备内容

1.1 绪论

对于控制方程——偏微分方程（组）进行初步分类：

- 线性 PDE：在方程中关于所有未知函数及其偏导数都是线性的，例如 $u_t + a(x, t)u_x = 0$ ；
- 非线性 PDE：除了线性 PDE 之外的 PDE，例如 $u_t + uu_x = 0$ ；拟线性 PDE：在方程中关于所有未知函数的最高阶偏导数是线性的，例如 $u_t + uu_x = u_{xx}$ 。

常见模型方程：

- 对流方程（双曲型方程）
- 波动方程（双曲型方程）
- 热方程（扩散方程）（抛物型方程）
- 泊松方程（椭圆型方程）
- 对流扩散方程
- Euler 方程组
- N-S 方程组
- ...

控制方程（组）不足以给出实际问题的唯一特解，需要加入一些条件来确定特解，这些条件称为定解条件，常见的定解条件包括：边界条件、初值条件以及其它条件。边界条件可以简单分为：

- 周期性边界条件
- 非周期性边界条件
 - (a) Dirichlet 边界条件
 - (b) Neumann 边界条件
 - (c) Robin 边界条件

控制方程（组）加上适当的定解条件就得到了定解问题，常见的定解问题包括：

- 初值问题（Cauchy 问题）：PDE(s) + 初值条件；
- 边值问题：PDE(s) + 边界条件；
- 初边值问题：PDE(s) + 初值条件 + 边界条件。

Definition 1.1.1. 称函数 u 是定解问题的（经典）解，如果满足：

- 在区域 Ω 内部， u 具有足够的光滑性以使得 PDE(s) 要求的各阶导数存在且连续，将 u 和它的各阶导数代入 PDE(s) 中，可以使 PDE(s) 成为恒等式；
- 当 Ω 内部的点趋于边界 $\partial\Omega$ 时，定解条件所要求的 u 以及它的各阶导数的极限处处存在，且使定解条件成立。

Definition 1.1.2. 称定解问题的解是稳定的, 如果定解条件发生微小变化时, 相应问题的解也只会发生微小变化, 即: 解对于定解条件存在连续依赖关系。

Definition 1.1.3. 称定解问题是适定的, 如果解存在唯一, 并且关于定解条件是稳定的。

我们只考虑针对适定问题的数值求解, 求解偏微分方程数值解的主要步骤包括

1. 时空区域剖分 (离散)
2. 偏微分方程 (组) 离散
3. 定解条件 (初值, 边界条件) 离散
4. 求解离散方程组

根据离散方式的不同, 常见的数值方法可以简单分为如下几类:

- 有限差分法
- 有限元方法
- 谱方法
- 其它方法

这里主要讨论有限差分法。

1.2 预备内容

差分算子

考虑格点序列 $\{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, 其中 $x_j = jh$, ($h > 0$), 对于定义在格点上的序列 $\{v_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, 平移算子 E^p ($p \in \mathbb{Z}$) 定义为:

$$(E^p v)_j = v_{j+p}$$

例如 $(E^1 v)_j = v_{j+1}$, $(E^0 v)_j = v_j$, $(E^{-1} v)_j = v_{j-1}$ 。基于平移算子可以定义几种基本的差分算子:

- 前差算子 $D_+ := \frac{1}{h}(E^1 - E^0)$;
- 后差算子 $D_- := \frac{1}{h}(E^0 - E^{-1})$;
- 中心差算子 $D_0 := \frac{1}{2h}(E^1 - E^{-1})$ 。

它们都是对 $\frac{\partial}{\partial x}$ 的一阶或二阶近似:

$$\begin{aligned} D_+ e^{iwx_j} &= \frac{1}{h}(e^{iwh} - 1)e^{iwx_j} = (iw + \mathcal{O}(w^2h))e^{iwx_j} \\ D_- e^{iwx_j} &= \frac{1}{h}(1 - e^{-iwh})e^{iwx_j} = (iw + \mathcal{O}(w^2h))e^{iwx_j} \\ D_0 e^{iwx_j} &= \frac{1}{2h}(e^{iwh} - e^{-iwh})e^{iwx_j} = (iw + \mathcal{O}(w^3h^2))e^{iwx_j} \end{aligned}$$

高阶求导可以通过上述算子的乘积近似, 例如定义 $D_+ D_-$

$$(D_+ D_- v)_j = (D_- D_+ v)_j = \frac{1}{h^2}(E^2 v - 2E^1 v + E^{-1} v)_j = \frac{1}{h^2}(v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1})$$

它是 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 的二阶近似

$$D_+ D_- e^{iwx_j} = \frac{1}{h^2}(e^{iwh} - 2 + e^{-iwh})e^{iwx_j} = (-w^2 + \mathcal{O}(w^4h^2))e^{iwx_j}$$

某些情况下还会使用不含 h 的算子, 例如

$$\begin{aligned}\Delta_+ &:= E^1 - E^0 \\ \Delta_- &:= E^0 - E^{-1} \\ \Delta_0 &:= E^1 - E^{-1} \\ \delta &:= E^{1/2} - E^{-1/2} \\ \delta^2 &:= E^1 - 2E^0 + E^{-1}\end{aligned}$$

有限维空间的内积和范数

考虑 m 维空间 \mathbb{C}^m , 对应的内积和范数为

$$(u, v) = \sum_{j=1}^m \bar{u}_j v_j, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

周期性格点函数的内积和范数

将 $[a, b]$ 区间均分成 $N+1$ 个等距子区间, 对应 $N+1$ 个节点, 空间步长 $h = (b-a)/(N+1)$ 。对于固定的 N 或 h , 在这些节点处的函数值属于 \mathbb{C}^{N+1} , 如果直接定义内积为

$$(u, v) = \sum_{j=0}^N \bar{u}_j v_j,$$

在 $h \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) 时上式趋于无穷, 无法有效刻画格点函数空间。需要对内积的定义进行调整, 定义离散的内积以及对应的范数为

$$(u, v)_h := \sum_{j=0}^N \bar{u}_j v_j h, \quad \|u\|_h := \sqrt{(u, u)_h}.$$

显然有

$$(u, v)_h = \sum_{j=0}^N \bar{u}_j v_j h \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_a^b \bar{u}(x) v(x) dx = (u, v)$$

第二章 模型方程：一维常系数线性对流/扩散方程

2.1 一维常系数线性对流/扩散方程的性质

目前只考虑一维问题，采用周期性边界条件，两种方程有如下特点：

- 一维常系数线性对流方程 $u_t + au_x = 0$ ：谐波解，特征线 $x - at = \text{constant}$ ，有限传播速度，能量守恒等。
- 一维常系数线性扩散方程 $u_t = u_{xx}$ ：谐波解，无限传播速度，能量稳定（衰减）等。

2.2 经典格式

直接对 PDE 中的时间导和空间导利用差商近似，就可以得到很多经典格式：FTFS, FTBS, FTCS, BTFS, BTBS, θ 格式, CN 格式, CTCS 格式等。对这些差分格式有很多种分类方式。

- 可以按照能否直接计算来分类：显格式，隐格式。显格式可以直接计算，而隐格式通常需要联列求解方程组，单步的计算成本通常更大。大部分显格式是条件稳定的，时间步长受到严格限制；大部分全隐格式是无条件稳定的，可以选取更大的时间步长。
- 可以按照涉及的时间层来分类：双层格式（单步格式），多层格式（多步格式）等。多层格式在启动时需要通过其它双层格式的辅助，例如 CTCS 格式可以使用 FTCS 格式来启动。

2.3 基于三角插值的收敛性证明

考虑更一般的单步格式

$$v_j^{n+1} = Q v_j^n, \quad v_j^0 = f_j, \quad Q := \sum_{\mu=-r}^s A_\mu(\Delta t, \Delta x) E^\mu,$$

我们可以在加上一些条件（相容，稳定等）之后，利用 Fourier 级数和三角插值证明双层格式的收敛性，证明需要如下几个条件：

(a) 初值 f 是分片连续的，可以展开为 Fourier 级数，

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{w=-\infty}^{\infty} e^{iw x} \hat{f}(w), \quad \sum_w |\hat{f}(w)|^2 < \infty$$

并且它的三角插值 $\text{Int}_N f$ 收敛于 f ；

$$\text{Int}_N f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{w=-N/2}^{N/2} e^{iw x} \tilde{f}(w), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|\text{Int}_N f - f\| = 0$$

(b) 差分近似是稳定的, 即存在常数 K_s 使得对所有的 Δt 和 Δx 有:

$$\sup_{0 \leq t_n \leq T} |\widehat{Q}^n| \leq K_s$$

(c) 差分近似是相容的, 即对于每一个固定的 w , 都有:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t_n \leq T} |\widehat{Q}^n(w\Delta x) - e^{iwt_n}| = 0$$

Theorem 2.3.1. 对于有限时间区域 $0 \leq t \leq T$, 考虑 $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ 时, 对于差分近似:

$$v_j^{n+1} = Q v_j^n, \quad v_j^0 = f_j, \quad Q := \sum_{\mu=-r}^s A_\mu(\Delta t, \Delta x) E^\mu,$$

若上述三个条件均成立, 则差分近似解的三角插值 $\text{Int}_N(v_j^n)$ 收敛于微分方程的解 u , 即:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t_n \leq T} \|u(\cdot, t^n) - \text{Int}_N(v_j^n)(\cdot)\| = 0$$

其中 $\text{Int}_N(v_j^n)$ 定义为

$$\text{Int}_N(v_j^n)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{w=-N/2}^{N/2} e^{iwx} \widehat{Q}^n \widehat{f}(w)$$

2.4 稳定性与放大因子

考虑双层格式

$$v_j^{n+1} = Q v_j^n, \quad v_j^0 = f_j,$$

取谐波解初值为 $f_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}(w) e^{iwx_j}$, 取 $v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{v}^n(w) e^{iwx_j}$, $v_j^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{v}^{n+1}(w) e^{iwx_j}$ 代入上式, 可以得到 $\widehat{v}^n(w)$ 与 $\widehat{v}^{n+1}(w)$ 的关系, 定义放大因子

$$\widehat{Q} = \widehat{Q}(w) := \frac{\widehat{v}^{n+1}(w)}{\widehat{v}^n(w)}$$

那么

$$\widehat{v}^{n+1}(w) = \widehat{Q} \widehat{v}^n(w) = \dots = (\widehat{Q})^{n+1} \widehat{v}^0(w) = (\widehat{Q})^{n+1} \widehat{f}(w)$$

Definition 2.4.1. 称差分格式 $v_j^{n+1} = Q v_j^n$ 是 (L^2 模) 稳定的, 如果对应的放大因子 \widehat{Q} 满足:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t_n \leq T} |(\widehat{Q}(w))^n| \leq K(T), \quad \forall w$$

如果保证始终有 $|\widehat{Q}| \leq 1$ (严格的 von Neumann 条件), 那么显然格式具有稳定性。

Remark. 多层格式的放大因子和 Fourier 分析比双层格式更复杂, 例如对流方程的 CTCS 格式 (蛙跳格式) 的稳定性分析。

2.5 相容性与局部截断误差

局部截断误差对应的是相容性, 直接将精确解代入差分格式, 格式两侧的差值为局部截断误差。计算工具主要为泰勒展开, 具体展开的位置不影响结论。

Remark. 注意代入局部截断误差的定义不要多乘 Δt 。

通常在 (x_j, t^n) 处展开得到的结果形如

$$\tau_j^n = \mathcal{O}((\Delta x)^p + (\Delta t)^q)$$

此时随着 $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, 局部截断误差 $\tau_j^n \rightarrow 0$, 称格式是无条件相容的。但是也可能存在其它形式的结果, 如果必须假定 Δx 和 Δt 在趋于 0 时满足一定约束, 则称格式是有条件相容的。例如 LF 格式是有条件相容的: 需要固定 $\lambda = \Delta t/\Delta x$, 随着 $\Delta t \rightarrow 0$, 才有

$$\tau_j^n = \mathcal{O}(\Delta t + \frac{\Delta x^2}{\Delta t}) = \mathcal{O}(\Delta x) \rightarrow 0$$

2.6 收敛性与整体误差

整体误差对应的是收敛性, 整体误差定义为数值解和精确解之差, 记 $e_j^n = v_j^n - u_j^n$, $E^n = \max_j(|e_j^n|)$, 收敛性要求随着 $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, 有 $E^n \rightarrow 0$ 。为了证明 E^n 趋于 0, 通常需要在计算局部截断误差的基础上, 在时间上累计, 利用不等式进行放缩。

2.7 CFL 条件与迎风格式

对于对流方程, 需要考虑数值解依赖区和精确解依赖区的关系, 对于对流方程 $u_t + au_x = 0$, 特征线方程为 $x - at = \text{constant}$, 考虑任意点 $P(x, t)$ 处的精确解 $u(x, t)$, 由过该点的特征线与 $t = 0$ 交点 $P_0(x_0, 0)$ 的初值决定

$$u(x, t) = u_0(x_0), \quad x_0 = x - at.$$

$D_p = \{P_0\} = \{(x_0, 0)\}$ 称为精确解的依赖区。

Definition 2.7.1. 称如下条件为 CFL 条件

$$\text{精确解依赖区 } D_p \subset \text{数值解依赖区 } N_p$$

Remark 2.7.1. 通常可以基于这个条件推出更具体的形如 $\Delta t \leq C\Delta x$ 的时间步长限制。

Theorem 2.7.1. CFL 条件是差分格式收敛的必要条件。

Remark. CFL 条件也适用对变系数和非线性双曲问题的数值格式分析, 但只是这些格式收敛的必要条件。

对于对流方程, 可以根据特征线来定义迎风格式:

- 迎风格式: 特征线方向与模板方向一致的数值格式;
- 逆风格式: 特征线方向与模板方向不一致的数值格式。

分析可知, 迎风格式是条件稳定的, 逆风格式则是无条件不稳定的。

2.8 不稳定格式的修正

对于对流方程 $u_t + au_x = 0$ 直接设计的 FTCS 格式无条件不稳定

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + a \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

考虑对原方程加入人工黏性项 ($\sigma > 0$)

$$u_t + au_x = \sigma \Delta x u_{xx}$$

离散得到

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + a \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} = \sigma \Delta x \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

分别取不同的 σ 可以得到 Lax-Friedrich 和 Lax-Wendroff 格式。

(a) Lax-Friedrich 格式：取 $\sigma = \frac{\Delta x}{2\Delta t}$ ，可以得到

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + a \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} = \left(\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \right) \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

计算可得局部截断误差为 $\mathcal{O}(\Delta t + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t})$ ，因此是一个有条件相容的格式。整理可得

$$\frac{v_j^{n+1} - \frac{1}{2}(v_{j-1}^n + v_{j+1}^n)}{\Delta t} + a \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

这也可以解释为：将 v_j^n 替换为空间上的平均 $\frac{1}{2}(v_{j-1}^n + v_{j+1}^n)$ 。

(b) Lax-Wendroff 格式：取 $\sigma = \frac{a^2 \Delta t}{2\Delta x}$ ，可以得到

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + a \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} = \left(\frac{a^2 \Delta t}{2} \right) \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

计算可得局部截断误差为 $\mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2)$ 。对格式整理可得

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \Delta t (-a) \left(\frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) + \frac{\Delta t^2}{2} a^2 \left(\frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right)$$

这也可以解释为精确解 u 关于时间的泰勒展开

$$\begin{aligned} u(x_j, t^{n+1}) &= u(x_j, t^n) + \Delta t u_t(x_j, t^n) + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}(x_j, t^n) \\ &= u(x_j, t^n) + \Delta t (-a) u_x(x_j, t^n) + \frac{\Delta t^2}{2} a^2 u_{xx}(x_j, t^n) \end{aligned}$$

Remark. 虽然都可以解释为添加人工黏性项，但是 LF 格式和 LW 格式的各种性质很不相同：局部截断误差，耗散色散，是否产生数值振荡等。

对于扩散方程 $u_t = au_{xx}$ 直接设计的 CTCS 格式 (Richardson 格式)

$$\frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^n}{2\Delta t} = a \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

虽然它具有局部截断误差 $\mathcal{O}(\Delta x^2 + \Delta t^2)$ ，但是格式却是无条件不稳定的。考虑将 v_j^n 替换为时间平均 $\frac{1}{2}(v_j^{n-1} + v_j^{n+1})$ ，得到 Dufort-Frankel 格式

$$\frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^n}{2\Delta t} = a \frac{v_{j+1}^n - (v_j^{n-1} + v_j^{n+1}) + v_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

DF 格式的局部截断误差为

$$\mathcal{O}(\Delta x^2 + \Delta t^2 + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}).$$

因此是一个有条件相容的格式。虽然 DF 格式是显格式，却是无条件稳定的。

2.9 其它方法构造差分格式

可以通过 PDE 的积分形式来构造差分格式，未知量可以是格点处的函数值或函数在单元的平均值，选取合适的控制体进行数值积分即可。在构造时常用的数值积分公式包括

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{4} f'(\xi) \\ \int_a^b f(x) dx &= \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \\ \int_a^b f(x) dx &= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)\end{aligned}$$

尤其注意在推导时积分余项的形式，可能漏了 Δx 或者 Δt ，例如

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u^{n+1} - u^n dx = \Delta x(u_j^{n+1} - u_j^n) + \mathcal{O}(\Delta x^3 \Delta t).$$

还可以直接指定离散模板，通过待定系数法构造数值微分/积分公式，进而构造差分格式。

2.10 变系数对流/扩散方程

考虑变系数对流方程

$$u_t + a(x, t)u_x = 0$$

特征线满足

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(x(t), t)$$

特征线为一族互不相交的曲线，解沿着特征线不变。

可以直接将常系数对流方程的格式直接推广到变系数对流方程，例如 LF 格式

$$\frac{v_j^{n+1} - \frac{1}{2}(v_{j-1}^n + v_{j+1}^n)}{\Delta t} + a(x_j, t^n) \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

在分析稳定性时可以采用冻结系数法，将系数冻结为某个常数，视作常系数方程进行分析。

考虑变系数扩散方程

$$u_t = b(x, t)u_{xx}, \quad b(x, t) \geq \varepsilon > 0.$$

可以直接将常系数扩散方程的格式直接推广到变系数扩散方程。对于守恒型扩散方程

$$u_t = (b(x, t)u_x)_x$$

可以在格式构造时考虑方程的守恒性质，例如

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x} \left(b_{j+1/2}^n \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x} - b_{j-1/2}^n \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{\Delta x} \right)$$

2.11 一阶线性偏微分方程组问题

常系数一阶线性偏微分方程组

考虑方程组

$$U_t + AU_x = 0 \tag{2.1}$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是常系数矩阵, 未知函数 $U: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$.

可以直接将标量方程的格式推广到方程组, 例如 LF 格式

$$V_j^{n+1} = \frac{1}{2}(V_{j-1}^n + V_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A(V_{j+1}^n - V_{j-1}^n)$$

LW 格式

$$V_j^{n+1} = V_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A(V_{j+1}^n - V_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} A^2(V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n)$$

Definition 2.11.1. 称方程组 (2.1) 为双曲型方程组, 如果 A 可以相似对角化, 并且特征值均为实数。

$$A = SAS^{-1}, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n). \quad (\lambda_i \in \mathbb{R}).$$

进一步, 称方程组 (2.1) 为严格双曲型方程组, 如果 A 是双曲型方程组, 并且特征值互异。

对于双曲型方程组, 可以通过换元使得各个分量解耦: 记 $W = S^{-1}U$, 则 W 满足

$$W_t + \Lambda W_x = 0$$

记 $|\Lambda| = \text{diag}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)$, 可以得到关于 W 的迎风格式

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \Lambda(W_{j+1}^n - W_{j-1}^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} |\Lambda|(W_{j+1}^n - 2W_j^n + W_{j-1}^n)$$

如果定义 $|A| = S|\Lambda|S^{-1}$, 可以等价地改写为

$$V_j^{n+1} = V_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A(V_{j+1}^n - V_{j-1}^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} |A|(V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n)$$

变系数一阶线性偏微分方程组

考虑方程组

$$U_t + A(x, t)U_x = 0 \tag{2.2}$$

其中 $A(x, t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 未知函数 $U: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Definition 2.11.2. 称方程组 (2.2) 为双曲型方程组, 如果 $A(x, t)$ 可以相似对角化, 并且特征值均为实数。

$$A(x, t) = S(x, t)\Lambda(x, t)S(x, t)^{-1}, \quad \Lambda(x, t) = \text{diag}(\lambda_1(x, t), \dots, \lambda_n(x, t)). \quad (\lambda_i(x, t) \in \mathbb{R})$$

进一步, 称方程组 (2.2) 为严格双曲型方程组, 如果 $A(x, t)$ 是双曲型方程组, 并且特征值始终互异。

可以将常系数方程组的格式推广到变系数问题中。

第三章 适定问题

3.1 预备知识

通常只考虑对适定问题的数值求解，这一章明确什么样的问题是适定的。我们考虑的问题默认都是纯初值问题，定义域为整个空间，并且在空间上的每一个维度都具有 2π 周期，从而可以在分析时使用 Fourier 方法，考虑谐波解。

Definition. 称问题是适定的，若存在唯一解，并且解关于初值是稳定的，即：存在常数 $K, \alpha > 0$ ，使得

$$\|u(\cdot, t)\| \leq K e^{\alpha(t-t_0)} \|u(\cdot, t_0)\|$$

基本的例子：

1. 对流方程 $u_t + au_x = 0, (a \in \mathbb{R})$ 是适定的；
2. 扩散方程 $u_t = bu_{xx} (b > 0)$ 是适定的，但是 $b < 0$ 就是不适定的；

直接利用方程计算即可验证。

对于加上低阶项的方程也可以分析，例如

$$u_t = u_x + \alpha u, \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

通过变量代换，定义 $w = e^{-\alpha t}u$ ，可以得到 w 满足方程 $w_t = w_x$ ，因此原方程是适定的。

对于方程组问题，例如对称双曲方程组

$$U_t = AU_x = \begin{pmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{pmatrix} U_x,$$

可以通过对 A 进行正交相似对角化来简化分析

$$A = R\Lambda R^T, \quad R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

换元 $W = R^T U$ ，可以得到 W 满足

$$W_t = \Lambda W_x = \begin{pmatrix} -d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} W_x,$$

因此原问题是适定的。再例如考虑非对称双曲方程组

$$U_t = BU_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d^2 & 0 \end{pmatrix} U_x$$

通过相似变换

$$B = DSD^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{pmatrix}$$

换元 $V = D^{-1}U$, 可以得到 V 满足

$$V_t = S V_x = \begin{pmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{pmatrix} V_x$$

回到了对称双曲方程组的情形, 因此原问题也是适定的。

3.2 一维常系数标量方程的适定性

考虑一维常系数标量方程: 周期函数 $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$, 常系数 $a, b, c \in \mathbb{C}$, 满足的 PDE 为

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} + bu_x + cu, \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

