

偏微分方程数值解

中国科学技术大学 数学学院

张梦萍

(办公室：东区-管理科学楼1227室)

(63601855; mpzhang@ustc.edu.cn)

蒋琰

(办公室：东区-)

(63601855; mpzhang@ustc.edu.cn)

付杨鑫

(办公室：东区-管理科学楼1212室)

李顺

(办公室：东区-管理科学楼1212室)

2024.09–2025.01

第0章：绪论

1 本课程相关事项

1. 上课时间地点

本课程80学时4个学分的课。2-18周

上课地点、时间：周1（6,7） 14:00-15:35, **5501**;

周4（8,9） 15:55-17:30, **5501**

2. 参考书

– Time Dependent Problems and Difference Methods

作者： Bertil Gustafsson, Heinz-Otto Kreiss, Joseph Oliger

– Numerical Partial Differential Equations

作者： J. W. Thomas

3. 授课与作业

– 课堂教学、随堂练习

– 作业：书面作业（每周交1次，周一交）；程序作业（布置作业后隔一周交，周四交）

– 总成绩=期末考试成绩 (?) + 随堂练习 (?) + 作业 (?)

2 本课程研究的问题

三（四？）大科学方法：理论推导、物理实验、（大）科学计算、机器学习（？）

(1) 用“理论推导”求解实际问题

(2) 用“物理实验”求解实际问题

(3) 用“机器学习”求解实际问题

(4) 用“科学计算”求解实际问题

具体问题 → 物理模型 → 数学模型

$\xrightarrow{\text{数值近似}}$ 模型的近似解 → 研究讨论近似解的有效性

部分数学模型：控制方程（组）（如：偏微分方程）“ \oplus ”定解条件

偏微分方程数值解：在计算机上，求偏微分方程定解问题的近似解，以及相关研究；这是计算数学最重要的一个分支

3 控制方程-偏微分方程 (组)

(1) 控制方程-偏微分方程 (组)

(2) 偏微分方程 (组) 分类 (按线性、非线性分类)

- 线性PDE: 对未知函数及其在方程 (组) 中出现的所有偏导数都是线性的, 如: $u_t + a(x, t)u_x = (c(x, t)u_x)_x$

- 非线性PDE: 除线性PDE以外的PDE; 如: $u_t + uu_x = (uu_x)_x$

拟线性PDE: 对未知函数及其在方程 (组) 中出现的最高阶偏导数是线性的, 如: $u_t + uu_x = (c(x, t)u_x)_x$

(3) 常见的模型方程

1) 对流方程 (双曲型方程)

2) 热传导方程 (抛物型方程、扩散方程)

3) 对流扩散方程

4) 波动方程 (双曲型方程)

5) Poisson方程 (椭圆型方程)

6) KdV方程

7) Euler方程

8) N-S方程

(4) 偏微分方程 (组) 的解 (古典解) 设函数 u 在所考虑的区域 Ω 内具有PDE(S)中所出现的各阶导数, 且它们都是连续的。

若将 u 以及它的各阶导数代入 PDE(S) 后, 使 PDE(S) 成为恒等式, 则称 u 为该 PDE(S) 的解 (古典解)

4 偏微分方程(组)的定解问题

(1) 定解条件: 确定特解的条件

特解: PDE(S) 在特定条件下的解常见的定解条件: 边界条件、初始条件, 以及其它条件

边界条件: 周期性边界条件、非周期性边界条件

非周期性边界条件分为: (以二维 (x, y) 平面为例)

* 第一类边界条件 (Dirichlet B.C.):

$$u = f(x, y), (x, y) \in \partial\Omega$$

* 第二类边界条件 (Neumann B.C.):

$$a(x, t) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = f(x, y), (x, y) \in \partial\Omega, \vec{n} \text{ 是 } \partial\Omega \text{ 的外法向}$$

* 第三类边界条件 (混合 B.C.):

$$u + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = f(x, y), (x, y) \in \partial\Omega, \vec{n} \text{ 是 } \partial\Omega \text{ 的外法向}$$

(2) 定解问题: 给出了控制方程(组)及其定解条件的问题

常见的定解问题有三类:

* 初值问题 (Cauchy 问题): PDE(S) + I.C.

* 边值问题: PDE(S) + B.C.

* 混合问题 (初边值问题): PDE(S) + B.C. + I.C.

(3) 定解问题的解:

* 定义:

设函数 u 在所考虑的区域 Ω 内是 PDE(S) 的解。当 Ω 内的点

5 求偏微分方程（组）定解问题的近似解（数值解）
趋于 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 时，定解条件中所要求的 u 以及它的导数的极限处处存在且等于给定的定解条件，则称 u 为该定解问题的解，使PDE(S)成为恒等式，则称 u 为该PDE(S)的解（古典解）

* 定解问题的解是稳定的：

若定解条件发生微小变动时，相应问题的解也只引起微小的变动；即：解对于定解条件存在连续依赖关系，则称该定解问题的解是稳定的

(4) 适定问题：

定义：如果定解问题的解存在唯一，且关于定解条件是稳定的，则称该问题是适定的

本课程仅讨论适定的问题（即：假设讨论的模型是适定的，适定性研究？）

5 求偏微分方程（组）定解问题的近似解（数值解）

(1) 求偏微分方程数近似解（数值解）的必要性和合理性：

(2) 偏微分方程数值方法的应用

可以用于所有转化为偏微分方程定解问题的各领域的实际应用。

* 流体力学—计算流体力学.....