Theorem 3.2.1. 问题 (3.1) 是适定的, 等价于存在常数 $\alpha \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall w$, 下式成立

$$\operatorname{Re} \kappa \leq \alpha, \quad \kappa := -aw^2 + ibw + c.$$

对表达式 $\kappa = -aw^2 + ibw + c$ 进行更具体地分析: c 的取值没有什么影响, 主导因素为最高阶导数项系数 a :

1. 如果 $\operatorname{Re}(a) > 0$, 则 $\operatorname{Re}(\kappa) = \operatorname{Re}(-aw^2 + ibw + c)$ 是关于 w 的开口向下的二次函数, 显然存在有限上界, 问题适定;
2. 如果 $\operatorname{Re}(a) < 0$, 则 $\operatorname{Re}(\kappa) = \operatorname{Re}(-aw^2 + ibw + c)$ 是关于 w 的开口向上的二次函数, 显然不存在有限上界, 问题不适定;
3. 如果 $\operatorname{Re}(a) = 0$, 需要考虑 b 的影响:
 - (a) 如果 $\operatorname{Im}(b) \neq 0$, 则 $\operatorname{Re}(\kappa) = \operatorname{Re}(ibw + c)$ 是关于 w 的一次函数, 不存在有限上界, 问题不适定;
 - (b) 如果 $\operatorname{Im}(b) = 0$, 则 $\operatorname{Re}(\kappa) = \operatorname{Re}(c)$ 与 w 无关, 显然存在有限上界, 问题适定。

Definition 3.2.1. 称上述方程 (3.1) 是抛物型方程, 如果满足 $\operatorname{Re}(a) > 0$ 。

Theorem 3.2.2. 抛物型方程是适定的。

定理 3.2.1 可以直接推广到一般的一维常系数标量方程

$$\begin{cases} u_t = \sum_{j=0}^N a_j \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (3.2)$$

其中常系数 $a_j \in \mathbb{C}$ 。

Theorem 3.2.3. 问题 (3.2) 是适定的, 等价于存在常数 $\alpha \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall w$, 下式成立

$$\operatorname{Re} \kappa \leq \alpha, \quad \kappa := \sum_{j=0}^N a_j (iw)^j$$

3.3 一维常系数方程组的适定性

3.3.1 双曲型方程组

考虑一维常系数一阶方程组：周期函数 $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}^m$ ，常系数矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ，满足的 PDEs 为

$$\begin{cases} U_t = AU_x \\ U(x, 0) = F(x) \end{cases} \quad (3.3)$$

有几个定义和结论：

Definition 3.3.1. 方程组 (3.3) 称为：

1. 弱双曲，如果 A 的特征值全部为实数；
2. (强) 双曲，如果 A 具有完备的特征向量 (A 可以相似对角化)，并且特征值全部为实数；
3. 对称双曲，如果 A 是 Hermite 方阵；(显然也是强双曲)
4. 严格双曲，如果特征值全部为实数，并且互异。(显然也是强双曲)

这几个定义的关系如图 3.1。

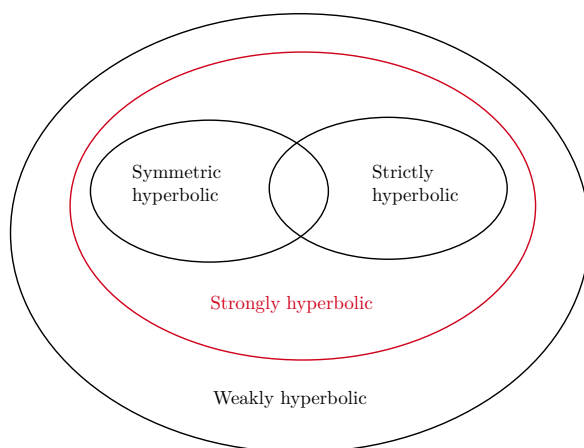


图 3.1: 双曲型问题的几个定义

Theorem 3.3.1. 问题 (3.3) 适定的充要条件为：PDEs 为强双曲问题。(弱双曲无法保证适定性)

考虑带非导数项的问题

$$\begin{cases} U_t = AU_x + BU \\ U(x, 0) = F(x) \end{cases} \quad (3.4)$$

Theorem 3.3.2. 问题 (3.4) 适定的一个充分条件为：PDEs 为强双曲问题。

3.3.2 抛物型方程组

考虑一维常系数二阶方程组：周期函数 $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}^m$ ，常系数矩阵 $A, B, C \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ，满足的 PDEs 为

$$\begin{cases} U_t = A u_{xx} + B U_x + C U =: P U \\ U(x, 0) = F(x) \end{cases} \quad (3.5)$$

Definition 3.3.2. 称方程组 (3.5) 是抛物型的，如果存在常数 $\delta > 0$ ，使得 A 的所有特征值 λ 都满足 $\operatorname{Re} \lambda \geq \delta$ 。

在对抛物型方程进行适定性分析时，通常需要利用如下结论

Lemma 3.3.3. 下面两个结论等价：

1. 存在常数 $\delta > 0$ ，使得 A 的所有特征值 λ 都满足 $\operatorname{Re} \lambda \geq \delta$ ；（即抛物的定义）
2. 存在常数 $\delta' > 0$ ，使得 $A + A^* \geq \delta' I$ 。

Theorem 3.3.4. 抛物型问题是适定的。

3.3.3 一般常系数方程组

考虑一般的问题：周期函数 $u : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}^m$ ，满足的 PDEs 为

$$\begin{cases} u_t = P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (3.6)$$

这里的 $\frac{\partial}{\partial x}$ 是在多重指标意义下的。谐波解形如

$$\widehat{U}(w, t) = e^{\widehat{P}(iw)t} \widehat{F}(w)$$

Remark. 这里的记号 e^M 是矩阵指数

$$e^M = I + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \dots$$

Theorem 3.3.5. 初值问题 (3.6) 是适定的，等价于存在常数 K, α ，使得对于任意 w 都有

$$|e^{\widehat{P}(iw)t}| \leq K e^{\alpha t}$$

这个充要条件不太实用，但是可以据此推出更好用必要或充分条件。

Theorem 3.3.6 (The Petrovskii condition). 初值问题 (3.6) 适定的必要条件为：存在常数 α ，使得对于任意 w ， $\widehat{P}(iw)$ 的任意特征值 $\lambda(w)$ ，都有

$$\operatorname{Re} \lambda(w) \leq \alpha$$

Proof. 取 $\widehat{P}(iw)$ 的任意特征值 $\lambda(w)$ 以及对应的单位特征向量 $\phi(w)$ ，满足

$$\widehat{P}(iw)\phi(w) = \lambda(w)\phi(w), \quad \Rightarrow \quad e^{\widehat{P}(iw)t}\phi(w) = e^{\lambda(w)t}\phi(w)$$

利用适定性的充要条件可得

$$|e^{\lambda(w)t}| = |e^{\lambda(w)t}\phi(w)| = |e^{\hat{P}(iw)t}\phi(w)| \leq Ke^{\alpha t}$$

这表明 $|e^{\lambda(w)t}|$ 的增长被控制, 即实部 $\operatorname{Re} \lambda(w)$ 存在一致的上界。 \square

Theorem 3.3.7. 初值问题 (3.6) 适定的一个充分条件为: $\hat{P}(iw)$ 始终可以相似对角化, 记作

$$\hat{P}(iw) = S(w)\Lambda(w)S^{-1}(w), \quad \forall w$$

并且满足:

1. 对于相似对角化的变换矩阵 $S(w)$, 存在与 w 无关的常数 K , 使得

$$|S(w)||S^{-1}(w)| \leq K, \quad \forall w$$

2. (The Petrovskii condition) 对于对角阵 $\Lambda(w)$, 存在与 w 无关的常数 α , 使得

$$\operatorname{Re} \Lambda(w) \leq \alpha I, \quad \forall w$$

Proof.

$$|e^{\hat{P}(iw)t}| = |e^{S(w)\Lambda(w)S^{-1}(w)t}| = |S(w)e^{\Lambda(w)t}S^{-1}(w)| \leq |S(w)||e^{\Lambda(w)t}||S^{-1}(w)| \leq Ke^{\alpha t} \quad \square$$

3.3.4 半有界算子与适定性

仍然考虑的是一般的常系数问题 (3.6)。

Definition 3.3.3. 称算子 P 为半有界算子, 如果存在常数 α , 使得对任意光滑函数 $v(x)$ 都有

$$(v, Pv) + (Pv, v) \leq 2\alpha(v, v)$$

其中 (\cdot, \cdot) 为 L^2 内积。

Remark. P 是半有界算子并不意味着 P 自身是有界的。

Theorem 3.3.8. 算子 P 是半有界算子, 等价于要求: 存在常数 α , 使得

$$\hat{P}(iw) + \hat{P}^*(iw) \leq 2\alpha I, \quad \forall w$$

易知半有界算子可以直接推出问题的适定性:

Theorem 3.3.9. 若 P 是半有界算子, 则问题 (3.6) 是适定的, 并且解满足

$$\|u(\cdot, t)\| \leq e^{\alpha t} \|u(\cdot, 0)\|$$

Proof.

$$\frac{d}{dt} [e^{-2\alpha t}(u, u)] = e^{-2\alpha t} \left(\frac{d}{dt}(u, u) - 2\alpha(u, u) \right) = e^{-2\alpha t} [(u, Pu) + (Pu, u) - 2\alpha(u, u)] \leq 0$$

因此

$$\begin{aligned} e^{-2\alpha t} \|u(\cdot, t)\|^2 &\leq \|u(\cdot, 0)\|^2 \\ \|u(\cdot, t)\| &\leq e^{\alpha t} \|u(\cdot, 0)\| \end{aligned} \quad \square$$

还可以通过一个 Hermite 矩阵将半有界算子定义中的 L^2 内积和范数进行推广：考虑一个关于 w 的 Hermite 矩阵 $\hat{H}(w) = \hat{H}^*(w)$ ，要求存在与 w 无关的常数 $K > 0$ 使得

$$\frac{1}{K}I \leq \hat{H}(w) \leq KI, \quad \forall w$$

此时可以定义一个新的内积 $(\cdot, \cdot)_H$ 和范数 $\|\cdot\|_H$ ：

$$(v_1, v_2)_H := \sum_w \langle \hat{v}_1(w), \hat{H}(w)\hat{v}_2(w) \rangle, \quad \|v\|_H := \sqrt{(v, v)_H}$$

原本的 L^2 内积相当于选择了平凡的单位阵 $\hat{H}(w) = I$ 。

Definition 3.3.4. 称算子 P 在 H 内积意义下是半有界算子，如果满足存在常数 α ，使得对任意光滑函数 $v(x)$ 都有

$$(v, Pv)_H + (Pv, v)_H \leq 2\alpha(v, v)_H$$

或者等价于要求 \hat{P} 满足

$$\hat{H}(w)\hat{P}(iw) + \hat{P}^*(iw)\hat{H}(w) \leq 2\alpha\hat{H}(w), \quad \forall w$$

同理可以证明：如果 P 在 H 内积意义下为半有界算子，那么原问题在 H 范数意义下是适定的，又因为范数等价，在 L^2 范数意义下也是适定的。

Theorem 3.3.10. 问题 (3.6) 是适定的，等价于可以构造出合适的 $\hat{H}(w)$ ，使得 P 在 H 内积的意义下为半有界算子，即：存在常数 $K, \alpha > 0$ ，使得

$$\begin{aligned} \frac{1}{K}I &\leq \hat{H}(w) \leq KI, \quad \forall w \\ \hat{H}(w)\hat{P}(iw) + \hat{P}^*(iw)\hat{H}(w) &\leq 2\alpha\hat{H}(w), \quad \forall w \end{aligned}$$

第四章 差分方法的性质

4.1 相容性

相容性体现的是差分方程对 PDE 的逼近程度，包括逐点相容性和模相容性，逐点相容性主要通过局部截断误差来衡量。

Definition 4.1.1 (局部截断误差). 对于微分方程 $\mathcal{L}u = g$ 以及对应的差分方程 $Lv_j^n = g_j^n$ ，定义在 (x_j, t^n) 处的局部截断误差为

$$\tau_j^n := Lu_j^n - g_j^n - (\mathcal{L}u(x_j, t^n) - g(x_j, t^n)) = Lu_j^n - g_j^n$$

其中 $u(x, t)$ 是满足 PDE 的充分光滑函数。

Definition 4.1.2 (逐点相容性). 称差分格式 $Lv_j^n = g_j^n$ 是（无条件）逐点相容的：如果局部截断误差 τ_j^n 在 $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ 时满足

$$\tau_j^n \rightarrow 0.$$

进一步，称这个格式的局部截断误差阶是 (p, q) ：如果存在不可改善的正数 p, q ，使得下式成立

$$\tau_j^n = \mathcal{O}((\Delta x)^p + (\Delta t)^q)$$

Remark. 局部截断误差阶与推导过程无关，选取不同的位置进行泰勒展开会得到相同的结果。

Definition 4.1.3 (模相容性). 对于如下形式的差分格式

$$V^{n+1} = QV^n + \Delta t G^n$$

将满足 PDE 的充分光滑函数 U 代入会产生余项 $\Delta t T^n$

$$U^{n+1} = QU^n + \Delta t G^n + \Delta t T^n$$

称差分格式是（无条件）关于模 $\|\cdot\|$ 相容的：如果随着 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ ，有

$$\|T^n\| \rightarrow 0$$

进一步，称这个格式的 $\|\cdot\|$ 模相容阶是 (p, q) ：如果存在不可改善的正数 p, q ，使得下式成立

$$\|T^n\| = \mathcal{O}((\Delta x)^p + (\Delta t)^q)$$

4.2 稳定性

稳定性体现的是 PDE 的定解条件（初值，边值）的微小变化对差分方程的近似解的影响（在某个模的意义下）。

Definition 4.2.1 (稳定性). 对于二层格式

$$V^{n+1} = QV^n, \quad n \geq 0,$$

其中 Q 为差分算子, $V^n = (\dots, v_{-1}^n, v_0^n, v_1^n, \dots)$ 。称该差分格式是关于 $\|\cdot\|$ 模稳定的, 若对于任意 (x, t) , 存在 $\Delta x_0 > 0, \Delta t_0 > 0, K \geq 0, \beta \geq 0$, 使得 $\forall 0 < t = (n+1)\Delta t, 0 < \Delta x \leq \Delta x_0, 0 < \Delta t \leq \Delta t_0$, 有

$$\|V^{n+1}\| \leq Ke^{\beta t} \|V^0\|$$

Remark. 上述稳定性定义的要求较弱, 有时会采用更加严格的稳定性定义, 要求满足 $\|V^{n+1}\| \leq K\|V^0\|$, 其中 K 与时间无关。

Theorem 4.2.1. 考虑二层格式 $V^{n+1} = QV^n$, 数值解关于 $\|\cdot\|$ 模稳定的充要条件是: 存在 $\Delta x_0 > 0, \Delta t_0 > 0, K \geq 0, \beta \geq 0$, 使得 $\forall 0 < t = (n+1)\Delta t, 0 < \Delta x \leq \Delta x_0, 0 < \Delta t \leq \Delta t_0$, 有

$$\|Q^{n+1}\| \leq Ke^{\beta t}$$

4.3 收敛性

收敛性体现的是满足差分方程的近似解和满足 PDE 的准确解之间的关系, 包括逐点收敛和按模收敛。

Definition 4.3.1 (逐点收敛性). 称差分格式是 (无条件) 逐点收敛的, 如果随着 $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0, j\Delta x \rightarrow x_*, n\Delta t \rightarrow t_*$, 有

$$v_j^n \rightarrow u(x_*, t_*)$$

Definition 4.3.2 (模收敛性). 称差分格式是 (无条件) 按 $\|\cdot\|$ 模收敛的, 如果随着 $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0, n\Delta t \rightarrow t_*$, 有

$$\|U^n - V^n\| \rightarrow 0$$

进一步, 称这个格式的 $\|\cdot\|$ 模具有 (p, q) 阶精度: 如果存在不可改善的正数 p, q , 使得下式成立

$$\|U^n - V^n\| = \mathcal{O}((\Delta x)^p + (\Delta t)^q)$$

4.4 Lax 定理

收敛性是我们的最终目标, 但是不易证明, 格式的相容性相对最容易验证。基于 Lax 等价定理, 可以将问题归结于格式的稳定性证明。

Theorem 4.4.1 (Lax 等价定理). 对于一个适定的线性偏微分方程初值问题的相容二层差分格式，它的收敛性与稳定性是等价的。

Theorem 4.4.2 (Lax 定理). 对于一个适定的线性偏微分方程初值问题，假设它的二层差分格式

$$V^{n+1} = QV^n + \Delta t G^n$$

是按 $\|\cdot\|$ 模相容的，并且关于模 $\|\cdot\|$ 具有 (p, q) 阶相容阶，那么：格式若关于 $\|\cdot\|$ 模是稳定的，则关于 $\|\cdot\|$ 模 (p, q) 阶收敛。

因此通常有两类方法可以证明格式的收敛性：

1. 直接证明：先计算局部截断误差，然后计算整体误差 $e_j^n = u_j^n - v_j^n$ ，使用不等式放缩证明整体误差趋于 0；
2. 间接证明：分别证明相容性和稳定性，然后利用 Lax 等价定理得证收敛性。

4.5 稳定性证明

稳定性的证明有很多种方法，例如

1. Fourier 方法（充要条件）
2. CFL 方法（必要条件）
3. 冻结系数法（必要条件）
4. 离散最大模原理（ L^∞ 模稳定的充分条件）
5. 能量方法（ L^2 模稳定的充分条件）

...

由于稳定性含义与具体的模选取有关，选择不同的模进行分析，可能得到不同的稳定性结论。

4.5.1 Fourier 方法

对于周期边界问题，假设空间上均匀剖分，考虑标量方程的线性双层格式。

$$V^{n+1} = QV^n, \quad \widehat{V}^{n+1} = \widehat{Q}\widehat{V}^n$$

首先假定我们考虑的稳定性概念是允许随时间增长的，即要求 $\|V^{n+1}\| \leq Ke^{\beta(n+1)\Delta t}\|V^0\|$ ，其中 K, β 是常数。此时 L^2 模稳定性等价于要求

$$|\widehat{Q}(w)|^{n+1} \leq Ke^{\beta(n+1)\Delta t}$$

其中 $\widehat{Q}(w)$ 为放大因子，由此可以导出著名的 von Neumann 条件。

Theorem 4.5.1 (von Neumann 条件). 格式是 L^2 模稳定，等价于存在常数 $C > 0$ ，使得放大因子 $\widehat{Q}(w)$ 在 Δt 适当小的时候满足

$$|\widehat{Q}(w)| \leq 1 + C\Delta t$$

如果我们考虑的稳定性概念是不允许随时间增长的，即要求 $\|V^{n+1}\| \leq K\|V^0\|$ ，其中 K 是常数，那么有不一样的结果：此时的条件变为放大因子满足 $|\widehat{Q}(w)| \leq 1$ ，称为严格的 von Neumann 条件。

Remark. 对于一般方程(组)的多层格式, 记号和稳定性分析都更加复杂, 放大因子 \hat{Q} 不再是标量而是一个方阵。一般情况下, von Neumann 条件只是稳定的必要条件, 需要加上其它条件才能得到充要条件。

Example 4.5.1. 考虑 $u_t = u_{xx}$ 的 θ 格式

$$v_j^{n+1} - v_j^n = \Delta t (\theta Q v_j^{n+1} + (1 - \theta) Q v_j^n), \quad Q = D_+ D_-.$$

分析其 L^2 模稳定性。

Solution. 计算放大因子 (记 $\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$)

$$\hat{Q} = \frac{1 - 4\mu(1 - \theta) \sin^2(\frac{\xi}{2})}{1 + 4\mu\theta \sin^2(\frac{\xi}{2})}, \quad (\xi = wh)$$

要求 $-1 \leq \hat{Q} \leq 1$, 显然有 $\hat{Q} \leq 1$, 对于 $-1 \leq \hat{Q}$ 等价于

$$\begin{aligned} 2 \left(1 + 4\mu\theta \sin^2(\frac{\xi}{2}) \right) &\geq 4\mu \sin^2(\frac{\xi}{2}) \\ 1 - 4\mu(\frac{1}{2} - \theta) \sin^2(\frac{\xi}{2}) &\geq 0 \end{aligned}$$

稳定性要求对任意 ξ 均成立, 即要求

$$4\mu(\frac{1}{2} - \theta) \leq 1$$

当 $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ 时, 格式无条件稳定; 当 $0 < \theta < \frac{1}{2}$ 时, 格式有条件稳定, 要求 $\mu \leq 1/(2 - 4\theta)$ 。

4.5.2 CFL 方法

对于双曲型问题, 考虑特征线, 要求数值解依赖区包含精确解的依赖区, 否则不稳定。但是这只是(在任意模下)稳定的必要不充分条件, 例如对流方程的 FTCS 即使满足 CFL 条件也是不稳定的。

4.5.3 冻结系数法

思路就是将变系数问题在局部近似为常系数问题, 过程如下:

1. 将差分系数冻结为某个常数, 导出相应的线性常系数差分格式;
2. 利用其他的准确分析技术, 给出相应的稳定性结论;
3. 考虑所有合理的系数冻结范围, 所有的稳定性结论的交集就是冻结系数方法给出的结果。

冻结系数法只是进行一个模糊的分析, 得到的是(在任意模下)稳定的必要条件。

4.5.4 离散最大模原理

要求最大模 $\|v^{n+1}\|_\infty \leq \|v^n\|_\infty$ 关于时间不增, 通常需要使用凸组合不等式, 保证凸组合的系数非负, 得到的是最大模稳定的充分条件。

Example 4.5.2. 考虑 $u_t = u_{xx}$ 的 θ 格式

$$v_j^{n+1} - v_j^n = \Delta t (\theta Q v_j^{n+1} + (1 - \theta) Q v_j^n), \quad Q = D_+ D_-.$$

分析其最大模稳定性。

Solution. 记 $\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, 将差分格式整理为

$$(1 + 2\theta\mu)v_j^{n+1} = [1 - 2(1 - \theta)\mu]v_j^n + (1 - \theta)\mu(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n) + \theta\mu(v_{j+1}^{n+1} + v_{j-1}^{n+1})$$

若满足 $1 - 2(1 - \theta)\mu \geq 0$, 利用系数非负性放缩可得

$$\begin{aligned} (1 + 2\theta\mu)v_j^{n+1} &= [1 - 2(1 - \theta)\mu]v_j^n + (1 - \theta)\mu(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n) + \theta\mu(v_{j+1}^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}) \\ &\leq [1 - 2(1 - \theta)\mu]\|v^n\|_\infty + 2(1 - \theta)\mu\|v^n\|_\infty + 2\theta\mu\|v^{n+1}\|_\infty \\ &= \|v^n\|_\infty + 2\theta\mu\|v^{n+1}\|_\infty \end{aligned}$$

对左侧取最大值可得

$$\begin{aligned} (1 + 2\theta\mu)\|v^{n+1}\|_\infty &\leq \|v^n\|_\infty + 2\theta\mu\|v^{n+1}\|_\infty \\ \|v^{n+1}\|_\infty &\leq \|v^n\|_\infty \end{aligned}$$

此时离散最大模原理成立。条件 $1 - 2(1 - \theta)\mu \geq 0$ 表明: 只有 $\theta = 0$ 时格式在最大模意义下无条件稳定, 其他情况下都是有条件稳定, 要求 $\mu \leq 1/(2 - 4\theta)$ 。

Remark. 例 4.5.1 和例 4.5.2 表明在不同的模意义下分析同一个数值格式, 也可能得到不同的稳定性结论。(张强《偏微分方程的有限差分方法》P45)

4.5.5 能量方法 *

构造一个新范数 $\|\cdot\|_*$, 要求 $\|v^{n+1}\|_* \leq e^{\alpha\Delta t}\|v^n\|_*$, 再利用范数等价得到离散 L^2 模的稳定性(充要条件), 过程如下:

1. 选取适当的检验函数, 建立能量范数的递推关系;
2. 指出能量范数同离散 L^2 模的等价关系;
3. 导出差分格式的 L^2 模稳定性, 给出相应的充分条件。

在推导过程中需要利用一些不等式和求和技巧。

Example 4.5.3. 考虑 $u_t = u_x$ 的 CN 格式, 分析离散 L^2 模稳定性。

$$v_j^{n+1} - v_j^n = \frac{\Delta t}{2} D_0(v_j^n + v_j^{n+1}) = 0, \quad D_0 := \frac{1}{2\Delta x}(E^1 - E^{-1}).$$

Solution. 在格式两侧乘以 $v_j^{n+1} + v_j^n$ 可得

$$(v_j^{n+1})^2 - (v_j^n)^2 = \frac{\Delta t}{2} D_0(v_j^n + v_j^{n+1})(v_j^{n+1} + v_j^n)$$

对 j 求和并化简可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} (\|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 - \|v^n\|_{\Delta x}^2) &= \frac{\Delta t}{2} \sum_j D_0(v_j^n + v_j^{n+1})(v_j^{n+1} + v_j^n), \quad (w_j := v_j^{n+1} + v_j^n) \\ &= \frac{\Delta t}{2} \sum_j D_0(w_j)w_j = \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left(\sum_j w_{j+1}w_j - \sum_j w_{j-1}w_j \right) = 0 \end{aligned}$$

因此

$$\|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 = \|v^n\|_{\Delta x}^2 = \cdots = \|v^0\|_{\Delta x}^2$$

无条件离散 L^2 模稳定。

Example 4.5.4. 考虑 $u_t = a(x)u_x$ (其中 $a(x)$ 是 Lipschitz 连续的周期函数) 的 CN 格式, 分析离散 L^2 模稳定性。

$$v_j^{n+1} - v_j^n = \frac{\Delta t}{2} a_j D_0(v_j^n + v_j^{n+1}) = 0, \quad D_0 := \frac{1}{2\Delta x} (E^1 - E^{-1}).$$

Solution. 在格式两侧乘以 $v_j^{n+1} + v_j^n$ 可得

$$(v_j^{n+1})^2 - (v_j^n)^2 = \frac{\Delta t}{2} a_j D_0(v_j^n + v_j^{n+1})(v_j^{n+1} + v_j^n)$$

对 j 求和

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} (\|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 - \|v^n\|_{\Delta x}^2) &= \frac{\Delta t}{2} \sum_j a_j D_0(v_j^n + v_j^{n+1})(v_j^{n+1} + v_j^n), \quad (w_j := v_j^{n+1} + v_j^n) \\ &= \frac{\Delta t}{2} \sum_j a_j D_0(w_j)w_j \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \left| \sum_j a_j D_0(w_j)w_j \right| &= \frac{1}{2\Delta x} \left| \sum_j a_j w_{j+1}w_j - \sum_j a_j w_{j-1}w_j \right| = \frac{1}{2\Delta x} \left| \sum_j (a_j - a_{j+1})w_{j+1}w_j \right| \\ &\leq \frac{1}{2} M \sum_j |w_{j+1}w_j| \leq \frac{1}{4} M \sum_j (|w_{j+1}|^2 + |w_j|^2) = \frac{M}{2\Delta x} \|w\|_{\Delta x}^2 \end{aligned}$$

因此

$$\|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 - \|v^n\|_{\Delta x}^2 \leq \frac{\Delta t M}{4} \|v^{n+1} + v^n\|_{\Delta x}^2 \leq \frac{\Delta t M}{2} (\|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 + \|v^n\|_{\Delta x}^2)$$

整理可得, 在 $M\Delta t \ll 1$ 时, 存在 $\alpha > 0$ 使得

$$\|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 \leq \frac{1 + \frac{\Delta t M}{2}}{1 - \frac{\Delta t M}{2}} \|v^n\|_{\Delta x}^2 \leq (1 + \alpha\Delta t) \|v^n\|_{\Delta x}^2,$$

进一步放缩可得

$$\|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 \leq (1 + \alpha\Delta t) \|v^n\|_{\Delta x}^2 \leq \cdots \leq (1 + \alpha\Delta t)^{n+1} \|v^0\|_{\Delta x}^2 \leq e^{\alpha(n+1)\Delta t} \|v^0\|_{\Delta x}^2$$

此时格式是离散 L^2 模稳定的。

Example 4.5.5. 考虑 $u_t = (b(x)u_x)_x$ (其中 $M \geq b(x) \geq m > 0$) 的如下格式, 分析离散 L^2 模稳定性。

$$v_j^{n+1} - v_j^n = \mu [b_{j+1/2}(v_{j+1}^n - v_j^n) - b_{j-1/2}(v_j^n - v_{j-1}^n)], \quad \mu := \frac{\Delta t}{\Delta x^2}.$$

Solution. 在格式两侧乘以 $v_j^{n+1} + v_j^n$ 可得

$$(v_j^{n+1})^2 - (v_j^n)^2 = \mu [b_{j+1/2}(v_{j+1}^n - v_j^n) - b_{j-1/2}(v_j^n - v_{j-1}^n)] (v_j^{n+1} + v_j^n)$$

对 j 求和

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} (\|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 - \|v^n\|_{\Delta x}^2) &= \mu \sum_j [b_{j+1/2}(v_{j+1}^n - v_j^n) - b_{j-1/2}(v_j^n - v_{j-1}^n)] (v_j^{n+1} + v_j^n) \\ &= \mu \sum_j b_{j+1/2}(v_{j+1}^n - v_j^n) [(v_j^{n+1} + v_j^n) - (v_{j+1}^{n+1} + v_{j+1}^n)] \\ &= -\mu \sum_j b_{j+1/2} \Delta_+ v_j^n \Delta_+ (v_j^{n+1} + v_j^n) \\ &\stackrel{(*)}{=} -\mu \sum_j b_{j+1/2} \left\{ \frac{1}{2} [\Delta_+ (v_j^{n+1} + v_j^n)]^2 + \frac{1}{2} (\Delta_+ v_j^n)^2 - \frac{1}{2} (\Delta_+ v_j^{n+1})^2 \right\} \\ &\leq -\mu \sum_j b_{j+1/2} \left(\frac{1}{2} (\Delta_+ v_j^n)^2 - \frac{1}{2} (\Delta_+ v_j^{n+1})^2 \right) \end{aligned}$$

其中 (*) 利用了如下恒等式

$$p(p+q) = \frac{1}{2}(p+q)^2 + \frac{1}{2}(p^2 - q^2)$$

整理可得

$$\|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 - \frac{\mu \Delta x}{2} \sum_j b_{j+1/2} (\Delta_+ v_j^{n+1})^2 \leq \|v^n\|_{\Delta x}^2 - \frac{\mu \Delta x}{2} \sum_j b_{j+1/2} (\Delta_+ v_j^n)^2$$

放缩可得

$$\begin{aligned} &\|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 - \frac{\mu \Delta x}{2} \sum_j b_{j+1/2} (\Delta_+ v_j^{n+1})^2 \\ &\geq \|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 - \mu \Delta x \sum_j b_{j+1/2} ((v_{j+1}^{n+1})^2 + (v_j^{n+1})^2) \\ &\geq \|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 - 2\mu M \|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 \end{aligned}$$

其中 M 为 $b(x)$ 的上界。若 $\mu M < \frac{1}{2}$, 则有

$$\|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 \leq \frac{1 + 2\mu M}{1 - 2\mu M} \|v^n\|_{\Delta x}^2$$

此时格式是离散 L^2 模稳定的。

Example 4.5.6. 考虑 $u_t + a(x)u_x = 0$ (其中周期函数 $a(x) > 0$ 有上界, 并且 $a_x(x)$ 有界) 的 Lax 格式, 分析离散 L^2 模稳定性。

$$v_j^{n+1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} a_j^n \right) v_{j+1}^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} a_j^n \right) v_{j-1}^n, \quad \lambda := \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Solution. 记 $\alpha = \max |a(x)|$, $\beta = \max |a_x(x)|$, 当 $\alpha\lambda \leq 1$ 时

$$\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} a_j^n \geq 0, \quad \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} a_j^n \geq 0$$

考虑凸函数 x^2 的性质可知

$$(v_j^{n+1})^2 \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} a_j^n \right) (v_{j+1}^n)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} a_j^n \right) (v_{j-1}^n)^2$$

关于 j 求和可得

$$\sum_j (v_j^{n+1})^2 \leq \sum_j (1 + \frac{\lambda}{2}(a_{j+1}^n - a_{j-1}^n))(v_j^n)^2 \leq \sum_j (1 + \lambda\beta\Delta x)(v_j^n)^2 = \sum_j (1 + \beta\Delta t)(v_j^n)^2$$

因此

$$\|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 \leq (1 + \beta\Delta t)\|v^n\|_{\Delta x}^2 \leq \dots \leq (1 + \beta\Delta t)^{n+1}\|v^0\|_{\Delta x}^2 \leq e^{\beta(n+1)\Delta t}\|v^0\|_{\Delta x}^2$$

在 $\lambda \max(|a(x)|) \leq 1$ 时, 格式关于离散 L^2 模稳定。

Example 4.5.7. 考虑 $u_t = u_x$ 的蛙跳格式, 分析其能量稳定性。

$$v_j^{n+1} - v_j^{n-1} = \lambda(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n), \quad \lambda := \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Solution. 在格式两侧乘以 $v_j^{n+1} + v_j^{n-1}$ 可得

$$(v_j^{n+1})^2 - (v_j^{n-1})^2 = \lambda(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)(v_j^{n+1} + v_j^{n-1})$$

对 j 求和

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} (\|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 - \|v^{n-1}\|_{\Delta x}^2) \\ &= \lambda \sum_j (v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)(v_j^{n+1} + v_j^{n-1}) \\ &= 2\lambda \sum_j v_j^{n+1} \Delta_0 v_j^n + 2\lambda \sum_j v_j^{n-1} \Delta_0 v_j^n \\ &= 2\lambda \sum_j v_j^{n+1} \Delta_0 v_j^n - 2\lambda \sum_j v_j^n \Delta_0 v_j^{n-1} \end{aligned}$$

最后一步利用了如下等式

$$2 \sum_j v_j^{n-1} \Delta_0 v_j^n = \sum_j v_j^{n-1} (v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) = \sum_j v_j^n (v_{j-1}^{n-1} - v_{j+1}^{n-1}) = -2 \sum_j v_j^n \Delta_0 v_j^{n-1}$$

整理可得

$$\|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 + \|v^n\|_{\Delta x}^2 - 2\lambda\Delta x \sum_j v_j^{n+1} \Delta_0 v_j^n = \|v^n\|_{\Delta x}^2 + \|v^{n-1}\|_{\Delta x}^2 - 2\lambda\Delta x \sum_j v_j^n \Delta_0 v_j^{n-1}$$

放缩剩下的项

$$\begin{aligned} 2\Delta x \left| \sum_j v_j^{n+1} \Delta_0 v_j^n \right| &\leq \Delta x \left| \sum_j v_j^{n+1} v_{j+1}^n \right| + \Delta x \left| \sum_j v_j^{n+1} v_{j-1}^n \right| \\ &\leq 2\|v^{n+1}\|_{\Delta x} \|v^n\|_{\Delta x} \leq \|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 + \|v^n\|_{\Delta x}^2 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 + \|v^n\|_{\Delta x}^2 - 2\lambda\Delta x \sum_j v_j^{n+1} \Delta_0 v_j^n &\geq (1 - \lambda) (\|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 + \|v^n\|_{\Delta x}^2) \\ \|v^n\|_{\Delta x}^2 + \|v^{n-1}\|_{\Delta x}^2 - 2\lambda\Delta x \sum_j v_j^n \Delta_0 v_j^{n-1} &\leq (1 + \lambda) (\|v^n\|_{\Delta x}^2 + \|v^{n-1}\|_{\Delta x}^2) \end{aligned}$$

最终得到在 $\lambda < 1$ 时,

$$\|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 + \|v^n\|_{\Delta x}^2 \leq \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} (\|v^n\|_{\Delta x}^2 + \|v^{n-1}\|_{\Delta x}^2)$$

此时格式是离散 L^2 模稳定的。

4.5.6 半有界离散算子与稳定性 *

Definition 4.5.1. 空间离散算子 Q 被称为半有界的, 如果存在常数 $\alpha > 0$, 使得对所有的周期格点函数 v , 都有

$$(v, Qv)_{\Delta x} + (Qv, v)_{\Delta x} \leq 2\alpha \|v\|_{\Delta x}^2$$

半有界离散算子可以用于证明半离散格式 (仅对空间离散) 的稳定性, 就像半有界算子直接推出方程的适定性一样。

Theorem 4.5.2. 考虑半离散格式

$$\begin{cases} \frac{dv_j}{dt} = Qv_j, j = 0, 1, \dots, N+1 \\ v_j(0) = f_j \end{cases}$$

如果空间离散算子算子 Q 是半有界的, 则解满足稳定性

$$\|u(\cdot, t)\|_{\Delta x} \leq Ke^{\alpha(t-t_0)} \|u(\cdot, t_0)\|_{\Delta x}$$

Example 4.5.8. 考虑如下时间向后欧拉格式

$$v_j^{n+1} - v_j^n = \Delta t Q(v_j^{n+1})$$

其中对应空间离散的 Q 是半有界算子, 分析格式的稳定性。

Solution 4.5.1. 在格式两侧乘以 v_j^{n+1} 可得 (假定都是实值)

$$(v_j^{n+1})^2 - v_j^{n+1}v_j^n = \Delta t Q(v_j^{n+1})v_j^{n+1}$$

对 j 求和并乘以 Δx

$$\|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 - (v^{n+1}, v^n)_{\Delta x} = \Delta t (Q(v^{n+1}), v^{n+1})_{\Delta x}$$

整理并进行放缩

$$\begin{aligned} \|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 &\leq \|v^{n+1}\|_{\Delta x} \|v^n\|_{\Delta x} + \alpha \Delta t \|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 \\ \|v^{n+1}\|_{\Delta x} &\leq \|v^n\|_{\Delta x} + \alpha \Delta t \|v^{n+1}\|_{\Delta x} \end{aligned}$$

因此

$$(1 - \alpha \Delta t) \|v^{n+1}\|_{\Delta x} \leq \|v^n\|_{\Delta x}$$

Example 4.5.9. 考虑如下 CN 格式

$$v_j^{n+1} - v_j^n = \frac{\Delta t}{2} Q(v_j^{n+1} + v_j^n)$$

其中对应空间离散的 Q 是半有界算子, 分析格式的稳定性。

Solution 4.5.2. 在格式两侧乘以 $v_j^{n+1} + v_j^n$ 可得 (假定都是实值)

$$(v_j^{n+1})^2 - (v_j^n)^2 = \frac{\Delta t}{2} Q(v_j^{n+1} + v_j^n)(v_j^{n+1} + v_j^n)$$

对 j 求和

$$\frac{1}{\Delta x} (\|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 - \|v^n\|_{\Delta x}^2) = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \sum_j Q(v_j^{n+1} + v_j^n)(v_j^{n+1} + v_j^n)\Delta x \leq \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x} \|v^{n+1} + v^n\|_{\Delta x}^2$$

因此

$$\|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 - \|v^n\|_{\Delta x}^2 \leq \frac{\alpha \Delta t}{2} \|v^{n+1} + v^n\|_{\Delta x}^2 \leq \alpha \Delta t (\|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 + \|v^n\|_{\Delta x}^2)$$

得到

$$\|v^{n+1}\|_{\Delta x}^2 \leq \frac{1 + \alpha \Delta t}{1 - \alpha \Delta t} \|v^n\|_{\Delta x}^2$$

4.6 耗散性和色散性

需要区分如下三组概念:

- **方程的耗散性/色散性:** 满足方程的简谐波传播规律;
- **差分格式的耗散性/色散性:** 满足差分格式的简谐波传播规律;
- **差分格式的数值耗散/数值色散:** 体现的是方程和差分格式之间的耗散性/色散性比较。

4.6.1 方程的耗散性/色散性

考虑如下常系数线性方程

$$u_t = \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial^j u}{\partial x^j}, \quad a_j \in \mathbb{C}$$

取简谐波 $u(x, t) = e^{i(kx + \omega t)}$, 其中 k 是相位速度, 对应时间周期性; ω 是波数, $\frac{2\pi}{|\omega|}$ 是波长, 对应空间周期性。

Remark. 有的资料中使用 k 表示波数, 使用 ω 表示相位速度, 与这里的记号相反, 此时的简谐波为 $u(x, t) = e^{i(\omega t + kx)}$ 。

直接将 $u(x, t) = e^{i(kx + \omega t)}$ 代入方程可以得到 k 和 ω 需要满足的广义色散关系 $k = k(\omega)$:

$$k = k(\omega) = -i \sum_{j=1}^N a_j (i\omega)^j$$

把 $k = k(\omega)$ 拆分为实部和虚部代入可得谐波解

$$u(x, t) = e^{-\text{Im } k(\omega)t} e^{i(\text{Re } k(\omega)t + \omega x)} = e^{-\text{Im } k(\omega)t} e^{i\omega(x + \frac{\text{Re } k(\omega)}{\omega}t)}$$

定义方程的放大因子 $\lambda = \lambda(\omega)$ 以体现谐波解随时间的变化 (包括振幅和相位变化)

$$\lambda(\omega) = \frac{u(x, t + \Delta t)}{u(x, t)} = \frac{e^{i(k(\omega)(t + \Delta t) + \omega x)}}{e^{i(k(\omega)t + \omega x)}} = e^{ik(\omega)\Delta t} = e^{-\text{Im } k(\omega)\Delta t} e^{i\text{Re } k(\omega)\Delta t}$$

易得方程的放大因子和 $k(\omega)$ 满足如下关系

$$\text{Re } k(\omega) = \frac{\arg \lambda(\omega)}{\Delta t}, \quad \text{Im } k(\omega) = -\frac{\ln |\lambda(\omega)|}{\Delta t}.$$

假设方程所对应的广义色散关系为 $k = k(\omega)$, 关注 $\text{Im } k(\omega)$ 所代表的振幅变化:

- 如果 $\text{Im } k(\omega) = 0$, 表明解的振幅不会随着时间变化;
- 如果 $\text{Im } k(\omega) > 0$, 表明解的振幅会随着时间衰减;
- 如果 $\text{Im } k(\omega) < 0$, 表明解的振幅会迅速增长。

Definition 4.6.1 (方程的耗散性). 考虑对于所有波数 w 对应的谐波解的行为:

- 称 PDE 是 (正) 耗散的, 其解是稳定的, 如果所有的谐波解的振幅不随时间增长, 并且至少一个谐波解的振幅随时间衰减;
- 称 PDE 是无耗散的, 其解是稳定的, 如果所有的谐波解的振幅不随时间变化;
- 其它情况下, 称 PDE 是逆耗散的, 其解不稳定。

Remark. 如果存在一个 w 使得 $\text{Im } k(w) < 0$ 逆耗散, 那么问题本身就是不适定的, 只有 $\text{Im } k(w) \geq 0$ 对于所有的 w 始终成立, 问题才是适定的。

假设方程所对应的广义色散关系为 $k = k(w)$, 定义波速 $c = c(w) = -\text{Re } k(w)/w$, 若 $c > 0$, 则波向右传播, 若 $c < 0$ 则波向左传播。对于不同波数 w 的波:

- 如果波速 $c(w)$ 与波数 w 无关, 这表明不同波数 w 的波传播速度相同;
- 如果波速 $c(w)$ 与波数 w 有关, 这表明不同波数 w 的波传播速度不同。

Definition 4.6.2 (方程的色散性). 考虑波速 $c = c(w) = -\text{Re } k(w)/w$ 与波数 w 的关系:

- 称 PDE 具有色散性, 其解是色散的, 如果波速 $c(w)$ 与波数 w 有关;
- 称 PDE 无色散, 其解是无色散的, 如果波速 $c(w)$ 与波数 w 无关。

Example 4.6.1. 讨论 $u_t + au_x = 0$ 的耗散性和色散性, 其中 $a \neq 0$ 是固定的实数。

Solution. 将 $u(x, t) = e^{i(kt+wx)}$ 代入方程可得

$$ike^{i(kt+wx)} + aiwe^{i(kt+wx)} = 0, \quad \Rightarrow \quad k(w) = -aw$$

基于色散关系 $k(w) = -aw$ 继续分析:

- 耗散性: $\text{Im } k(w) = 0$, 方程无耗散;
- 色散性: 波速 $c(w) = -\text{Re } k(w)/w = a$ 与波数 w 无关, 方程无色散。

Example 4.6.2. 讨论 $u_t + au_{xx} = 0$ 的耗散性和色散性, 其中 $a \neq 0$ 是固定的实数。

Solution. 将 $u(x, t) = e^{i(kt+wx)}$ 代入方程可得

$$ike^{i(kt+wx)} + a(iw)^2 e^{i(kt+wx)} = 0, \quad \Rightarrow \quad k(w) = -aiw^2$$

基于色散关系 $k(w) = -aiw^2$ 继续分析:

- 耗散性: $\text{Im } k(w) = -aw^2$
 - (1) $a > 0$ 时 $\text{Im } k(w) < 0$ 逆耗散; (不稳定)
 - (2) $a < 0$ 时 $\text{Im } k(w) > 0$ 耗散。
- 色散性: 波速 $c(w) = -\text{Re } k(w)/w = 0$ 与波数 w 无关, 方程无色散。

这里 $a < 0$ 就是常系数的热方程, $a > 0$ 则是典型的不适定问题。

Example 4.6.3. 讨论 $u_t + au_{xxx} = 0$ 的耗散性和色散性, 其中 $a \neq 0$ 是固定的实数。

Solution. 将 $u(x, t) = e^{i(kt+wx)}$ 代入方程可得

$$ike^{i(kt+wx)} + a(iw)^3 e^{i(kt+wx)} = 0, \quad \Rightarrow \quad k(w) = aw^3$$