* 磁流体力学—核聚变.....

5 求偏微分方程（组）定解问题的近似解（数值解）

- * 交通流—高速公路、城市交通（包括车辆、行人等）
- * 材料科学—晶体生长.....
- *

(3) 求偏微分方程数值解的主要步骤

时间依赖的偏微分方程（组）的定解问题问题：

$$\begin{cases} u_t = u_x, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(2\pi x), & -\infty < x < \infty, \\ \text{周期性边界条件, 且周期为: } 1 \end{cases} \quad (1)$$

易论证本问题是适定

- * 时空区域剖分（离散）
- * 偏微分方程（组）离散
- * 定解条件（初边值）离散
- * 求解离散方程组（数值代数）
- * 结果分析、讨论 \Rightarrow ：有效可靠的数值解

(4) 常用的偏微分方程数值方法

由于上述离散的出发点不同，依据的方程不一样，由此产生的数值方法也不一样，常见的数值方法主要分为以下几类：

- * 有限差分法
- * 有限元方法
- * 谱方法

5 求偏微分方程（组）定解问题的近似解（数值解）

* 其它方法

本课程注重在有限差分方法。这儿特别要说的：每类方法，都有不同的处理思想、不同的特点，适合不同的问题。没有一种统一的方法可以解决所有问题

5 求偏微分方程(组)定解问题的近似解(数值解)
大作业1 (20240909)

大作业1

函数: $v(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$, $v_N(x) = \sum_{\omega=1}^N \frac{\sin(\omega x)}{\omega}$, $x \in \Omega = (0, 2\pi]$ 。将 Ω 均匀剖分 $x_j = j * \Delta x, j = 1, \dots, m, \Delta x = \frac{2\pi}{m}$, 对于 $m = 20$, 和 $m = 160$ 分别绘出 $v(x)$ 、 $v_N(x)$ 和 $v(x) - v_N(x)$ 的图形。这儿 N 分别取10和100。

对于修正的 $\tilde{v}_N = \sum_{\omega=1}^N \frac{\sin \frac{\omega\pi}{N}}{\frac{\omega\pi}{N}} \frac{\sin \omega x}{\omega}$ 重复上面的工作; 比较二者的结果, 并进行评述

偏微分方程数值解

中国科学技术大学 数学学院

张梦萍

办公室：东区-管理科学楼1227室

0551-63601855; mpzhang@ustc.edu.cn; 2024-09

付杨鑫

(办公室：东区-管理科学楼1212室)

李顺

(办公室：东区-管理科学楼1212室)

第一部分：一维线性偏微分方程初值问题的有限差分方法

第一章：Fourier级数和三角插值

傅里叶级数理论是偏微分方程的数值方法分析研究的主要工具。

1 Fourier级数理论的一些常用概念与结果

首先，我们考虑用傅立叶级数表示连续复值函数。本章我们假设函数均定义在所有实数上，周期为 2π （除特别说明之外）。

1.1 Fourier级数的收敛性

1. 定理

Theorem 1.1 假设 $f \in C^1_{(-\infty, \infty)}$ 是 2π 周期的周期函数，则 $f(x)$ 可

由如下Fourier级数表示：
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}。$$

其中，Fourier系数 $\hat{f}(\omega)$ 为：
$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i\omega x} dx。$$

且该Fourier级数一致收敛性于 $f(x)$

$C^n_{(a,b)}$ ：表示在 (a, b) 上的 n 次连续可导的函数集合。

Theorem 1.2 假设 f 是 2π 周期、分片 C^1 函数。若在 $a < x < b$ 上 $f \in C^1_{(a,b)}$ ，则在 (a, b) 上的任意子区间 $a < \alpha \leq x \leq \beta < b$ 上，其Fourier级数一致收敛性于 $f(x)$ 。在间断点 x 处，Fourier级数收敛性于 $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$