基于色散关系 $k(w) = aw^3$ 继续分析:

- 耗散性: $\text{Im } k(w) = 0$, 方程无耗散;
- 色散性: 波速 $c(w) = -\text{Re } k(w)/w = -aw^2$ 与波数 w 有关, 方程有色散。

对于一般的实系数线性方程

$$u_t = \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial^j u}{\partial x^j}, \quad a_j \in \mathbb{C}$$

有如下结论:

1. 偶数阶空间导数项对应耗散关系, 无色散关系;
2. 奇数阶空间导数项无耗散关系, 空间导次数大于 1 的项对应色散关系。

但是如果存在复系数, 就需要拆分为实部虚部进行单独的分析, 结论显然不一样。

Example 4.6.4. 讨论 $u_t + iau_{xx} = 0$ 的耗散性和色散性, 其中 $a \neq 0$ 是固定的实数。

Solution. 将 $u(x, t) = e^{i(kt+wx)}$ 代入方程可得

$$ike^{i(kt+wx)} + ia(iw)^2 e^{i(kt+wx)} = 0, \quad \Rightarrow \quad k(w) = aw^2$$

基于色散关系 $k(w) = aw^2$ 继续分析:

- 耗散性: $\beta(w) = \text{Im } k(w) = 0$, 方程无耗散。
- 色散性: 波速 $c(w) = -\text{Re } k(w)/w = -aw$ 与波数 w 有关, 方程有色散。

4.6.2 差分格式的耗散性/色散性

对于差分格式的耗散性/色散性分析包括如下两个方法:

1. 通过直接计算差分格式的放大因子, 色散关系来分析;
2. MPDE 方法, 需要利用与差分格式等价的方程不断进行变换, 消去除 u_t 之外的含时间的低阶导数项。

Remark. MPDE 方法具体参考教材和讲义, 计算比较繁琐。

直接将 $v_j^n = e^{i(kt_n + wx_j)}$ 代入差分方程, 可以得到离散的广义色散关系 $k = k(w)$, 同样拆分为实部和虚部

$$v_j^n = e^{-\text{Im } k(w)t_n} e^{i(\text{Re } k(w)t_n + wx_j)}$$

定义差分格式的放大因子 $\lambda = \lambda(w)$

$$\lambda(w) = \frac{v_j^{n+1}}{v_j^n} = e^{-\text{Im } k(w)\Delta t} e^{i \text{Re } k(w)\Delta t},$$

易得放大因子和 $k(w)$ 满足如下关系

$$\text{Re } k(w) = \frac{\arg \lambda(w)}{\Delta t}, \quad \text{Im } k(w) = -\frac{\ln |\lambda(w)|}{\Delta t}.$$

差分格式的耗散色散性同样可以通过 $\text{Re } k(w)$ 和 $\text{Im } k(w)$ 来定义。假设差分格式所对应的广义色散关系为 $k = k(w)$, 关注 $\text{Im } k(w)$ 所代表的振幅变化:

- 如果 $\text{Im } k(w) = 0$, 表明数值解的振幅不会随着时间变化;
- 如果 $\text{Im } k(w) > 0$, 表明数值解的振幅会随着时间衰减;
- 如果 $\text{Im } k(w) < 0$, 表明数值解的振幅会迅速增长。

Definition 4.6.3 (差分格式的耗散性). 考虑对于所有波数 w 对应的谐波解的行为:

- 称差分格式是(正)耗散的, 其数值解是稳定的, 如果所有的谐波解的振幅不随时间增长, 并且至少一个谐波解的振幅随时间衰减;
- 称差分格式是无耗散的, 其数值解是稳定的, 如果所有的谐波解的振幅不随时间变化;
- 其它情况下, 称差分格式是逆耗散的, 其解不稳定。

Remark. 如果存在一个 w 使得 $\text{Im } k(w) < 0$ 逆耗散, 那么差分格式本身是不稳定的, 只有 $\text{Im } k(w) \geq 0$ 对于所有的 w 始终成立, 格式才是稳定的。

Definition 4.6.4 (差分格式的色散性). 考虑波速 $c = c(w) = -\text{Re } k(w)/w$ 与波数 w 的关系:

- 称差分格式具有色散性, 如果波速 $c(w)$ 与波数 w 有关;
- 称差分格式无色散, 如果波速 $c(w)$ 与波数 w 无关。

对于差分格式的分析, 放大因子的计算比较容易, $\text{Im } k(w)$ 的正负判断直接等价于对 $|\lambda(w)|$ 与 1 的大小判断, 但是计算波速时涉及到的放大因子的辐角并不容易

$$\arg \lambda(w) = \arctan \left(\frac{\text{Im } \lambda(w)}{\text{Re } \lambda(w)} \right)$$

具体表达式可能比较复杂, 记 $\eta = w\Delta x$, 对上式在 $\eta = 0$ 附近泰勒展开, 只关注 $\eta = 0$ 附近的表现。

4.6.3 差分格式的数值耗散/数值色散

将方程和差分格式的耗散性/色散性进行比较, 这里使用下标 e 强调方程的相关概念 (广义色散关系 $k_e(w)$, 放大因子 $\lambda_e(w)$, 波速 $c_e(w)$), 引入如下的概念:

Definition 4.6.5 (数值耗散). 对于方程以及对应的差分格式:

- 称差分格式是数值(正)耗散的, 如果放大因子的模长之比满足 $|\lambda|/|\lambda_e| < 1$; (表明数值解的耗散比精确解更强)
- 称差分格式无数值耗散, 如果放大因子的模长之比满足 $|\lambda|/|\lambda_e| = 1$;
- 其它情况下, 称差分格式是数值逆耗散。

Definition 4.6.6 (数值色散). 对于方程以及对应的差分格式:

- 称差分格式是数值负色散的, 如果波速之比满足 $c(w)/c_e(w) = \arg \lambda(w)/\arg \lambda_e(w) < 1$; (表明数值解的相位滞后于精确解)
- 称差分格式无数值色散, 如果波速之比满足 $c(w)/c_e(w) = \arg \lambda(w)/\arg \lambda_e(w) = 1$;
- 其它情况下, 称差分格式是数值正色散的。

4.6.4 一些例子

Example 4.6.5. 讨论 $u_t + au_x = 0$ 的迎风格式的耗散性/色散性, 数值耗散性/数值色散性, 其中 $a > 0$ 是固定的实数。

Solution. 迎风格式为 FTBS 格式

$$v_j^{n+1} = v_j^n - r(v_j^n - v_j^{n-1}), \quad r = a \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

差分格式的放大因子为

$$\begin{aligned} \lambda(w) &= 1 - r(1 - e^{-iw\Delta x}) \\ &= 1 - r + r \cos(w\Delta x) - ir \sin(w\Delta x) \\ |\lambda(w)| &= 1 - \frac{1}{2}r(1-r)\eta^2 + O(\eta^4), \quad (\eta = w\Delta x) \end{aligned}$$

显然在 $0 < r \leq 1$ 时, $|\lambda(w)| \leq 1$, 差分格式具有稳定性。关于格式的耗散性分析:

- $r = 1$ 对应 $|\lambda(w)| = 1$, 此时 $\text{Im } k(w) = 0$, 差分格式无耗散;
- $0 < r < 1$ 对应 $|\lambda(w)| < 1$, 此时 $\text{Im } k(w) > 0$, 差分格式有耗散;

计算放大因子的幅角

$$\begin{aligned} \arg \lambda(w) &= \arctan \left(\frac{-r \sin(w\Delta x)}{1 - r + r \cos(w\Delta x)} \right) \\ &= \arctan \left(\frac{-r(\eta - \frac{\eta^3}{3!} + \dots)}{1 - r + r(1 - \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^4}{4!} + \dots)} \right) \\ &= -r\eta + \frac{1}{6}(r - 3r^2 + 2r^3)\eta^3 + O(\eta^5) \\ &= -r\eta \left[1 - \frac{1}{6}(1-r)(1-2r)\eta^2 + O(\eta^4) \right] \end{aligned}$$

计算波速

$$c = -\frac{\text{Re } k(w)}{w} = -\frac{\arg \lambda(w)}{w\Delta t} = a \left[1 - \frac{1}{6}(1-r)(1-2r)\eta^2 + O(\eta^4) \right]$$

关于格式的色散性分析:

- $r = 1$ 时, $c = a$ 波速与 w 无关, 差分格式无色散;
- $0 < r < 1$ 时, $c = c(w)$ 与 w 有关, 差分格式有色散。

对于方程本身: 放大因子满足 $|\lambda_e| = 1$ 无耗散, 波速 $c_e = a$ 无色散。将差分格式和方程进行比较可得:

- 当 $0 < r < 1$ 时, $|\lambda|/|\lambda_e| < 1$, 差分格式具有数值(正)耗散; 当 $r = 1$ 时, $|\lambda|/|\lambda_e| = 1$, 差分格式无数值耗散。
- 当 $r \in (0, \frac{1}{2})$, $c(w)/c_e(w) < 1$, 差分格式具有数值负色散; 当 $r \in (\frac{1}{2}, 1)$, $c(w)/c_e(w) > 1$, 差分格式具有数值正色散; 当 $r = 1$ 或 $r = \frac{1}{2}$ 时, $c(w)/c_e(w) = 1$, 差分格式无数值色散。

Example 4.6.6. 讨论 $u_t + au_x = 0$ 的 LW 格式的耗散性/色散性, 数值耗散性/数值色散性, 其中 $a > 0$ 是固定的实数。

Solution. LW 格式如下

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{r}{2}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + \frac{r^2}{2}(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n), \quad r = a \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

差分格式的放大因子为

$$\begin{aligned}\lambda(w) &= 1 - \frac{r}{2}(e^{iw\Delta x} - e^{-iw\Delta x}) + \frac{r^2}{2}(e^{iw\Delta x} - 2 + e^{-iw\Delta x}) \\ &= 1 - r \sin(w\Delta x)i + \frac{r^2}{2}(-4 \sin^2(\frac{w\Delta x}{2})) \\ &= 1 - 2r^2 \sin^2(\frac{w\Delta x}{2}) - ir \sin(w\Delta x) \\ |\lambda(w)| &= 1 + \frac{1}{8}r^2(r^2 - 1)\eta^4 + O(\eta^6), \quad (\eta = w\Delta x)\end{aligned}$$

显然在 $0 < r \leq 1$ 时, $|\lambda(w)| \leq 1$, 差分格式具有稳定性。关于格式的耗散性分析:

- $r = 1$ 对应 $|\lambda(w)| = 1$, 此时 $\text{Im } k(w) = 0$, 差分格式无耗散;
- $0 < r < 1$ 对应 $|\lambda(w)| < 1$, 此时 $\text{Im } k(w) > 0$, 差分格式有耗散;

计算放大因子的幅角

$$\begin{aligned}\arg \lambda(w) &= \arctan \left(\frac{-r \sin(\eta)}{1 - 2r^2 \sin^2(\frac{\eta}{2})} \right) \\ &= \arctan \left(\frac{-r(\eta - \frac{\eta^3}{3!} + \dots)}{1 - r^2(\frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta^4}{4!} + \dots)} \right) \\ &= -r\eta + \frac{1}{6}(r - r^3)\eta^3 + O(\eta^5) \\ &= -r\eta \left[1 - \frac{1}{6}(1 - r^2)\eta^2 + O(\eta^4) \right]\end{aligned}$$

计算波速

$$c = -\frac{\text{Re } k(w)}{w} = -\frac{\arg \lambda(w)}{w\Delta t} = a \left[1 - \frac{1}{6}(1 - r^2)\eta^2 + O(\eta^4) \right]$$

关于格式的色散性分析:

- $r = 1$ 时, $c = a$ 波速与 w 无关, 差分格式无色散;
- $0 < r < 1$ 时, $c = c(w)$ 与 w 有关, 差分格式有色散。

对于方程本身: 放大因子满足 $|\lambda_e| = 1$ 无耗散, 波速 $c_e = a$ 无色散。将差分格式和方程进行比较可得:

- 当 $0 < r < 1$ 时, $|\lambda|/|\lambda_e| < 1$, 差分格式具有数值(正)耗散; 当 $r = 1$ 时, $|\lambda|/|\lambda_e| = 1$, 差分格式无数值耗散。
- 当 $0 < r < 1$ 时, $c(w)/c_e(w) < 1$, 差分格式具有数值负色散; 当 $r = 1$ 时, $c(w)/c_e(w) = 1$, 差分格式无数值色散;

第五章 二维问题

现在将前面的一维方程和格式推广到二维情形。

5.1 二维常系数对流问题

对于二维常系数对流问题（纯初值问题，周期边界条件）

$$\begin{cases} u_t + au_x + bu_y = 0 \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases}$$

其中 a, b 为常值，初值 $u_0(x, y)$ 在每一个方向都具有 2π 周期性。易知二维常系数对流方程的适定性条件为： a, b 都是实数。特征线方程为：

$$\begin{cases} x'(t) = a \\ y'(t) = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt \end{cases}$$

解沿着特征线保持不变

$$\frac{d}{dt}u(x(t), y(t), t) = u_x x'(t) + u_y y'(t) + u_t = au_x + bu_y + u_t = 0$$

精确解为 $u(x, y, t) = u_0(x - at, y - bt)$ 。

对时空进行均匀网格剖分后，可以直接构造迎风格式，FTBS，CN 格式，LF 格式，LW 格式等，也可以通过积分方法构造数值格式，这些与一维常系数对流方程相比没有区别。对于二维对流方程考虑 CFL 条件时，可以简单地认为数值依赖区是各个分量的数值依赖区的笛卡儿积

$$D_p \subset N_p = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$$

例如 FTBS 格式为

$$\frac{v_{j,k}^{n+1} - v_{j,k}^n}{\Delta t} + a \left(\frac{u_{j,k}^n - u_{j-1,k}^n}{\Delta x} \right) + b \left(\frac{u_{j,k}^n - u_{j,k-1}^n}{\Delta y} \right) = 0$$

使用 Fourier 方法分析稳定性，放大因子为

$$\hat{Q} = 1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 - e^{-iw_x \Delta x}) - b \frac{\Delta t}{\Delta y} (1 - e^{-iw_y \Delta y}) = 1 - r_x (1 - e^{-iw_x \Delta x}) - r_y (1 - e^{-iw_y \Delta y})$$

若 $r_x > 0$, $r_y > 0$, $0 < r_x + r_y \leq 1$, 则有 $|\hat{Q}| \leq 1$ 。取 $P = (x_j, y_k, t^{n+1})$ 分析 CFL 条件，计算可得

$$D_p = \{(x_j - at^{n+1}, y_k - bt^{n+1})\} \subset N_p = [x_{j-n-1}, x_j] \times [y_{k-n-1}, y_k] \quad (5.1)$$

可以推出 $0 \leq r_x \leq 1$ 和 $0 \leq r_y \leq 1$ 。注意 CFL 条件只是必要条件，不是充分的。

Remark. 如果取数值依赖区为三角形区域而非矩形区域，也可以得到 $0 < r_x + r_y \leq 1$ 。

5.2 二维变系数对流问题

对于二维变系数对流问题

$$\begin{cases} u_t + a(x, y, t)u_x + b(x, y, t)u_y = 0 \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases}$$

对应的特征线方程为

$$\begin{cases} x'(t) = a(x, y, t) \\ y'(t) = b(x, y, t) \end{cases}$$

特征线是一族互不相交的曲线，解沿着特征线保持不变

$$\frac{d}{dt}u(x(t), y(t), t) = u_x x'(t) + u_y y'(t) + u_t = a(x, y, t)u_x + b(x, y, t)u_y + u_t = 0$$

可以用冻结系数等处理将常系数对流方程的有限差分格式直接推广到变系数问题中。

5.3 二维常系数扩散问题

对于二维常系数扩散问题（纯初值问题，周期边界条件）

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} + bu_{yy} \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases}$$

其中 a, b 为常值，初值 $u_0(x, y)$ 在每一个方向都具有 2π 周期性。易知二维常系数扩散方程的适定性条件为： $a, b > 0$ 。

对时空进行均匀网格剖分后，可以直接构造 FTCS, CN 格式等，也可以通过积分方法构造数值格式，这些与一维常系数扩散方程相比没有区别。

除此之外，还有一些针对二维扩散问题特有的方法，通过将二维差分格式近似转换为一组“具有一维求解属性”的二维差分格式来求解，显著提升计算效率。例如交替方向隐式方法（alternative direction implicit, ADI）：引入中间过渡层，在两个方向交替使用显式隐式。

Remark. 注意当前考虑的是纯初值或者周期边界问题，此时 $\delta_x^2 \delta_y^2 = \delta_y^2 \delta_x^2$ 算子可交换。

ADI 方法的代表格式有 Peaceman-Rachford 格式（PR 格式）：在二维 CN 格式的基础上加上最后的高阶修正项（记 $\mu_x = a \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, $\mu_y = b \frac{\Delta t}{\Delta y^2}$ ）

$$v_{j,k}^{n+1} = v_{j,k}^n + \frac{1}{2}\mu_x \delta_x^2 (v_{j,k}^n + v_{j,k}^{n+1}) + \frac{1}{2}\mu_y \delta_y^2 (v_{j,k}^n + v_{j,k}^{n+1}) + \frac{1}{4}\mu_x \mu_y \delta_x^2 \delta_y^2 (v_{j,k}^n - v_{j,k}^{n+1})$$

得到的差分格式保持了 CN 格式的局部截断误差，并且可以对算子进行因式分解

$$\left(1 - \frac{1}{2}\mu_x \delta_x^2\right) \left(1 - \frac{1}{2}\mu_y \delta_y^2\right) v_{j,k}^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2}\mu_x \delta_x^2\right) \left(1 + \frac{1}{2}\mu_y \delta_y^2\right) v_{j,k}^n$$

引入中间层，可以分裂为两个实际的计算步骤

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2}\mu_x \delta_x^2\right) v_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} &= \left(1 + \frac{1}{2}\mu_y \delta_y^2\right) v_{j,k}^n \\ \left(1 - \frac{1}{2}\mu_y \delta_y^2\right) v_{j,k}^{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{2}\mu_x \delta_x^2\right) v_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

这两个计算步骤可以解释为：

- Step 1: $t^n \rightarrow t^{n+\frac{1}{2}}$, 在 x 方向使用隐式, 在 y 方向使用显式:
 - Step 2: $t^{n+\frac{1}{2}} \rightarrow t^{n+1}$, 在 x 方向使用显式, 在 y 方向使用隐式:
- 也可以以另一种方式分裂:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2\right)v_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} &= \left(1 + \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2\right)v_{j,k}^n \\ \left(1 - \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2\right)v_{j,k}^{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2\right)v_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

对应的解释为:

- Step 1: $t^n \rightarrow t^{n+\frac{1}{2}}$, 在 x 方向使用显式, 在 y 方向使用隐式:
 - Step 2: $t^{n+\frac{1}{2}} \rightarrow t^{n+1}$, 在 x 方向使用隐式, 在 y 方向使用显式:
- Fourier 分析可得, PR 格式是无条件 L^2 稳定的。

$$\widehat{Q} = \frac{(1 - 2\mu_x \sin^2(w_x \Delta x/2))(1 - 2\mu_y \sin^2(w_y \Delta y/2))}{(1 + 2\mu_x \sin^2(w_x \Delta x/2))(1 + 2\mu_y \sin^2(w_y \Delta y/2))}, \quad |\widehat{Q}| \leq 1$$

Remark. 与之类似的, 还可以拆分为不太对称的 D'Yakonov 格式

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2\right)v_{j,k}^* &= \left(1 + \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2\right)\left(1 + \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2\right)v_{j,k}^n \\ \left(1 - \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2\right)v_{j,k}^{n+1} &= v_{j,k}^* \end{aligned}$$

还有 Douglas-Rachford 格式 (DR 格式): 在二维 BTCS 格式的基础上加上最后的高阶修正项 (记 $\mu_x = a \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, $\mu_y = b \frac{\Delta t}{\Delta y^2}$)

$$v_{j,k}^{n+1} = v_{j,k}^n + \mu_x \delta_x^2 v_{j,k}^{n+1} + \mu_y \delta_y^2 v_{j,k}^{n+1} + \mu_x \mu_y \delta_x^2 \delta_y^2 (v_{j,k}^n - v_{j,k}^{n+1})$$

得到的差分格式保持了 BTCS 格式的局部截断误差, 并且可以对算子进行因式分解

$$(1 - \mu_x \delta_x^2)(1 - \mu_y \delta_y^2)v_{j,k}^{n+1} = (1 + \mu_x \mu_y \delta_x^2 \delta_y^2)v_{j,k}^n$$

可以分裂为两个实际的计算步骤

$$\begin{aligned} (1 - \mu_x \delta_x^2)v_{j,k}^* &= (1 + \mu_y \delta_y^2)v_{j,k}^n \\ (1 - \mu_y \delta_y^2)v_{j,k}^{n+1} &= v_{j,k}^* - \mu_y \delta_y^2 v_{j,k}^n \end{aligned}$$

Fourier 分析可得, DR 格式是无条件 L^2 稳定的。

$$\widehat{Q} = \frac{1 + 4\mu_x \sin^2(w_x \Delta x/2) \times 4\mu_y \sin^2(w_y \Delta y/2)}{(1 + 4\mu_x \sin^2(w_x \Delta x/2))(1 + 4\mu_y \sin^2(w_y \Delta y/2))}, \quad |\widehat{Q}| \leq 1$$

5.4 一般的算子分裂方法

考虑如下问题

$$u_t = Au = A_1u + A_2u.$$

其中 $A = A(t) = A_1(t) + A_2(t)$ 。不妨设 Q_1, Q_2 是对应于 A_1, A_2 的离散算子, 分别对应如下的方程和数值格式

$$u_t = A_i(t)u, \quad \Rightarrow \quad v^{n+1} = Q_i(\Delta t, t^n)v^n$$

考虑如下分裂格式:

$$v^{n+1} = Q_2(\Delta t, t^n) Q_1(\Delta t, t^n) v^n.$$

假设 Q_i 是时间上至少一阶, 空间 p 阶的离散算子, 那么上述格式为时间一阶分裂格式, 局部截断误差为 $\mathcal{O}(\Delta x^p + \Delta t)$ 。

考虑如下分裂格式:

$$v^{n+1} = Q_1\left(\frac{\Delta t}{2}, t^{n+\frac{1}{2}}\right) Q_2(\Delta t, t^n) Q_1\left(\frac{\Delta t}{2}, t^n\right) v^n$$

假设 Q_i 是时间上至少二阶, 空间 p 阶的离散算子, 那么上述格式为时间二阶分裂格式, 局部截断误差为 $\mathcal{O}(\Delta x^p + \Delta t^2)$ 。

第六章 初边值问题

这里考虑一维问题的边界处理，边界条件分为：

1. Dirichlet 边界条件：本质边界条件
2. Neumann、Robin 边界条件：自然边界条件

6.1 一维扩散方程的边界处理

对于 $u_t = u_{xx}$ ，以左边界 $x = 0$ 的混合边界条件为例

$$-au_x(0, t) + \sigma u(0, t) = \varphi_0(t)$$

可以直接基于微分形式做近似，有如下的边界处理方法：

1. 单侧差商离散

$$-a \frac{v_1^n - v_0^n}{\Delta x} + \sigma v_0^n = \varphi_0(t^n)$$

2. 双侧离散方法：

(a) 虚拟点方法： $x_{-1} = x_0 - \Delta x$ (如图 6.1)，有两种做法

$$(1) \quad -a \frac{v_1^n - v_{-1}^n}{2\Delta x} + \sigma v_0^n = \varphi_0(t^n)$$

$$(2) \quad -a \frac{v_1^n - v_{-1}^n}{2\Delta x} + \sigma \frac{v_{-1}^n + v_1^n}{2} = \varphi_0(t^n)$$

(b) 半网格法： $x_1 = \Delta x/2$, $x_0 = -\Delta x/2$ (如图 6.1)

$$-a \frac{v_1^n - v_0^n}{\Delta x} + \sigma \frac{v_0^n + v_1^n}{2} = \varphi_0(t^n)$$

也可以基于积分形式进行近似，例如取 $[x_0, x_{1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$ 积分可得

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{2}(v_0^{n+1} - v_0^n) &= \Delta t a \frac{v_1^n - v_0^n}{\Delta x} + \Delta t(\varphi_0(t^n) - \sigma u_0^n) \\ \Rightarrow v_0^{n+1} &= \left(1 - \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{2\sigma\Delta t}{\Delta x}\right)v_0^n + \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2}v_1^n + \frac{2\Delta t}{\Delta x}\varphi_0(t^n) \end{aligned}$$

6.2 一维对流方程的边界处理

对流方程的边界条件设置需要根据风向确定，例如对于入流边界 $x = 1$ 和出流边界 $x = 0$ ，只有入流边界需要提供边界条件 $u(1, t) = \varphi(t)$ ，对于出流边界不应该提供边界条件，数值格式在处理出流边界时有如下的处理办法：

1. 对于单边迎风格式，此时无需特殊的边界处理；
2. 对于 LW 格式，LF 格式等双边离散的格式，需要设计人工出流边界，即更新 v_0^{n+1} 的公式：包括直接利用内部点外插，以及利用特征线求解等。

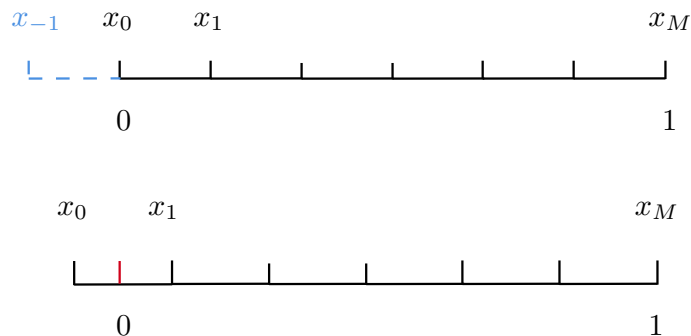


图 6.1: 整网格 (以及左侧虚拟点) 和 (左侧) 半网格示意图

6.3 初边值问题的性质分析

初值问题与初边值问题的差分格式在分析时的最大区别:

- 初值问题: Δx 减小时, 考虑的空间序列仍是同一个序列空间 (无限维空间);
- 初边值问题: Δx 减小时, 考虑的空间序列会发生变化 (空间维度逐渐提升的有限维空间)。没有一个合适的空间可以定义差分格式的收敛性, 必须考虑一个变化的空间序列以及相应的模序列。

考虑有界区域 $[0, 1]$, 默认考虑均匀剖分并对网格逐渐加密: 设第 k 个网格含两侧边界的格点数为 $M_k + 1$, 网格尺度 $\Delta x^{(k)} = \frac{1}{M_k}$, 满足 $\Delta x^{(k)} \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ 。第 k 个网格的离散点序列为

$$0 = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \dots < x_{M_k}^{(k)} = 1, \quad x_j^{(k)} = j\Delta x^{(k)}.$$

对应的数值解和精确解记作

$$V^{n,(k)} = \{v_0^{n,(k)}, v_1^{n,(k)}, \dots, v_{M_k}^{n,(k)}\}, \quad U^{n,(k)} = \{u_0^{n,(k)}, u_1^{n,(k)}, \dots, u_{M_k}^{n,(k)}\}$$

对应的有限维空间 $X^{(k)}$ 具有范数 $\|\cdot\|_{k\circ}$ 。

6.3.1 相容性

Definition 6.3.1 (局部截断误差). 对于微分方程 $\mathcal{L}u = g$ 以及对应的差分方法 $Lv_j^n = g_j^n$ (包括内部和边界的近似), 定义在 (x_j, t^n) 处的局部截断误差为

$$\tau_j^n = Lu_j^n - g_j^n - (Lu(x_j, t^n) - g(x_j, t^n)) = Lu_j^n - g_j^n$$

其中 $u(x, t)$ 是满足 PDE 的充分光滑函数。在内部和边界计算得到的局部截断误差可能不一样。

Definition 6.3.2 (逐点相容性). 称差分格式 $Lv_j^n = g_j^n$ 是 (无条件) 逐点相容的: 如果局部截断误差 τ_j^n 在 $\Delta x^{(k)}, \Delta t^{(k)} \rightarrow 0$ 时满足

$$\tau_j^n \rightarrow 0.$$

进一步, 称这个格式的局部截断误差阶是 (p, q) : 如果存在不可改善的正数 p, q , 使得下式成立

$$\tau_j^n = \mathcal{O}((\Delta x^{(k)})^p + (\Delta t^{(k)})^q)$$

由于通常对内部和边界采用了不同的近似处理, 在内部和边界计算得到的局部截断误差阶可能不一样, 差分格式的局部截断误差阶取两者中的最小值。

Definition 6.3.3 (模相容性). 对于如下形式的包括数值边界处理的二层格式

$$V^{n+1,(k)} = QV^{n,(k)} + \Delta t^{(k)} G^{n,(k)}$$

将满足 PDE 的充分光滑函数 U 代入会产生余项 $\Delta t^{(k)} T^{n,(k)}$

$$U^{n+1,(k)} = QU^{n,(k)} + \Delta t^{(k)} G^{n,(k)} + \Delta t^{(k)} T^{n,(k)}$$

称差分格式是 (无条件) 关于模 $\|\cdot\|_k$ 相容的: 如果随着 $k \rightarrow \infty$, $\Delta t^{(k)} \rightarrow 0$, $n\Delta t^{(k)} \rightarrow t^*$, 有

$$\|T^{n,(k)}\|_k \rightarrow 0$$

进一步, 称这个格式的模 $\|\cdot\|_k$ 相容阶是 (p, q) : 如果存在不可改善的正数 p, q , 使得下式成立

$$\|T^{n,(k)}\|_k = \mathcal{O}((\Delta x^{(k)})^p + (\Delta t^{(k)})^q)$$

6.3.2 稳定性

Definition 6.3.4 (模稳定性). 对于包括数值边界处理的二层格式

$$V^{n+1} = QV^n$$

称差分格式是关于模 $\|\cdot\|_k$ 稳定的: 如果存在常数 $K, \beta > 0$, 以及正的 $\Delta x_0, \Delta t_0$, 使得对于任意 $0 < \Delta x^{(k)} \leq \Delta x_0$, $0 < \Delta t^{(k)} \leq \Delta t_0$, 以及 $0 \leq t = (n+1)\Delta t^{(k)}$, 有

$$\|V^{n+1,(k)}\|_k \leq Ke^{\beta t} \|V^{0,(k)}\|_k$$

根据定义很容易得到模稳定性的充要条件:

Theorem 6.3.1. 对于包括数值边界处理的二层格式

$$V^{n+1} = QV^n$$

差分格式是关于模 $\|\cdot\|_k$ 稳定的充要条件是: 存在常数 $K, \beta > 0$, 以及正的 $\Delta x_0, \Delta t_0$, 使得对于任意 $0 < \Delta x^{(k)} \leq \Delta x_0$, $0 < \Delta t^{(k)} \leq \Delta t_0$, 以及 $0 \leq t = (n+1)\Delta t^{(k)}$, 有

$$\|Q^{n+1}\|_k \leq Ke^{\beta t}$$

如果特别取 $\|\cdot\|_k$ 为具体的模, 可以得到一些与矩阵 Q 相关的稳定性条件。

Theorem 6.3.2. 对于包括数值边界处理的二层格式

$$V^{n+1} = QV^n$$

关于模 $\|\cdot\|_{2,k}$ 稳定的必要条件是: 存在常数 $c \geq 0$, 使得

$$\sigma(Q) = \max_i |\lambda_i(Q)| \leq 1 + c\Delta t$$

若 Q 是对称的, 或者存在可逆矩阵 S 使得 Q 相似于一个对称矩阵, 且 S 和 S^{-1} 一致有界, 则上述条件是充要的。

Theorem 6.3.3. 对于包括数值边界处理的二层格式

$$V^{n+1} = QV^n$$

关于最大模 $\|\cdot\|_{\infty,k}$ 稳定的一个充分条件是 $\|Q\|_{\infty,k} \leq 1$ 。

6.3.3 收敛性

Definition 6.3.5 (模收敛性). 对于初边值问题的差分格式

$$V^{n+1,(k)} = QV^{n,(k)} + \Delta t^{(k)} G^{n,(k)}$$

称这个格式是 (无条件) 关于模 $\|\cdot\|_k$ 收敛的: 如果随着 $k \rightarrow \infty$, $\Delta t^{(k)} \rightarrow 0$, $(n+1)\Delta t^{(k)} \rightarrow t^*$, 有

$$\|U^{n+1,(k)} - V^{n+1,(k)}\|_k \rightarrow 0$$

进一步, 称这个格式关于模 $\|\cdot\|_k$ 的收敛阶是 (p, q) : 如果存在不可改善的正数 p, q , 使得下式成立

$$\|U^{n+1,(k)} - V^{n+1,(k)}\|_k = \mathcal{O}((\Delta x^{(k)})^p + (\Delta t^{(k)})^q)$$

6.3.4 Lax 定理

Theorem 6.3.4 (Lax 定理). 对于一个适定的线性偏微分方程初边值问题的二层差分格式

$$V^{n+1,(k)} = QV^{n,(k)} + \Delta t G^{n,(k)}$$

若其关于模 $\|\cdot\|_k$ 相容阶是 (p, q) , 并且它关于模 $\|\cdot\|_k$ 稳定, 那么该格式关于模 $\|\cdot\|_k$ 的收敛阶是 (p, q) 。

6.3.5 一些例子

主要关注一维常系数扩散方程的初边值问题分析。

Dirichlet 边界

考虑如下扩散方程初边值问题，左右均为 Dirichlet 边界

$$\begin{cases} u_t = au_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

在边界直接赋值，得到数值格式（记 $\mu = \frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2}$ ）

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + \mu\delta_x^2 v_j^n, & j = 1, \dots, M_k - 1, n = 0, 1, \dots, \\ v_j^0 = u_0(x_j), & j = 0, \dots, M_k, \\ v_0^{n+1} = v_{M_k}^{n+1} = 0, & n = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (6.1)$$

Example 6.3.1. 当 $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$ 时，数值格式 (6.1) 关于最大模 $\|\cdot\|_\infty$ 稳定 & 收敛。

Proof. 直接放缩可以证明最大模稳定性

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= v_j^n + \mu(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) \\ &= \mu v_{j+1}^n + (1 - 2\mu)v_j^n + \mu v_{j-1}^n \\ |v_j^{n+1}| &\leq \mu|v_{j+1}^n| + (1 - 2\mu)|v_j^n| + \mu|v_{j-1}^n| \leq \|V^n\|_\infty \end{aligned}$$

因此 $\|V^{n+1}\|_\infty \leq \|V^n\|_\infty$ 。

对于数值解 v_j^{n+1} 和精确解 u_j^{n+1} ，满足

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= v_j^n + \mu\delta_x^2 v_j^n, \\ u_j^{n+1} &= u_j^n + \mu\delta_x^2 u_j^n + \Delta t \tau_j^n, \end{aligned}$$

其中局部截断误差为 $\tau_j^n = \mathcal{O}(\Delta t + \Delta x^2)$ 。将两式作差，定义 $z_j^{n+1} = u_j^{n+1} - v_j^{n+1}$

$$\begin{aligned} z_j^{n+1} &= z_j^n + \mu(z_{j+1}^n - 2z_j^n + z_{j-1}^n) + \Delta t \tau_j^n \\ &= \mu z_{j+1}^n + (1 - 2\mu)z_j^n + \mu z_{j-1}^n + \Delta t \tau_j^n \\ |z_j^{n+1}| &\leq \mu|z_{j+1}^n| + (1 - 2\mu)|z_j^n| + \mu|z_{j-1}^n| + \Delta t A(\Delta t + \Delta x^2) \\ &\leq \|Z^n\|_\infty + \Delta t A(\Delta t + \Delta x^2) \end{aligned}$$

因此得证最大模收敛性

$$\begin{aligned} \|Z^{n+1}\|_\infty &\leq \|Z^n\|_\infty + \Delta t A(\Delta t + \Delta x^2) \\ &\leq \dots \leq (n+1)\Delta t A(\Delta t + \Delta x^2) \\ &= t^* A(\Delta t + \Delta x^2) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

精度为 $\mathcal{O}(\Delta t + \Delta x^2)$ 。

□

Neumann、Robin 边界 (整网格)

考虑如下扩散方程初边值问题, 左侧为 Robin 边界, 右侧为 Dirichlet 边界

$$\begin{cases} u_t = au_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, 1], \\ -u_x(0, t) + \sigma u(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(1, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

左侧边界使用单侧差商离散

$$-\frac{v_1^n - v_0^n}{\Delta x} + \sigma v_0^n = 0, \Rightarrow v_0^n = \frac{1}{1 + \sigma \Delta x} v_1^n$$

得到数值格式 (记 $\mu = \frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2}$)

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + \mu \delta_x^2 v_j^n, & j = 1, \dots, M_k - 1, n = 0, 1, \dots, \\ v_j^0 = u_0(x_j), & j = 0, \dots, M_k, \\ v_0^{n+1} = \frac{1}{1 + \sigma \Delta x} v_1^{n+1}, & n = 0, 1, \dots \\ v_{M_k}^{n+1} = 0, & n = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (6.2)$$

Example 6.3.2. 数值格式 (6.2) 在最大模 & L^2 模意义下是稳定的。

Proof. 将格式写作 $V^{n+1} = QV^n$ 的形式 (不含 v_0 和 v_M)

$$\begin{bmatrix} v_1^{n+1} \\ v_2^{n+1} \\ \vdots \\ v_{M-2}^{n+1} \\ v_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2\mu + \frac{\mu}{1 + \sigma \Delta x} & \mu & & & \\ & \mu & 1 - 2\mu & \mu & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \mu & 1 - 2\mu & \mu \\ & & & & \mu & 1 - 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^n \\ v_2^n \\ \vdots \\ v_{M-2}^n \\ v_{M-1}^n \end{bmatrix}$$

稳定性只需要证明无穷范数 $\|Q\|_\infty \leq 1$ 和谱半径 $\sigma(Q) \leq 1$, 对于上述矩阵 Q , 这两个结论显然成立。□

Example 6.3.3. 数值格式 (6.2) 是逐点相容的。

Proof. 对于内部离散, 将精确解 u 代入可得

$$\tau_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = \mathcal{O}(\Delta t + (\Delta x)^2)$$

对于边界离散, 将精确解 u 代入可得

$$\tau_0^n = -\frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x} + \sigma u_0^n = \mathcal{O}(\Delta x)$$

因此逐点相容, 局部截断误差阶是 $(1, 1)$ 。□

Example 6.3.4. 数值格式 (6.2) 是最大模不相容的。

Proof. 将精确解 u 代入格式 (6.2), 产生余项 $\Delta t T^n$

$$\begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{M-2}^{n+1} \\ u_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2\mu + \frac{\mu}{1 + \sigma\Delta x} & \mu & & & \\ & \mu & 1 - 2\mu & \mu & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \mu & 1 - 2\mu & \mu \\ & & & & \mu & 1 - 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{M-2}^n \\ u_{M-1}^n \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ \vdots \\ T_{M-2}^n \\ T_{M-1}^n \end{bmatrix}$$

易知 $T_j^n = \mathcal{O}(\Delta t + \Delta x^2)$, $j = 2, \dots, M-1$, 只需要关注 T_1^n

$$\begin{aligned} \Delta t T_1^n &= u_1^{n+1} - \left(1 - 2\mu + \frac{\mu}{1 + \sigma\Delta x}\right) u_1^n - \mu u_2^n \\ &= \mu \left(u_0^n - \frac{1}{1 + \sigma\Delta x} u_1^n\right) + [u_1^{n+1} - u_1^n - \mu(u_0^n - 2u_1^n + u_2^n)] \\ &= \mu \left(u_0^n - \frac{1}{1 + \sigma\Delta x} u_1^n\right) + \mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta t(\Delta x)^2) \end{aligned}$$

由边界条件可得

$$\begin{aligned} -\frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x} + \sigma u_0^n &= -\frac{\Delta x}{2} (u_{xx})_1^n + \mathcal{O}(\Delta x^2), \\ u_0^n - \frac{u_1^n}{1 + \sigma\Delta x} &= -\frac{\Delta x^2}{2} (u_{xx})_1^n + \mathcal{O}(\Delta x^3). \end{aligned}$$

代入可得

$$\Delta t T_1^n = -\frac{a\Delta t}{2} (u_{xx})_1^n + \mathcal{O}(\Delta t^2 \Delta x) + \mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta t(\Delta x)^2)$$

因此 $T_1^n = \mathcal{O}(1)$, 最大模不相容。 □

左侧边界引入虚拟点 x_{-1} , 满足

$$-\frac{v_1^n - v_{-1}^n}{2\Delta x} + \sigma v_0^n = 0, \quad \Rightarrow \quad v_{-1}^n = v_0^n - 2\sigma\Delta x v_0^n.$$

得到数值格式 (记 $\mu = \frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2}$)

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + \mu\delta_x^2 v_j^n, & j = 1, \dots, M_k - 1, n = 0, 1, \dots, \\ v_j^0 = u_0(x_j), & j = 0, \dots, M_k, \\ v_0^{n+1} = v_0^n + 2\mu(v_1^n - (1 + \sigma\Delta x)v_0^n), & n = 0, 1, \dots, \\ v_{M_k}^{n+1} = 0, & n = 0, 1, \dots, \end{cases} \quad (6.3)$$

还可以采用如下方式离散

$$-\frac{v_1^n - v_{-1}^n}{2\Delta x} + \sigma \frac{v_{-1}^n + v_1^n}{2} = 0, \quad \Rightarrow \quad v_{-1}^n = \frac{1 - \sigma\Delta x}{1 + \sigma\Delta x} v_1^n.$$

得到数值格式 (记 $\mu = \frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2}$)

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + \mu\delta_x^2 v_j^n, & j = 1, \dots, M_k - 1, n = 0, 1, \dots, \\ v_j^0 = u_0(x_j), & j = 0, \dots, M_k, \\ v_0^{n+1} = v_0^n + 2\mu \left(\frac{1}{1 + \sigma\Delta x} v_1^n - v_0^n \right), & n = 0, 1, \dots, \\ v_{M_k}^{n+1} = 0, & n = 0, 1, \dots, \end{cases} \quad (6.4)$$

Example 6.3.5. 数值格式 (6.3)和 (6.4) 是最大模相容的。

Proof. 只验证格式 (6.4)。将格式写作 $V^{n+1} = QV^n$ 的形式 (不含 v_M)

$$\begin{bmatrix} v_0^{n+1} \\ v_1^{n+1} \\ \vdots \\ v_{M-2}^{n+1} \\ v_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2\mu & \frac{2\mu}{1+\sigma\Delta x} & & & \\ & \mu & 1-2\mu & \mu & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \mu & 1-2\mu & \mu \\ & & & & \mu & 1-2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0^n \\ v_1^n \\ \vdots \\ v_{M-2}^n \\ v_{M-1}^n \end{bmatrix}$$

将精确解 u 代入格式, 产生余项 $\Delta t T^n$

$$\begin{bmatrix} u_0^{n+1} \\ u_1^{n+1} \\ \vdots \\ u_{M-2}^{n+1} \\ u_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2\mu & \frac{2\mu}{1+\sigma\Delta x} & & & \\ & \mu & 1-2\mu & \mu & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \mu & 1-2\mu & \mu \\ & & & & \mu & 1-2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0^n \\ u_1^n \\ \vdots \\ u_{M-2}^n \\ u_{M-1}^n \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} T_0^n \\ T_1^n \\ \vdots \\ T_{M-2}^n \\ T_{M-1}^n \end{bmatrix}$$

易知 $T_j^n = \mathcal{O}(\Delta t + \Delta x^2)$, $j = 1, \dots, M-1$, 只需要关注 T_0^n

$$\begin{aligned} \Delta t T_0^n &= u_0^{n+1} - (1-2\mu)u_0^n - \frac{2\mu}{1+\sigma\Delta x}u_1^n \\ &= \mu \left(u_{-1}^n - \frac{1-\sigma\Delta x}{1+\sigma\Delta x}u_1^n \right) + [u_0^{n+1} - u_0^n - \mu(u_{-1}^n - 2u_0^n + u_1^n)] \\ &= \mu \left(u_{-1}^n - \frac{1-\sigma\Delta x}{1+\sigma\Delta x}u_1^n \right) + \mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta t(\Delta x)^2) \end{aligned}$$

由边界条件可得

$$\begin{aligned} -\frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2\Delta x} + \sigma \frac{u_{-1}^n + u_1^n}{2} &= -\frac{\Delta x^2}{6}(u_{xxx})_1^n + \frac{\sigma\Delta x^2}{2}(u_{xx})_1^n + \mathcal{O}(\Delta x^4), \\ u_{-1}^n - \frac{1-\sigma\Delta x}{1+\sigma\Delta x}u_1^n &= -\frac{\Delta x^3}{3}(u_{xxx})_1^n + \sigma\Delta x^3(u_{xx})_1^n + \mathcal{O}(\Delta x^5) \end{aligned}$$

代入可得

$$\Delta t T_0^n = a\Delta t\Delta x \left(-\frac{1}{3}(u_{xxx})_1^n + \sigma(u_{xx})_1^n \right) + \mathcal{O}(\Delta t\Delta x^3) + \mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta t(\Delta x)^2)$$

因此 $T_0^n = \mathcal{O}(\Delta t + \Delta x)$, 格式按最大模相容。 \square

Remark. 如果 $\sigma = 0$, 即边界条件为 $u_x(0, t) = 0$, 可以由方程推出在边界处 $u_{xxx}(0, t) = 0$, 此时 $T_0^n = \mathcal{O}(\Delta t + \Delta x^2)$ 。

Neumann、Robin 边界 (半网格)

考虑如下扩散方程初边值问题, 左侧为 Robin 边界, 右侧为 Dirichlet 边界

$$\begin{cases} u_t = au_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, 1], \\ -u_x(0, t) + \sigma u(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(1, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

和上一节不同的是, 这里对左边界采用半网格离散: $x_0 = \frac{\Delta x}{2}$, $x_1 = \frac{\Delta x}{2}$, 对右边界仍然使用整网格 $x_{M_k} = 1$. 对左侧边界采用如下方式离散

$$-\frac{v_1^n - v_0^n}{\Delta x} + \sigma \frac{v_0^n + v_1^n}{2} = 0. \quad \Rightarrow \quad v_0^n = \frac{1 - \frac{\sigma}{2}\Delta x}{1 + \frac{\sigma}{2}\Delta x} v_1^n$$

得到数值格式 (记 $\mu = \frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2}$)

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + \mu \delta_x^2 v_j^n, & j = 1, \dots, M_k - 1, n = 0, 1, \dots, \\ v_j^0 = u_0(x_j), & j = 0, \dots, M_k, \\ v_0^{n+1} = \frac{1 - \frac{\sigma}{2}\Delta x}{1 + \frac{\sigma}{2}\Delta x} v_1^{n+1}, & n = 0, 1, \dots \\ v_{M_k}^{n+1} = 0, & n = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (6.5)$$

Example 6.3.6. 数值格式 (6.5) 是最大模相容的。

Proof. 将格式写作 $V^{n+1} = QV^n$ 的形式 (不含 v_0 和 v_{M_k})

$$\begin{bmatrix} v_1^{n+1} \\ v_2^{n+1} \\ \vdots \\ v_{M-2}^{n+1} \\ v_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2\mu + \mu \frac{1 - \frac{\sigma}{2}\Delta x}{1 + \frac{\sigma}{2}\Delta x} & \mu & & & \\ & \mu & 1 - 2\mu & \mu & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \mu & 1 - 2\mu & \mu \\ & & & & \mu & 1 - 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^n \\ v_2^n \\ \vdots \\ v_{M-2}^n \\ v_{M-1}^n \end{bmatrix}$$

将精确解 u 代入格式, 产生余项 $\Delta t T^n$

$$\begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{M-2}^{n+1} \\ u_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2\mu + \mu \frac{1 - \frac{\sigma}{2}\Delta x}{1 + \frac{\sigma}{2}\Delta x} & \mu & & & \\ & \mu & 1 - 2\mu & \mu & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \mu & 1 - 2\mu & \mu \\ & & & & \mu & 1 - 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{M-2}^n \\ u_{M-1}^n \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ \vdots \\ T_{M-2}^n \\ T_{M-1}^n \end{bmatrix}$$

易知 $T_j^n = \mathcal{O}(\Delta t + \Delta x^2)$, $j = 2, \dots, M-1$, 只需要关注 T_1^n

$$\begin{aligned} \Delta t T_1^n &= u_1^{n+1} - \left(1 - 2\mu + \mu \frac{1 - \frac{\sigma}{2}\Delta x}{1 + \frac{\sigma}{2}\Delta x}\right) u_2^n - \mu u_1^n \\ &= \mu \left(u_0^n - \frac{1 - \frac{\sigma}{2}\Delta x}{1 + \frac{\sigma}{2}\Delta x} u_1^n\right) + [u_1^{n+1} - u_1^n - \mu(u_0^n - 2u_1^n + u_2^n)] \\ &= \mu \left(u_0^n - \frac{1 - \frac{\sigma}{2}\Delta x}{1 + \frac{\sigma}{2}\Delta x} u_1^n\right) + \mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta t(\Delta x)^2) \end{aligned}$$

由边界条件可得

$$\begin{aligned} -\frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x} + \sigma \frac{u_0^n + u_1^n}{2} &= -\frac{\Delta x^2}{24} (u_{xxx})_1^n + \frac{\sigma \Delta x^2}{8} (u_{xx})_1^n + \mathcal{O}(\Delta x^4) \\ u_0^n - \frac{1 - \frac{\sigma}{2}\Delta x}{1 + \frac{\sigma}{2}\Delta x} u_1^n &= -\frac{\Delta x^3}{24} (u_{xxx})_1^n + \frac{\sigma \Delta x^3}{8} (u_{xx})_1^n + \mathcal{O}(\Delta x^5) \end{aligned}$$

代入可得

$$\Delta t T_1^n = a\Delta t \Delta x \left(-\frac{1}{24} (u_{xxx})_1^n + \frac{\sigma}{8} (u_{xx})_1^n\right) + \mathcal{O}(\Delta t \Delta x^3) + \mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta t(\Delta x)^2)$$

因此 $T_1^n = \mathcal{O}(\Delta t + \Delta x)$, 格式按最大模相容。 □

6.3.6 能量稳定性

对流方程

考虑对流方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t = u_x, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, 1], \\ u(1, t) = g(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

易知 PDE 具有如下性质

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 = (u, u_t) + (u_t, u) = (u, u_x) + (u_x, u) = |u|^2|_0^1 = |g(t)|^2 - |u(0, t)|^2$$

Example 6.3.7. 分析如下半离散格式的能量稳定性

$$\begin{cases} \frac{dv_j}{dt} = D_+ v_j, & j = 0, \dots, M-1, \\ v_j(0) = f_j, & j = 0, \dots, M, \\ v_M(t) = g(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

Solution.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|v\|_{0, N-1}^2 &= \left(v, \frac{dv}{dt} \right)_{0, N-1} + \left(\frac{dv}{dt}, v \right)_{0, N-1} \\ &= (v, D_+ v)_{0, N-1} + (D_+ v, v)_{0, N-1} \\ &\stackrel{(*)}{=} -h \|D_+ v\|_{0, N-1}^2 + |v_N(t)|^2 - |v_0(t)|^2 \leq |g(t)|^2 \end{aligned}$$

其中的 (*) 利用了如下恒等式, 相当于离散版本的“分部积分”

$$(u, D_+ v)_{r, s} + (D_+ u, v)_{r, s} = -h(D_+ u, D_+ v)_{r, s} + \bar{u}_j v_j|_r^{s+1}.$$

Example 6.3.8. 分析如下 FTFS 格式的能量稳定性

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + \Delta t D_+ v_j, & j = 0, \dots, M-1, \\ v_j^0 = f_j, & j = 0, \dots, M, \\ v_M^n = g^n, & n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Solution.

$$\begin{aligned} \|v^{n+1}\|_{0, N-1}^2 &= \|(I + \Delta t D_+) v^n\|_{0, N-1}^2 \\ &= \|v^n\|_{0, N-1}^2 + \Delta t^2 \|D_+ v^n\|_{0, N-1}^2 + \Delta t \left[(v^n, D_+ v^n)_{0, N-1} + (D_+ v^n, v^n)_{0, N-1} \right] \\ &= \|v^n\|_{0, N-1}^2 + \Delta t^2 \|D_+ v^n\|_{0, N-1}^2 + \Delta t (-h \|D_+ v^n\|_{0, N-1}^2 + |v_N^n|^2 - |v_0^n|^2) \end{aligned}$$

当 $\Delta t \leq h$ 时, 有

$$\|v^{n+1}\|_{0, N-1}^2 \leq \|v^n\|_{0, N-1}^2 + \Delta t |v_N^n|^2 \leq \dots \leq \|v^0\|_{0, N-1}^2 + \Delta t \sum_{\ell=0}^n |g^\ell|^2$$

抛物型方程 (Dirichlet 边界)

考虑抛物方程初边值问题 (Dirichlet 边界)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

易知 PDE 具有如下性质

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 = (u, u_t) + (u_t, u) = (u, u_{xx}) + (u_{xx}, u) = -2\|u_x\|^2 + (\bar{u}u_x + \bar{u}_x u)|_0^1 = -2\|u_x\|^2 \leq 0$$

Example 6.3.9. 分析如下半离散格式的能量稳定性

$$\begin{cases} \frac{dv_j}{dt} = D_+ D_- v_j, & j = 0, \dots, M-1, \\ v_j(0) = f_j, & j = 0, \dots, M, \\ v_0(t) = v_M(t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Solution.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{1, N-1}^2 &= (v, D_+ D_- v)_{1, N-1} \\ &\stackrel{(*)}{=} -\|D_- v\|_{2, N}^2 + v_j D_- v_j|_1^N \\ &= -\|D_- v\|_{1, N}^2 + h(D_- v_1)^2 + v_N D_- v_N - v_1 D_- v_1 \\ &= -\|D_- v\|_{1, N}^2 \leq 0 \end{aligned}$$

其中的 (*) 利用了如下恒等式

$$(v, D_+ w)_{r, s} + (D_- v, w)_{r+1, s+1} = \bar{v}_j w_j|_r^{s+1}.$$

取 $v = D_- v$ 代入可得

$$(v, D_+ D_- v)_{r, s} + \|D_- v\|_{r+1, s+1}^2 = \bar{v}_j D_- v_j|_r^{s+1}.$$

Lemma 6.3.5.

$$\|D_+ y\|_{1, N-1}^2 \leq \frac{4}{h^2} \|y\|_{1, N}^2$$

Proof.

$$\|D_+ y\|_{1, N-1}^2 = \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^{N-1} |y_{j+1} - y_j|^2 h \leq \frac{2}{h^2} \sum_{j=1}^{N-1} (|y_{j+1}|^2 + |y_j|^2) h \leq \frac{4}{h^2} \|y\|_{1, N}^2 \quad \square$$

Example 6.3.10. 分析如下 FTCS 格式的能量稳定性

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + \Delta t D_+ D_- v_j, & j = 0, \dots, M-1, \\ v_j^0 = f_j, & j = 0, \dots, M, \\ v_0^n = v_M^n = 0. & n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Solution.

$$\begin{aligned}\|v^{n+1}\|_{1,N-1}^2 &= \|(I + \Delta t D_+ D_-)v^n\|_{1,N-1}^2 \\ &= \|v^n\|_{1,N-1}^2 + \Delta t^2 \|D_+ D_- v^n\|_{1,N-1}^2 + 2\Delta t (v^n, D_+ D_- v^n)_{1,N-1} \\ &= \|v^n\|_{1,N-1}^2 + \Delta t^2 \|D_+ D_- v^n\|_{1,N-1}^2 - 2\Delta t \|D_- v^n\|_{1,N}^2\end{aligned}$$

根据引理 6.3.5 有如下不等式成立

$$\|D_+ D_- v^n\|_{1,N-1}^2 \leq \frac{4}{h^2} \|D_- v^n\|_{1,N}^2$$

代入可得

$$\|v^{n+1}\|_{1,N-1}^2 \leq \|v^n\|_{1,N-1}^2 - 2\Delta t \left(1 - \frac{2\Delta t}{h^2}\right) \|D_- v^n\|_{1,N}^2$$

因此在 $\Delta t \leq \frac{1}{2}h^2$ 时

$$\|v^{n+1}\|_{1,N-1}^2 \leq \|v^n\|_{1,N-1}^2$$

抛物型方程 (Rubin 边界) (半网格)

Lemma 6.3.6. 对于 $f \in C^1([0, 1])$

$$\|f\|_{\infty}^2 \leq \varepsilon \|f_x\|^2 + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \|f\|^2, \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

Lemma 6.3.7.

$$\max_{0 \leq j \leq N} |f_j|^2 \leq \varepsilon \|D_- f\|_{1,N}^2 + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \|f\|_{0,N}^2, \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

考虑抛物方程初边值问题 (Rubin 边界)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, 1], \\ u_x(0, t) + r_0 u(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ u_x(1, t) + r_1 u(1, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

易知 PDE 具有如下性质

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \|u\|^2 &= (u, u_t) + (u_t, u) = (u, u_{xx}) + (u_{xx}, u) \\ &= -2\|u_x\|^2 + (\bar{u}u_x + \bar{u}_x u)|_0^1 \\ &\leq -2\|u_x\|^2 + 2(|r_0| + |r_1|)\|u\|_{\infty}^2, \quad (\varepsilon := \frac{1}{2(|r_0| + |r_1|)}) \\ &\stackrel{(*)}{\leq} -2\|u_x\|^2 + \|u_x\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)\|u\|^2 \\ &= -\|u_x\|^2 + 2(|r_0| + |r_1|)(2(|r_0| + |r_1|) + 1)\|u\|^2\end{aligned}$$

其中 (*) 利用了引理 6.3.6。

对于空间离散采用半网格: $x_0 = -\Delta x/2$, $x_1 = \Delta x/2$, $x_{N-1} = 1 - \Delta x/2$, $x_N = 1 + \Delta x/2$ 。

Example 6.3.11. 分析如下半离散格式的能量稳定性

$$\begin{cases} \frac{dv_j}{dt} = D_+ D_- v_j, & j = 0, \dots, M-1, \\ v_j(0) = f_j, & j = 0, \dots, M, \\ D_+ v_0(t) + \frac{1}{2} r_0 (v_0(t) + v_1(t)) = 0, & t \geq 0, \\ D_- v_N(t) + \frac{1}{2} r_1 (v_{N-1}(t) + v_N(t)) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Solution.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{1,N-1}^2 &= (v, D_+ D_- v)_{1,N-1} \\ &= - \|D_- v\|_{2,N}^2 + v_j D_- v_j \Big|_1^N \\ &= - \|D_- v\|_{2,N}^2 - \frac{1}{2} r_1 v_N (v_{N-1} + v_N) + \frac{1}{2} r_0 v_1 (v_0 + v_1) \end{aligned}$$

注意到当 h 足够小时, 有

$$|v_0| \leq \text{constant} |v_1|, \quad |v_N| \leq \text{constant} |v_{N-1}|.$$

利用引理 6.3.7 可得

$$\begin{aligned} v_0 v_1 &\leq \text{constant} |v_1|^2 \leq \varepsilon \|D_- v\|_{2,N}^2 + C(\varepsilon) \|v\|_{1,N}^2, \\ v_{N-1} v_N &\leq \text{constant} |v_{N-1}|^2 \leq \varepsilon \|D_- v\|_{2,N}^2 + C(\varepsilon) \|v\|_{1,N}^2. \end{aligned}$$

注意到 $\|v\|_{1,N}^2 \leq \text{constant} \|v\|_{1,N-1}^2$, 因此可以取足够小的 ε , 使得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{1,N-1}^2 \leq \text{constant} \|v\|_{1,N-1}^2$$

6.4 二维扩散方程的边界处理

关注二维常系数扩散方程的边界处理, 只考虑直边界的情形, 例如计算区域为 $[0, 1]^2$ 。

FTCS 的边界处理

与一维的边界处理类似, 例如

1. Dirichlet B.C. 直接赋值即可
2. Nuemann B.C.
 - (a) 一阶近似, 采用单侧差商来近似导数
 - (b) 二阶近似, 引入虚拟点, 或考虑半网格

过渡层的边界处理

ADI 方法等引入了中间过渡层, 过渡层的计算需要特殊的边界处理, 考虑竖直边界 $x = 0$ 或 $x = 1$, 边界条件为 $u = g(t)$ 。

1. 对于 ADI 方法的 PR 格式: 如果用 $t^{n+1/2}$ 的边界条件赋值会掉阶, 中间层只是算子分裂计算所产生的, 并不是真正对应 $t^{n+1/2}$ 时间层。可以利用格式相加得到更合适的边界条件

$$\begin{aligned} 2v_{i,j}^{n+1/2} &= \left(1 + \frac{1}{2}b\mu_y\delta_y^2\right)v_{j,k}^n + \left(1 - \frac{1}{2}b\mu_y\delta_y^2\right)v_{j,k}^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}b\mu_y\delta_y^2\right)g_{j,k}^n + \left(1 - \frac{1}{2}b\mu_y\delta_y^2\right)g_{j,k}^{n+1} \end{aligned}$$

2. 对于 D'Yakonov 格式: 如果用 $t^{n+1/2}$ 的边界条件赋值会掉阶, 可以利用格式得到

$$v_{j,k}^* = \left(1 - \frac{1}{2}b\mu_y\delta_y^2\right)v_{j,k}^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2}b\mu_y\delta_y^2\right)g_{j,k}^{n+1}$$

第七章 模型方程：一维非线性双曲守恒律方程

7.1 预备知识

只考虑一维标量情形下的双曲守恒律方程

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad (7.1)$$

考虑纯初值问题或者具有周期边界条件的初边值问题，其中未知函数 $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ，以及已知的（连续可微的）流通量函数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 。

Example 7.1.1.

- 取 $f(u) = au$ ，其中 $a \in \mathbb{R}$ 为常数，就可以得到最简单的常系数线性对流方程

$$u_t + au_x = 0$$

- 取 $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ ，就可以得到最简单的非线性守恒律方程——Burgers 方程

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$$

对于双曲守恒律方程，记 $f'(u) = a(u)$ ，可以得到两种形式

- 守恒形式 $u_t + f(u)_x = 0$
- 非守恒形式 $u_t + a(u)u_x = 0$

这两种形式在方程层面是等价的，但是从两种形式出发设计的差分格式并不等价，具有不同的性质和求解效果。

对于双曲守恒律方程，有一类特殊的问题称为 Riemann 问题：

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_L & x < 0 \\ u_R & x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (7.2)$$

即 $u(x, t)$ 在 $x = 0$ 的左右两侧分别有不同的常数初值 $u_L \neq u_R$ 。对于 Riemann 问题， u_L 和 u_R 的大小关系会决定解的结构。

7.2 特征线

双曲型方程具有特征线的性质，例如

- **常系数线性对流方程：** $u_t + au_x = 0$ ，特征线方程为

$$\frac{dx}{dt} = a,$$

特征线为一族平行直线，斜率由 a 决定。

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_x \frac{dx}{dt} + u_t = au_x + u_t = 0$$

因此解 $u(x(t), t)$ 的值沿着特征线不变。

- **变系数线性对流方程：** $u_t + a(x, t)u_x = 0$ ，其中 $a(x, t)$ 为已知的连续函数，特征线方程为

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t)$$

特征线为一族互不相交的曲线。

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_x \frac{dx}{dt} + u_t = a(x, t)u_x + u_t = 0$$

因此解 $u(x(t), t)$ 的值沿着特征线不变。

- **双曲守恒律方程：** $u_t + f(u)_x = 0$ ，特征线方程为

$$\frac{dx}{dt} = f'(u)$$

特征线为一族可能相交的直线，直线的斜率可以由初值确定。

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_x \frac{dx}{dt} + u_t = f'(u)u_x + u_t = 0$$

因此解 $u(x(t), t)$ 的值沿着特征线不变。

特征线的性质可以被用来进行精确求解，或者用于设计数值格式等。

双曲守恒律的特征线的斜率由初值确定，特征线可能在某些位置出现相交或者发散，这导致解随着时间演化会产生各种复杂的结构。对于具体的 Burgers 方程有如下结论：

Theorem 7.2.1. 对于 Burgers 方程，假设给定光滑的初值 $u_0(x)$ ，满足 $\min u'_0(x) < 0$ ，那么在有限时间之后会出现特征线相交，解在特征线相交位置会产生无穷斜率（间断，激波）。临界时刻 T_b 为

$$T_b = \frac{-1}{\min u'_0(x)}$$

Proof. 首先证明在 T_b 时刻特征线首次相交：从 $(\xi, 0)$ 发出的特征线记作 $l_\xi : x = \xi + u_0(\xi)t$ ，定义集合 Ω

$$\Omega = \{(\xi, \eta) \mid (\xi - \eta)(u_0(\xi) - u_0(\eta)) < 0\}$$

由于存在某些点的导数 $u'_0(x) < 0$ ，可以保证集合 Ω 非空。在集合 Ω 上定义二元函数 $T(\xi, \eta)$ 为直线 l_ξ 和 l_η 的相交时刻，并对相交时刻取极小值

$$\begin{aligned} x &= \xi + u_0(\xi)T(\xi, \eta) = \eta + u_0(\eta)T(\xi, \eta) \\ T(\xi, \eta) &= \frac{-1}{\left(\frac{u_0(\xi) - u_0(\eta)}{\xi - \eta}\right)} > 0, \forall (\xi, \eta) \in \Omega \\ \inf_{(\xi, \eta) \in \Omega} T(\xi, \eta) &= \frac{-1}{\inf\left(\frac{u_0(\xi) - u_0(\eta)}{\xi - \eta}\right)} = \frac{-1}{\min_x u'_0(x)} = T_b \end{aligned}$$

然后证明在 T_b 时刻会出现无穷斜率：设 (x, t) 位于从 $(\xi, 0)$ 发出的特征线 l_ξ 上，那么

$$\begin{cases} x = \xi + u_0(\xi)t \\ u(x, t) = u_0(\xi) \end{cases}$$

其中 $\xi = \xi(x, t)$ 由 (x, t) 隐式确定。对上式关于 x 求导得到

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial \xi}{\partial x} + u'_0(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} t \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= u'_0(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} \end{aligned}$$

消去 $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ 得到解 $u(x, t)$ 在 t 时刻在 x 处的斜率

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{u'_0(\xi)}{1 + u'_0(\xi)t}$$

假设 $u'_0(\xi) = \min_x u'_0(x)$ ，那么在 $t \rightarrow T_b^-$ 时，在 x 处的斜率便会趋于无穷，解产生间断，并且间断出现的位置与特征线首次相交的位置一致

$$\left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right| = \left| \frac{u'_0(\xi)}{1 + u'_0(\xi)t} \right| \rightarrow \infty, \quad \text{as } t \rightarrow T_b^- \quad \square$$

7.3 弱解、黏性解和熵解

7.3.1 弱解

对于双曲守恒律方程

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (7.3)$$

即使初值足够光滑，解也可能随着时间演化产生间断等复杂结构，在间断位置显然不连续、不可导，此时无法找到满足要求的解（经典解，古典解），或者说在经典解的范围内解不存在，需要扩大解的范围。

Definition 7.3.1 (弱解定义之一). 称函数 $u(x, t) \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty); \mathbb{R})$ 为双曲守恒律方程 (7.3) 的弱解，如果对于任意函数 $\varphi(x, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ ，都有下式成立

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u(x, 0)\varphi(x, 0) dx = 0$$

Definition 7.3.2 (弱解定义之二). 称函数 $u(x, t) \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty); \mathbb{R})$ 为双曲守恒律方程 (7.3) 的弱解，如果对于任意有界区域 $[x_L, x_R] \times [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ ，都有下式成立

$$\int_{x_L}^{x_R} u(x, t_1) dx - \int_{x_L}^{x_R} u(x, t_0) dx = \int_{t_0}^{t_1} f(u(x_L, t)) dt - \int_{t_0}^{t_1} f(u(x_R, t)) dt$$

Remark. 可以证明对于弱解的两种定义是等价的。弱解是比较经典解更大的概念，因为弱解对于函数的光滑性没有要求。如果方程有一个经典解 $u \in C_0^1(\mathbb{R} \times (0, +\infty); \mathbb{R})$ ，那么使用分部积分就可以证明它也是弱解。

Example 7.3.1. 取 $f(u) = au$, 其中 a 为常数。对于方程 $u_t + au_x = 0$ 和任意初值 $u_0(x)$, 只有在 $u_0(x)$ 具有足够光滑性时, 函数 $u(x, t) = u_0(x - at)$ 才是原方程的经典解。但是只要 $u_0(x)$ 具有可积性, 函数 $u(x, t) = u_0(x - at)$ 始终是原方程的弱解。

下面关注由分片经典解组成的函数, 它可能在拼接位置没有足够的光滑性, 从而不是经典解, 但是只需要在分界面上满足体现局部守恒性的 Rankine-Hugoniot 条件, 就仍然是满足定义的弱解。

Theorem 7.3.1 (Rankine-Hugoniot jump condition). 考虑一个时空区域 $\Omega \subset \mathbb{R} \times (0, +\infty)$, 假设 Ω 被一个光滑的时空曲线 Γ 划分为两个部分: Ω_1, Ω_2 , 假设 $u_l(x, t), u_r(x, t)$ 分别是守恒律方程 $u_t + f(u)_x = 0$ 在区域 Ω_1, Ω_2 的经典解, 考虑定义在整个区域 Ω 上的函数

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l(x, t), & (x, t) \in \Omega_1 \\ u_r(x, t), & (x, t) \in \Omega_2 \end{cases}$$

那么 u 是弱解等价于在时空曲线 Γ 上逐点成立

$$[f(u_l(x)) - f(u_r(x))]n_x + [u_l(x) - u_r(x)]n_t = 0, \quad \forall (x, t) \in \Gamma \cap \Omega$$

其中 $\mathbf{n} = (n_x, n_t)$ 是曲线 Γ 在 x 处的单位法向量。

Proof. 任取测试函数 $\varphi(x, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R})$, 由于 u 在 Ω_i 内部是连续可微的经典解, 逐点成立 $u_t + f(u)_x = 0$, 可以使用分部积分得到下式

$$\int_{\Omega_i} [u\varphi_t + f(u)\varphi_x] dx dt = - \int_{\Omega_i} [u_t\varphi + f(u)_x\varphi] dx dt + \int_{\partial\Omega_i} [n_x f(u) + n_t u] \varphi ds$$

对于整个区域 Ω 有

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [u \cdot \varphi_t + f(u) \cdot \varphi_x] dx dt \\ &= \sum_{i=1}^2 \left\{ - \int_{\Omega_i} [u_t \cdot \varphi + f(u)_x \cdot \varphi] dx dt + \int_{\partial\Omega_i} [n_x f(u) + n_t u] \cdot \varphi ds \right\} \\ &= 0 - \int_{\mathbb{R}} u(x, 0)\varphi(x, 0) dx + \int_{\Gamma} [n_x f(u_l) + n_t u_l] \cdot \varphi ds - \int_{\Gamma} [n_x f(u_r) + n_t u_r] \cdot \varphi ds \end{aligned}$$

这里 $-\int_{\mathbb{R}} u(x, 0)\varphi(x, 0) dx$ 是在 $x - t$ 上半平面的下边界 (即实轴上) 进行的边界积分得到的, 此时 $n_x f(u) + n_t u = -u$; $\mathbf{n} = (n_x, n_t)$ 是时空曲线 Γ 在 x 处的单位法向量 (从 Ω_1 指向 Ω_2)。由 φ 的任意性可知, u 是弱解等价于在时空曲线 Γ 上逐点成立

$$[f(u_l(x)) - f(u_r(x))]n_x + [u_l(x) - u_r(x)]n_t = 0, \quad \forall x \in \Gamma \cap \Omega \quad (7.4)$$

□

在定理 7.3.1 的条件下, 考虑一个更具体的情况: 一条连续可微的时空曲线 $\Gamma: x = x(t), t \geq 0$ 将整个 $x - t$ 上半平面划分为左右两个区域:

$$\Omega_1 = \{(x, t) \mid x < x(t), t \geq 0\}, \Omega_2 = \{(x, t) \mid x > x(t), t \geq 0\}.$$

这两个时空区域在任意固定时刻的切片就是实轴的两个无界区间 $\Omega_1(t) = (-\infty, x(t))$ 和 $\Omega_2(t) = (x(t), +\infty)$, 分界点为 $x = x(t)$ 。单位法向量可以取作

$$\mathbf{n} = (n_x, n_t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (x'(t))^2}}(1, -x'(t))$$

此时定理 7.3.1 中的条件即

$$[f(u_l(x)) - f(u_r(x))] - [u_l(x) - u_r(x)]x'(t) = 0, \quad \forall (x, t) \in \Gamma \cap \Omega \quad (7.5)$$

如果记分界点的移动速度为 $s = x'(t)$, 就可以得到 RH 跳跃条件最常见的形式

$$f(u_l) - f(u_r) = s(u_l - u_r).$$

在下文中将会用 Burgers 方程的 Riemann 问题说明：从经典解到弱解虽然扩大了解的范围，但是弱解可能是不唯一的。由于问题具有实际物理背景，必然存在唯一的解与实际物理现象对应。有一些方法可以在弱解范围内进一步筛选出唯一的合理的解，例如黏性解和熵解。

7.3.2 黏性解 *

考虑在原始的方程中加上黏性项，我们关注黏性消失后得到的极限情况，这种做法契合守恒律问题的实际物理背景。

Definition 7.3.3. 记 $u^\varepsilon(x, t)$ 为如下方程的解

$$u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon, \quad (\varepsilon > 0)$$

如果存在极限函数 $u(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u^\varepsilon(x, t)$, 就称其为双曲守恒律方程的黏性解。

加黏性得到的解通常具有很好的光滑性，但是随着黏性的消失，仍然可以使其收敛到存在间断的弱解。

7.3.3 熵解 *

Definition 7.3.4 (熵函数和熵通量). 称函数 $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为熵函数，如果满足： $\eta \in C^2(\mathbb{R})$ ，并且 $\eta'' \geq 0$ 。称函数 $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为对应的熵通量，如果满足：

$$\xi'(u) = \eta'(u)f'(u)$$

此时称 (η, ξ) 为一个熵对。

Example 7.3.2. 考虑 Burgers 方程，例如取熵函数 $\eta(u) = \frac{1}{2}u^2$ 和熵通量 $\xi(u) = \frac{1}{3}u^3$ ，就满足熵对的所有要求。再例如取熵函数

$$\eta(u) = \frac{1}{2p}u^{2p} + \frac{\alpha}{2}u^2, \quad (p \in \mathbb{N}, p \geq 2, \alpha > 0)$$

计算可得 $\eta''(u) = (2p-1)u^{2p-2} + \alpha > 0$ ，代入计算可得

$$\xi(u) = \frac{1}{2p+1}u^{2p+1} + \frac{\alpha}{3}u^3$$

任取参数 p, α 就可以构造一组熵对 (η, ξ) 。

Definition 7.3.5. 称方程 $u_t + f(u)_x = 0$ 的弱解 $u(x, t)$ 是熵解，如果满足：对于所有的熵对 (η, ξ) ，都有如下不等式在弱形式下成立

$$\eta(u)_t + \xi(u)_x \leq 0.$$

更具体来说，对于所有的非负测试函数 $\varphi(x, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ ，下式成立

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (\eta(u)\varphi_t + \xi(u)\varphi_x) dx dt \leq - \int_{\mathbb{R}} \eta(u(x, 0))\varphi(x, 0) dx$$

显然根据定义，熵解一定是弱解，还需要说明的是：经典解如果存在，一定也是熵解。假设方程有经典解 $u(x, t)$ ，那么直接对方程乘以 $\eta'(u)$ 可以得到

$$\begin{aligned} \eta'(u)u_t + \eta(u)'f'(u)u_x &= 0 \\ \eta(u)_t + \xi(u)_x &= 0 \end{aligned}$$

因此，经典解 \subset 熵解 \subset 弱解是三个逐渐扩大的概念，关系如图 7.1。在下一节中会给出例子说明它们是严格包含的，即：存在不是经典解的熵解，存在不是熵解的弱解。虽然经典解不能保证存在性，弱解不能保证唯一性，但是介于它们中间的熵解却具有存在唯一性。

Theorem 7.3.2. 标量双曲守恒律方程的熵解存在且唯一。

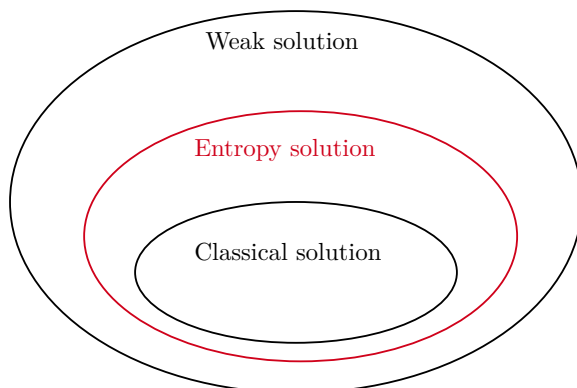


图 7.1: 经典解、熵解和弱解的关系

和弱解类似，熵解的定义不易验证，我们仍然关注由分片经典解组成的函数：它是弱解当且仅当在分界面上满足的条件为 Rankine-Hugoniot 条件；它是熵解也需要在分界面上满足一定的条件，对应的条件称为熵条件。

Theorem 7.3.3 (Oleinik). 考虑定义在区域 Ω 上的由分片经典解组成的函数

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l(x, t), & (x, t) \in \Omega_1 = \{(x, t) \mid x < x(t), t \geq 0\} \\ u_r(x, t), & (x, t) \in \Omega_2 = \{(x, t) \mid x > x(t), t \geq 0\} \end{cases}$$

其中 $\Gamma : x = x(t)$ 是一条连续可微的时空曲线, $u_l(x, t), u_r(x, t)$ 分别是区域 Ω_1, Ω_2 中的经典解。 $u(x, t)$ 满足 RH 条件 (7.5), 从而是弱解。如果 $u(x, t)$ 和分界面速度 $s = x'(t)$ 满足如下的 Oleinik 熵条件

$$\frac{f(u_l) - f(v)}{u_l - v} \geq s \geq \frac{f(u_r) - f(v)}{u_r - v}, \quad v \in [\min(u_l, u_r), \max(u_l, u_r)]$$

则 $u(x, t)$ 是熵解。

如果 $f(u)$ 是凸可微的, 那么上述要求可以化简为 Osher 熵条件

$$f'(u_l) \geq s \geq f'(u_r).$$

由于 $f'(u)$ 具有明确的意义——传播速度, 特征线的斜率, 可以进一步解释这个熵条件: 只有两侧特征线向分界面汇聚的间断解才是熵解。

7.3.4 一些例子

下面考虑一些简单例子, 关注 $f(u)$ 是严格凸可微函数的情况, $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ 对应的 Burgers 方程为其中的典型代表。

考虑光滑初值 $u_0(x) = \sin(x)$ 的 Burgers 方程, 由特征线可知, 解在形态上会从 $x = \pi$ 的两侧向中间汇聚, 随着时间演化, 最终会在 $x = \pi$ 位置出现间断, 如图 7.2。

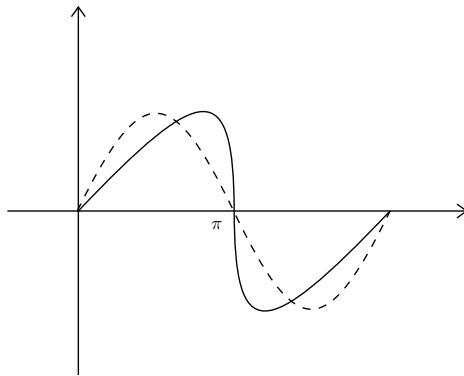


图 7.2: Burgers 方程使用初值 $u_0(x) = \sin(x)$, 随着时间演化, 解会在 $x = \pi$ 位置出现间断

考虑间断初值的黎曼问题: 在两侧初始条件为常数值, 并且 $u_L \neq u_R$

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_L & x < 0 \\ u_R & x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (7.6)$$

首先考虑如下形式的解：分界面以速度 s 移动，分界面两侧保持常值

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < st \\ u_R, & x > st \end{cases} \quad (7.7)$$

如果分界面的移动速度 s 满足 R-H 跳跃条件

$$f(u_L) - f(u_R) = s(u_L - u_R), \quad \Rightarrow \quad s = \frac{f(u_L) - f(u_R)}{u_L - u_R}$$

那么这个解就是弱解。Osher 熵条件还要求

$$f'(u_L) \geq s \geq f'(u_R),$$

代入可得

$$f'(u_L) \geq s = \frac{f(u_L) - f(u_R)}{u_L - u_R} \geq f'(u_R),$$

注意到 $f'(u)$ 是单减的，因此上式成立的条件为 $u_L > u_R$ ，此时的解 (7.7) 是熵解，称为激波。在 $u_L < u_R$ 时，解 (7.7) 是一个不是熵解的弱解。对于 $u_L < u_R$ 的情况，考虑如下形式的解

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < f'(u_L)t \\ (f')^{-1}(\frac{x}{t}), & f'(u_L)t \leq x \leq f'(u_R)t \\ u_R, & x > f'(u_R)t \end{cases} \quad (7.8)$$

这里存在一个逐渐扩大的过渡区域 $[f'(u_L)t, f'(u_R)t]$ (此时有 $f'(u_L) < f'(u_R)$)，通过过渡区域的连续曲线将两侧的常值解连接起来，解 (7.8) 称为稀疏波。对于 Burgers 方程，这几种解的情况如图 7.3 所示。

7.4 数值格式

对于双曲守恒律问题的求解目标是设计高精度高分辨率的数值格式：

- 数值解希望收敛到熵解，至少是弱解；
- 在真解相对光滑区域，保持高精度和高计算效率；
- 在真解间断的区域，要捕获到间断界面和刻画激波速度，并抑制间断界面附近的数值振荡。

直接对守恒律方程（守恒形式或非守恒形式）进行离散，对非线性部分进行冻结系数等近似处理，就可以得到很多格式，例如 Roe 迎风格式，Lax 格式，Lax-Wendroff 格式等。

7.4.1 数值格式示例（一）

Example 7.4.1. 构造迎风格式

1. 基于守恒形式 $u_t + f(u)_x = 0$

$$v_j^{n+1} = \begin{cases} v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(v_j^n) - f(v_{j-1}^n)), & f'(v_j^n) > 0 \\ v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(v_{j+1}^n) - f(v_j^n)), & f'(v_j^n) \leq 0 \end{cases}$$

2. 基于非守恒形式 $u_t + a(u)u_x = 0$

$$v_j^{n+1} = \begin{cases} v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} a(v_j^n) (v_j^n - v_{j-1}^n), & a(v_j^n) > 0 \\ v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} a(v_j^n) (v_{j+1}^n - v_j^n), & a(v_j^n) \leq 0 \end{cases}$$

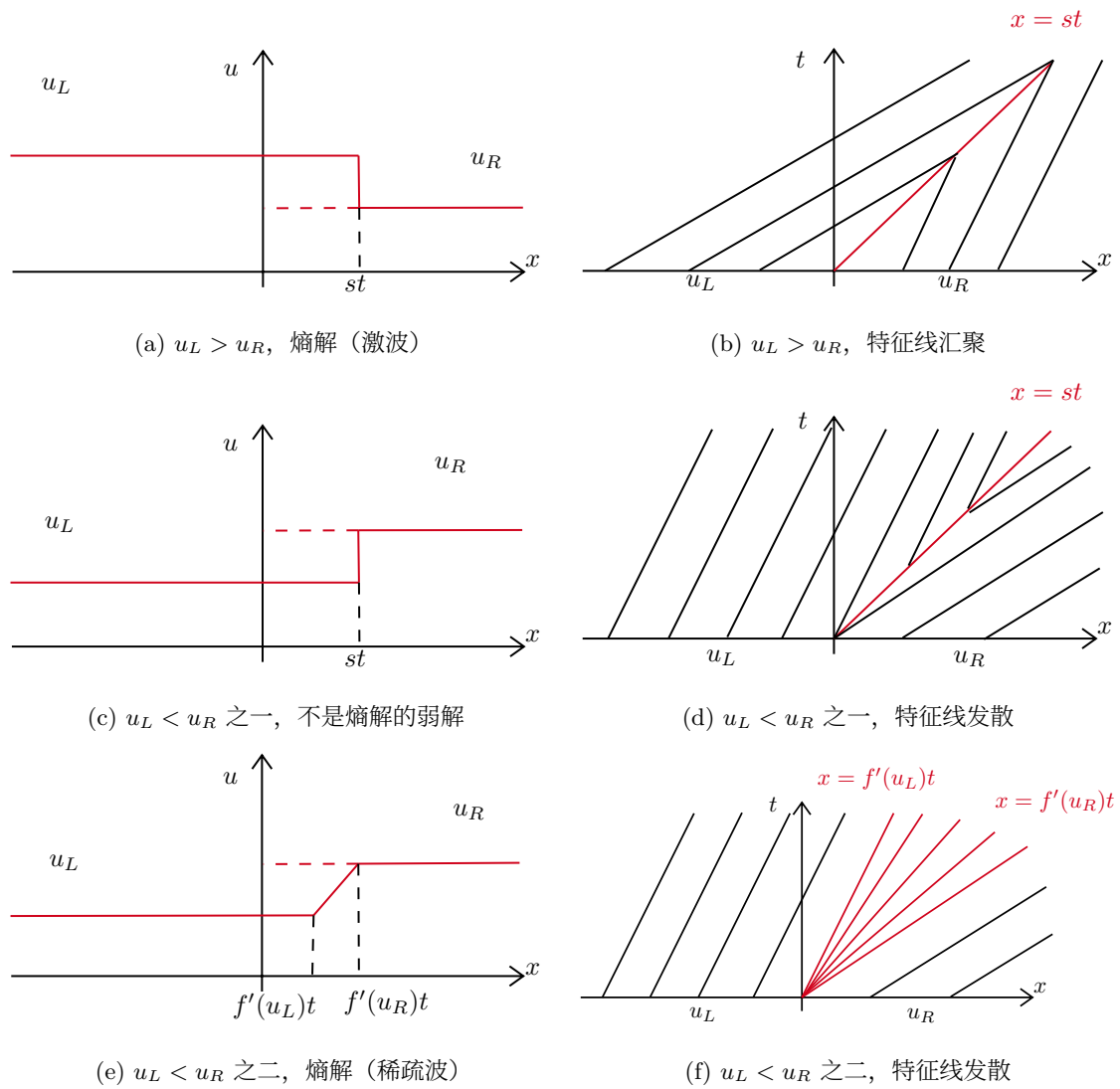


图 7.3: Burgers 方程黎曼问题的三个例子, 对于 Burgers 方程, 具体有 $s = \frac{f(u_L) - f(u_R)}{u_L - u_R} = \frac{1}{2}(u_L + u_R)$, $(f')^{-1}(x/t) = x/t$ 。

Example 7.4.2. 构造 Lax 格式1. 基于守恒形式 $u_t + f(u)_x = 0$

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{2}(v_{j-1}^n + v_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(v_{j+1}^n) - f(v_{j-1}^n))$$

2. 基于非守恒形式 $u_t + a(u)u_x = 0$

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{2}(v_{j-1}^n + v_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} a(v_j^n) (v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$$

Example 7.4.3. 构造 LW 格式1. 基于守恒形式 $u_t + f(u)_x = 0$, 记 $A_{j+1/2}^n = f'(\frac{1}{2}(v_j^n + v_{j+1}^n))$

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} = & v_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(v_{j+1}^n) - f(v_{j-1}^n)) \\ & + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} \{ A_{j+1/2}^n [f(v_{j+1}^n) - f(v_j^n)] - A_{j-1/2}^n [f(v_j^n) - f(v_{j-1}^n)] \} \end{aligned}$$

2. 基于非守恒形式 $u_t + a(u)u_x = 0$

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} = & v_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} a(v_j^n) (v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) \\ & + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} \left\{ a(v_j^n)^2 (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) + \frac{1}{2} a(v_j^n) a'(v_j^n) (v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)^2 \right\} \end{aligned}$$

Example 7.4.4. 基于守恒形式 $u_t + f(u)_x = 0$, 构造 Roe 迎风格式

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \{ (1 + \text{sgn}(a_{j-1/2}^n))(f(v_j^n) - f(v_{j-1}^n)) + (1 - \text{sgn}(a_{j+1/2}^n))(f(v_{j+1}^n) - f(v_j^n)) \}$$

其中 $a_{j+1/2}^n$ 是 Roe 平均, 满足如下等式

$$f(v_{j+1}^n) - f(v_j^n) = a_{j+1/2}^n (v_{j+1}^n - v_j^n)$$

Example 7.4.5 (Lax-Friedrichs). 基于守恒形式 $u_t + f(u)_x = 0$, 利用流通分裂技术将其拆分为

$$u_t + f^+(u)_x + f^-(u)_x = 0, \quad f^\pm(u) = \frac{1}{2}(f(u) \pm \alpha u).$$

其中 $\alpha = \max_u |f'(u)|$. 对 f^+ 和 f^- 分别使用迎风格式可得 Lax-Friedrichs 格式

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f^+(v_j^n) - f^+(v_{j-1}^n)) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f^-(v_{j+1}^n) - f^-(v_j^n))$$

7.4.2 守恒型格式

Definition 7.4.1 (守恒型格式). 称差分格式为守恒型格式, 如果它可以表述为如下形式

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\hat{f}_{j+1/2}^n - \hat{f}_{j-1/2}^n \right), \quad \forall j$$

其中 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = \hat{f}(v_{j-r}, \dots, v_{j+s})$ 称为数值流通量, 满足

1. 连续性: \hat{f} 关于每一个变量都是局部 Lipschitz 连续的
2. 相容性: $\hat{f}(v, \dots, v) = f(v)$

对守恒型格式关于 j 进行局部地求和, 可以得到

$$\sum_{j=p}^q v_j^{n+1} = \sum_{j=p}^q v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\hat{f}_{q+1/2}^n - \hat{f}_{p-1/2}^n \right)$$

这就是离散意义下的局部守恒性。给定一个守恒型数值格式, 反过来要求给出数值流通量的形式时, 也可以利用这个性质, 对格式关于 j 进行部分求和, 进而推出数值流通量的具体形式。

一般的数值格式可能无法保证得到的解是弱解, 守恒型格式由于具有局部守恒性, 可以保证得到的一定是弱解, 但是不能进一步保证是熵解, 有如下定理:

Theorem 7.4.1 (Lax-Wendroff 定理). 设守恒型差分格式与双曲守恒律相容, 当时空网格尺度趋于零时, 若数值解几乎处处有界并且收敛到某个函数, 则极限函数必定是问题的弱解。

对于双曲守恒律问题, 必须要考虑间断界面的处理, 但是守恒型格式仍然可能在间断附近产生数值振荡, 并且守恒型格式只能保证得到弱解而非熵解。为了解决这两个问题, 引入了单调格式和 TVD 格式等概念。

7.4.3 单调保持和单调格式

Definition 7.4.2. 称方程具有单调保持性质, 如果满足: 对于单增或单减的初值, 任意时刻的熵解均保持相同的单调性。

Definition 7.4.3. 称方程具有比较性质, 如果满足:

$$u_1(x, 0) \leq u_2(x, 0) \quad (\forall x) \quad \Rightarrow \quad u_1(x, t) \leq u_2(x, t) \quad (\forall x, \forall t > 0)$$

理论分析表明, 双曲守恒律问题的熵解具有单调保持性质和比较性质, 因此我们也希望设计的数值格式在离散意义下保持相应的性质。

Definition 7.4.4 (单调保持格式). 称差分格式为单调保持格式, 如果满足: 对于单增或单减的初值, 任意时刻的数值解均具有相同的单调性。

单调保持格式可以避免产生数值振荡, 但是单调保持的概念在实践中难以验证。我们可以加强条件, 引入一类要求更强, 但实践中更容易验证的概念——单调格式。

Definition 7.4.5 (单调格式). 称差分格式是单调格式, 若它可以表述为如下形式

$$v_j^{n+1} = H(v_{j-r-1}^n, \dots, v_{j+s}^n), \quad \forall j$$

其中 H 关于每一个变量都是非减的, 即 $H(\uparrow, \dots, \uparrow)$ 。

可以证明单调格式是一个更强的概念:

Theorem 7.4.2. 单调格式一定是单调保持格式, 反之未必成立。限于线性格式的范畴, 单调格式等价于单调保持格式。

Proof. 取单调的离散值 $v_j^0 \leq v_{j+1}^0, \forall j$, 那么

$$v_j^1 = H(v_{j-r-1}^0, \dots, v_{j+s}^0) \leq H(v_{j-r}^0, \dots, v_{j+s+1}^0) = v_{j+1}^1$$

归纳可得, 对于任意时刻 t^n , 都有相同的单调性: $v_j^n \leq v_{j+1}^n, \forall j$ 。对于线性格式

$$v_j^{n+1} = \sum_{s=-p}^q c_s v_{j+s}^n$$

单调保持可以推出所有系数都非负, 从而是单调格式。□

如下命题可以用于判断一个三点格式是否是单调格式。

Proposition 7.4.3. 对于如下形式的三点格式

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\hat{f}_{j+1/2}^n - \hat{f}_{j-1/2}^n \right), \quad \hat{f}_{j+1/2}^n = \hat{f}(v_j^n, v_{j+1}^n).$$

若数值流通量 $\hat{f}(v_1, v_2)$ 满足如下条件

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial v_1} \geq 0, \quad \frac{\partial \hat{f}}{\partial v_2} \leq 0, \quad \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial v_1} - \frac{\partial \hat{f}}{\partial v_2} \right) \leq 1.$$

则该格式为单调格式。

Definition 7.4.6 (单调数值流通量). 称 $\hat{f}(v_1, v_2)$ 为一个单调数值流通量, 如果满足:

1. 连续性: \hat{f} 关于每一个变量都是局部 Lipschitz 连续的;
2. 相容性: $\hat{f}(v, v) = f(v)$;
3. 单调性: 关于第一个变量不减, 关于第二个变量不减, 即 $\hat{f}(\uparrow, \downarrow)$ 。

单调格式可以保证得到的一定是熵解, 但是代价是无法获得高阶, 有如下的定理:

Theorem 7.4.4. 单调格式的数值解若一致有界, 必然收敛到双曲守恒律的熵解。

Theorem 7.4.5 (Godunov). 单调格式最多只有一阶局部截断误差。

Godunov 定理表明, 由于单调格式无法获得高阶精度, 如果希望设计高阶格式, 必须跳出单调格式的范围, 考虑一个更大的概念。

7.4.4 TVD 格式

Definition 7.4.7. 称方程具有全变差不增的性质, 如果精确解满足

$$TV(u(x, t_2)) \leq TV(u(x, t_1)), \quad \forall t_2 > t_1,$$

其中精确解的全变差定义为 $TV(u) = \int |u_x| dx$ 。

理论分析表明, 双曲守恒律问题的熵解具有 TVD 性质, 因此我们也希望设计的数值格式在离散意义下保持相应的 TVD 性质。

Definition 7.4.8 (TVD 格式). 称差分格式是全变差不增的格式 (TVD 格式), 如果数值解满足

$$TV(v^{n+1}) \leq TV(v^n), \quad \forall n,$$

其中数值解的全变差定义为 $TV(v^n) = \sum_j |v_{j+1}^n - v_j^n|$ 。

由定义可知, TVD 格式可以达到抑制数值振荡的效果。有如下充分条件可以判断三点格式为 TVD 格式:

Lemma 7.4.6 (Harten 引理). 若差分格式可以表述为如下形式

$$v_j^{n+1} = v_j^n - C_{j-1/2}(v_j^n - v_{j-1}^n) + D_{j+1/2}(v_{j+1}^n - v_j^n)$$

其中系数 $C_{j-1/2}, D_{j+1/2}$ 可以依赖于数值解, 并且处处成立

$$C_{j+1/2} \geq 0, \quad D_{j+1/2} \geq 0, \quad C_{j+1/2} + D_{j+1/2} \leq 1, \quad \forall j$$

则它是 TVD 格式。

Proof. 只需要对指标错位并利用不等式放缩即可, 引理的条件可以保证凸组合系数非负

$$\begin{aligned} v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1} &= v_{j+1}^n - C_{j+1/2}(v_{j+1}^n - v_j^n) + D_{j+3/2}(v_{j+2}^n - v_{j+1}^n) \\ &\quad - v_j^n + C_{j-1/2}(v_j^n - v_{j-1}^n) - D_{j+1/2}(v_{j+1}^n - v_j^n) \\ |v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}| &\leq (1 - C_{j+1/2} - D_{j+1/2})|v_{j+1}^n - v_j^n| \\ &\quad + D_{j+3/2}|v_{j+2}^n - v_{j+1}^n| + C_{j-1/2}|v_j^n - v_{j-1}^n| \end{aligned}$$

对下标求和 (忽略求和边界, 假定周期或紧支边界条件) 即可得证

$$\sum_j |v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}| \leq \sum_j |v_{j+1}^n - v_j^n| \quad \square$$

Remark. 在 Harten 引理中, 条件 $C_{j+1/2} + D_{j+1/2} \leq 1$ 的下标没有错位。

TVD 格式是一个严格介于单调保持格式和单调格式之间的概念, 不加证明地给出如下定理:

Theorem 7.4.7. 单调格式一定是 TVD 格式, TVD 格式一定是单调保持格式, 反之不成立。限于线性差分格式的范畴, 单调格式、TVD 格式和单调保持格式这三个概念是彼此等价的。

这带来了一个比较特别的结论：由于线性 TVD 格式至多有一阶局部截断误差，在设计高阶 TVD 格式时必然需要使用非线性格式，即使离散对象本身是线性方程。

Remark. 大多数的守恒型 TVD 格式在对数值流量进行适当的“熵修正”之后，都可以给出较为理想的数值结果，数值解会收敛到熵解，但是似乎没有严格的理论证明。（张强《偏微分方程的有限差分方法》P181）

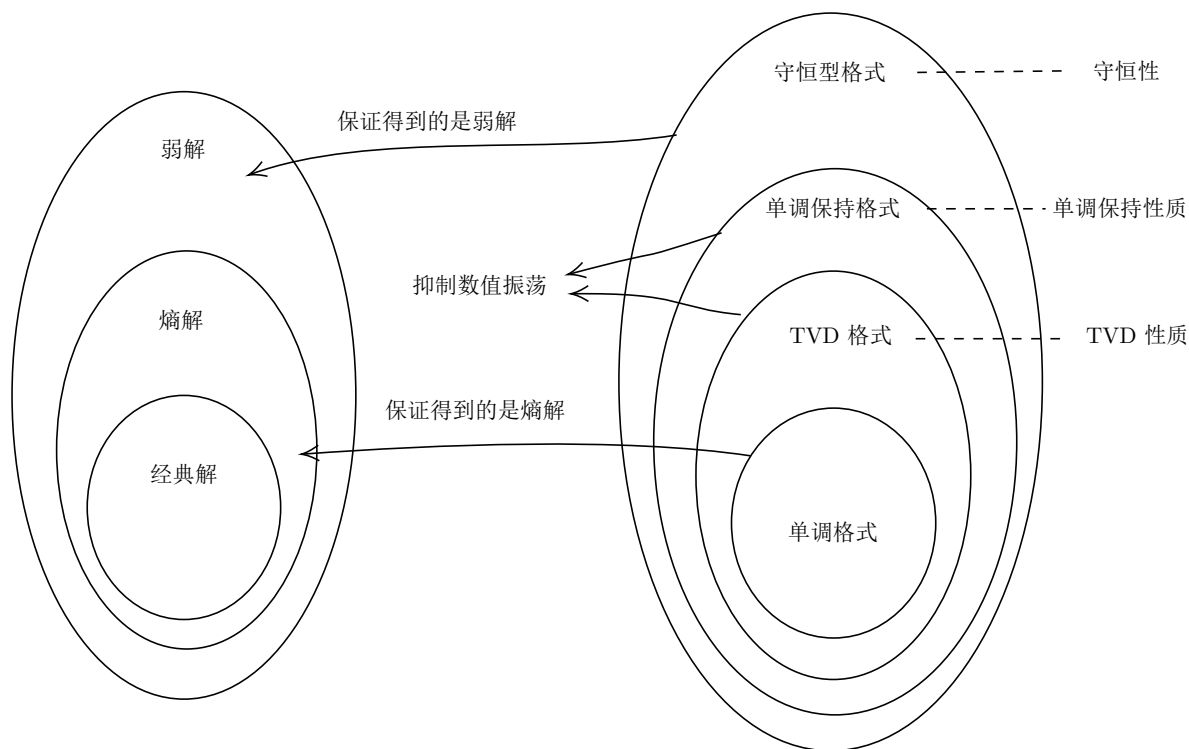


图 7.4: 各种格式与各种解的关系

7.4.5 数值格式示例（二）

前文中设计的数值格式具有如下特点：

1. 基于流通分裂构造的 Lax-Friedrichs 格式是单调格式；
2. 使用空间平均替换得到的 Lax 格式是单调格式；
3. 基于 Roe 平均构造的 Roe 迎风格式是 TVD 格式，但不是单调格式；
4. 基于时间泰勒展开得到的 LW 格式是守恒型格式，但不是单调保持格式，可能产生数值振荡。

Example 7.4.6. 考虑基于流通分裂构造的 Lax-Friedrichs 格式，在满足 CFL 条件时，可以证明它是单调格式。

Proof.

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f^+(v_j^n) - f^+(v_{j-1}^n)) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f^-(v_{j+1}^n) - f^-(v_j^n)) =: H(v_{j-1}^n, v_j^n, v_{j+1}^n).$$

单调性要求

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial v_{j-1}^n} &= \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f'(v_{j-1}^n) + \alpha) \geq 0, \\ \frac{\partial H}{\partial v_j^n} &= 1 - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \geq 0, \\ \frac{\partial H}{\partial v_{j+1}^n} &= \frac{\Delta t}{2\Delta x}(\alpha - f'(v_{j+1}^n)) \geq 0\end{aligned}$$

$\alpha = \max |f'|$ 可以保证第一个和第三个不等式成立，第二个不等式即 CFL 条件。 \square

Example 7.4.7. 考虑使用空间平均替换得到的 Lax 格式，在满足 CFL 条件时，可以证明它是单调格式。

Proof.

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{2}(v_{j-1}^n + v_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(v_{j+1}^n) - f(v_{j-1}^n)) =: H(v_{j-1}^n, v_j^n, v_{j+1}^n).$$

单调性要求

$$\frac{\partial H}{\partial v_{j-1}^n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x}f'(v_{j-1}^n)\right) \geq 0, \quad \frac{\partial H}{\partial v_j^n} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial v_{j+1}^n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}f'(v_{j+1}^n)\right) \geq 0$$

CFL 条件 $\Delta t/\Delta x \leq 1/\max |f'|$ 可以保证第一个和第三个不等式成立。 \square

Example 7.4.8. 考虑基于 Roe 平均构造的 Roe 迎风格式：在满足 CFL 条件时，可以证明它是 TVD 格式。

Proof.

$$\begin{aligned}v_j^{n+1} &= v_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(1 + \text{sgn}(a_{j-1/2}^n))(f(v_j^n) - f(v_{j-1}^n)) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(1 - \text{sgn}(a_{j+1/2}^n))(f(v_{j+1}^n) - f(v_j^n)) \\ &= v_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(1 + \text{sgn}(a_{j-1/2}^n))\frac{f(v_j^n) - f(v_{j-1}^n)}{v_j^n - v_{j-1}^n}(v_j^n - v_{j-1}^n) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(1 - \text{sgn}(a_{j+1/2}^n))\frac{f(v_{j+1}^n) - f(v_j^n)}{v_{j+1}^n - v_j^n}(v_{j+1}^n - v_j^n) \\ &=: v_j^n - C_{j-1/2}(v_j^n - v_{j-1}^n) + D_{j+1/2}(v_{j+1}^n - v_j^n)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}C_{j-1/2} &= \frac{\Delta t}{2\Delta x}(1 + \text{sgn}(a_{j-1/2}^n))\frac{f(v_j^n) - f(v_{j-1}^n)}{v_j^n - v_{j-1}^n} = \frac{\Delta t}{2\Delta x}(1 + \text{sgn}(a_{j-1/2}^n))a_{j-1/2}^n \geq 0, \\ D_{j+1/2} &= -\frac{\Delta t}{2\Delta x}(1 - \text{sgn}(a_{j+1/2}^n))\frac{f(v_{j+1}^n) - f(v_j^n)}{v_{j+1}^n - v_j^n} = -\frac{\Delta t}{2\Delta x}(1 - \text{sgn}(a_{j+1/2}^n))a_{j+1/2}^n \geq 0,\end{aligned}$$

并且

$$C_{j+1/2} + D_{j+1/2} = \frac{\Delta t}{2\Delta x}a_{j+1/2}^n(1 + \text{sgn}(a_{j+1/2}^n) - 1 + \text{sgn}(a_{j+1/2}^n)) = \frac{\Delta t}{\Delta x}\text{sgn}(a_{j+1/2}^n)a_{j+1/2}^n \leq 1$$

对应为 CFL 条件： $\Delta t \max |a_{j+1/2}^n| \leq \Delta x$ 。但是即使在满足 CFL 条件时，Roe 迎风格式也不是单调格式。 \square

Example 7.4.9. LW 格式是守恒型格式。

Proof.

$$\begin{aligned}
 v_j^{n+1} &= v_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(v_{j+1}^n) - f(v_{j-1}^n)) \\
 &\quad + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} \{A_{j+1/2}^n [f(v_{j+1}^n) - f(v_j^n)] - A_{j-1/2}^n [f(v_j^n) - f(v_{j-1}^n)]\} \\
 &= v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \left(\frac{1}{2}(f(v_j^n) + f(v_{j+1}^n)) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A_{j+1/2}^n [f(v_{j+1}^n) - f(v_j^n)] \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{1}{2}(f(v_{j-1}^n) + f(v_j^n)) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A_{j-1/2}^n [f(v_j^n) - f(v_{j-1}^n)] \right) \right\} \\
 &=: v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{f}_{j+1/2}^n - \hat{f}_{j-1/2}^n)
 \end{aligned}$$

对应的数值流通量 $\hat{f}_{j+1/2}$ 为

$$\hat{f}_{j+1/2} = \frac{1}{2}(f(v_j^n) + f(v_{j+1}^n)) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A_{j+1/2}^n [f(v_{j+1}^n) - f(v_j^n)]$$

数值实验表明, LW 格式可能产生数值振荡, 因此它不是单调保持格式。 □

附录 A Fourier 基础

A.1 Fourier 级数

Theorem A.1.1. 对于以 2π 为周期的函数 $f \in C^1(\mathbb{R})$, 对应的 Fourier 级数为

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{w=-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx}$$

其中 Fourier 系数为

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-iwx} dx$$

那么, Fourier 级数 $S(x)$ 一致收敛于 $f(x)$ 。

Theorem A.1.2. 对于 2π 周期的分片 C^1 函数 f , 若 $f \in C^1((a, b))$, 则在任意连续闭区间 $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, 都有 Fourier 级数一致收敛于 $f(x)$ 。对于间断点 x_0 , Fourier 级数收敛于 $\frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-))$ 。

Theorem A.1.3. 对于 2π 周期的分片 C^1 函数 $g(x)$, 假设 g 的 $p-1$ 阶导数连续, p 阶导数是分片 C^1 的, 那么存在常数 C , 使 g 的 Fourier 系数满足

$$|\hat{g}(w)| \leq \frac{C}{|w|^{p+1} + 1}$$

考虑内积和对应的 L^2 范数

$$(f, g) := \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx, \|f\| := \sqrt{(f, f)}$$

Lemma A.1.4. 指数函数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 在 L^2 内积下是标准正交的

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right) = \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

Theorem A.1.5 (Parseval 关系). 对于 2π 周期函数 $f, g \in L^2$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{w=-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iwx}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{w=-\infty}^{\infty} \hat{g}(w)e^{iwx} \quad (\text{A.1})$$

那么,

$$(f, g) = \sum_{w=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(w)}\hat{g}(w), \quad \|f\|^2 = \sum_{w=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^2$$

Theorem A.1.6. 对于任意 2π 周期函数 $f(x) \in L^2$, Fourier 级数部分和在 L^2 意义下收敛到 f , 即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N\| = 0.$$

其中

$$S_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{w=-N}^N \hat{f}(w)e^{iwx}, \quad \hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-iwx} f(x) dx.$$

A.2 三角插值

为了记号的方便, 只讨论 N 为偶数的情形。将 $[0, 2\pi]$ 等分为 $N+1$ 个小区间, 对应 $N+1$ 个节点: $x_j, j=0, \dots, N$, 记空间步长 $h = \frac{2\pi}{N+1}$ 。对于 2π 周期的函数 $u(x)$, 记 $u_j = u(x_j)$, 存在唯一的“三角函数”

$$\text{Int}_N u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{w=-N/2}^{N/2} \tilde{u}(w)e^{iwx}$$

满足 $\text{Int}_N u(x)$ 在 $\{x_j\}_{j=0, \dots, N}$ 插值 u , 即

$$\text{Int}_N u(x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{w=-N/2}^{N/2} \tilde{u}(w)e^{iwx_j} = u(x_j), \quad j=0, \dots, N.$$

下面默认 u, v 均为 2π 周期的函数。

Lemma A.2.1. 指数函数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 关于离散 L^2 内积是标准正交的

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{imx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx} \right)_h = \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & 0 < |m-n| \leq N \\ 1, & m=n \end{cases}$$

Theorem A.2.2. 三角插值 $\text{Int}_N u(x)$ 存在且唯一, 具体表达式为

$$\text{Int}_N u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{w=-N/2}^{N/2} \tilde{u}(w)e^{iwx}$$

其中的系数为

$$\tilde{u}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{iwx}, u)_h, \quad |w| \leq \frac{N}{2}$$

Theorem A.2.3. 考虑对于 u 和 v 的三角插值 $\text{Int}_N u(x)$ 和 $\text{Int}_N v(x)$

$$\text{Int}_N u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{w=-N/2}^{N/2} \tilde{u}(w)e^{iw x}, \quad \text{Int}_N v(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{w=-N/2}^{N/2} \tilde{v}(w)e^{iw x}.$$

那么

$$(u, v)_h = \sum_{w=-N/2}^{N/2} \overline{\tilde{u}(w)}\tilde{v}(w) = (\text{Int}_N u, \text{Int}_N v) = (\text{Int}_N u, \text{Int}_N v)_h.$$

以及

$$\|u\|_h^2 = \sum_{w=-N/2}^{N/2} |\tilde{u}(w)|^2 = \|\text{Int}_N u\|^2 = \|\text{Int}_N u\|_h^2.$$

Theorem A.2.4. 对于 $u(x)$ 和它的三角插值 $\text{Int}_N u(x)$, 有如下不等式成立

$$\|D_+^\ell u\|_h^2 \leq \left\| \frac{d^\ell}{dx^\ell} \text{Int}_N u \right\|^2 \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\ell} \|D_+^\ell u\|_h^2, \quad \ell = 1, 2, \dots$$

考虑 u 的 Fourier 级数和三角插值 $\text{Int}_N u$

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{w=-\infty}^{\infty} \hat{u}(w)e^{iw x}, \quad \text{Int}_N u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{w=-N/2}^{N/2} \tilde{u}(w)e^{iw x}$$

显然 Fourier 系数 $\hat{u}(w)$ 和三角插值系数 $\tilde{u}(w)$ 存在一定的联系。

Lemma A.2.5. Fourier 系数 $\hat{u}(w)$ 和三角插值系数 $\tilde{u}(w)$ 满足如下关系

$$\tilde{u}(w) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \hat{u}(w + \ell(N+1)), \quad |w| \leq \frac{N}{2}$$

特别地, 如果对于 $|w| > \frac{N}{2}$ 都有 $\hat{u}(w) = 0$, 这表明 u 不含高频部分, 三角插值严格等于原函数: $\text{Int}_N u(x) = u(x)$, 此时 $\tilde{u}(w) = \hat{u}(w)$, $|w| \leq \frac{N}{2}$ 。

Theorem A.2.6. 如果 u 的 Fourier 系数满足

$$|\hat{u}(w)| \leq \frac{C}{|w|^{m+1}}, \quad m > 1$$

那么

$$\|u - \text{Int}_N u\|_h \leq \frac{2C}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{N}{2}\right)^{1-m} \left(\frac{1}{m-1} + \frac{2(N+1)}{N} B_m\right)$$

其中 B_m 定义为 $B_m = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^m}$ 。

Corollary A.2.7. 存在常数 $C_\ell > 0$, 使得

$$\left\| \frac{d^\ell u}{dx^\ell} - \frac{d^\ell \text{Int}_N u}{dx^\ell} \right\|_\infty \leq C_\ell \left(\frac{N}{2}\right)^{1+\ell-m}, \quad 1 + \ell < m$$

关于考试

期末考试为闭卷考试，不会涉及编程方面的内容，题目与作业题和课上例题类似。题型包括解答题和证明题：大约 4-6 个大题，每个大题包括 2-4 个小问，计算量比较大。

可能出现的内容：

1. 针对 PDE 设计差分格式
2. CFL 条件和特征线
3. 方程（组）的适定性分析
4. 讨论数值格式的稳定性、相容性、收敛性
5. 方程和格式的色散耗散分析
6. 守恒律方程 $u_t + f(u)_x = 0$ ，守恒格式/单调格式/TVD 格式
7. 初边值问题的差分格式设计和分析
8. 二维问题的差分格式设计和分析