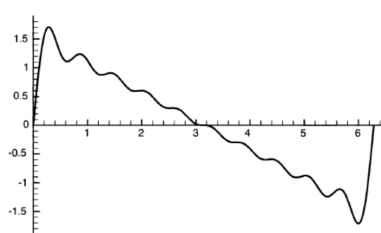
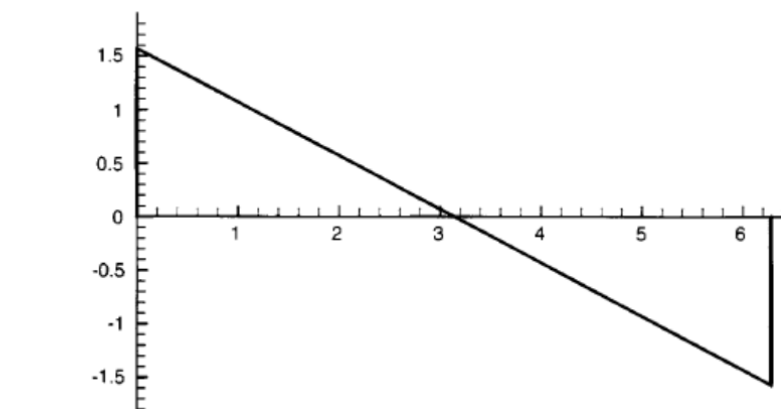


Figure 1: fig1.1.2

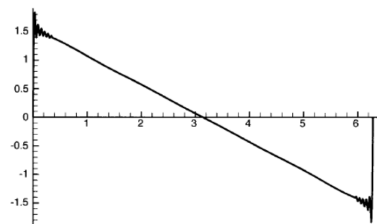


Figure 2: fig1.1.3

Theorem 1.3 若 $g(x)$ 是 2π 周期函数，假设它的 p 阶导数是分片 C^1 函数，则其 *Fourier* 系数满足：

$$|\hat{g}(\omega)| \leq \text{constant}/(|\omega|^{p+1} + 1)$$

2. 锯齿函数的Fourier级数特性

锯齿函数 $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$, $0 < x \leq 2\pi$, $f(x) = f(x + 2\pi)$

\Rightarrow : $f(x)$ 是分片 C^1 的 2π 周期的周期函数

$f(x) = \sum_{\omega=1}^{\infty} \frac{\sin \omega x}{\omega}$; 且 $|\hat{f}(\omega)| \leq \text{constant}/|\omega|$ 。

取：部分和 $f_N(x) = \sum_{\omega=1}^N \frac{\sin \omega x}{\omega}$ 。

图fig1.1.1、fig1.1.2和fig1.1.3分别给出了曲线 $f(x)$ 、 $f_{10}(x)$ 和 $f_{100}(x)$ 。

由图可见：在二个不连续点 $x = 0$ 、 2π 的邻域，出现了明显的Gibbs现象；即接近跳跃处，出现快速振荡；随着 N 增大，振荡

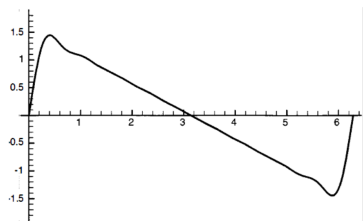


Figure 1.1.5

Figure 3: fig1.1.5

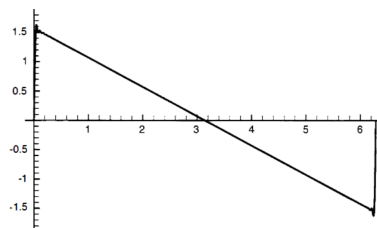


Figure 1.1.6

Figure 4: fig1.1.6

收窄、频率加快，而且不收敛于0；越接近 $x = 0, 2\pi$ ，振荡幅度越大。

3. p 阶导数为锯齿函数的函数的Fourier级数特性

取 $f^{(1)}(x)$ 的导数为锯齿函数 $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ ，则有

$$f^{(1)}(x) = \int_0^x f(t)dt = \sum_{\omega=1}^{\infty} \frac{1}{\omega^2} - \sum_{\omega=1}^{\infty} \frac{\cos \omega x}{\omega^2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

由此可见：1) $f^{(1)}(x)$ 是Lipschitz连续函数，它的1阶导数是锯齿函数（在 $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ 处有跳跃）；2) 其Fourier级数对所有的 x 一致收敛性于 $f^{(1)}(x)$ ；3) 其Fourier系数满足： $|f^{(1)}(\omega)| \leq constant/(|\omega|^2 + 1)$ （其中： $f^{(1)}(x)$ 的1阶导数是分片 C^1 ）

取： $f_N^{(1)}(x) = \sum_{\omega=1}^N \frac{1}{\omega^2} - \sum_{\omega=1}^N \frac{\cos \omega x}{\omega^2}$

图fig2.1.1、fig2.1.2和fig2.1.3分别给出了曲线 $f^{(1)}(x)$ 、 $f_{10}^{(1)}(x)$ 和 $f_{100}^{(1)}(x)$ 。

由图可见：，则： $N \rightarrow \infty$ 时， $f_N^{(1)}(x)$ 收敛于 $f^{(1)}(x)$

若 2π 周期函数 $f^{(p)}(x)$ 是锯齿函数 $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ 的 p 重积分，则 $f^{(p)}(x)$ 的 $p-1$ 阶导数连续， p 阶导数有跳跃点；易得到其Fourier系数满足：

$$|f^{(p)}(\omega)| \leq constant/(|\omega|^p + 1)$$

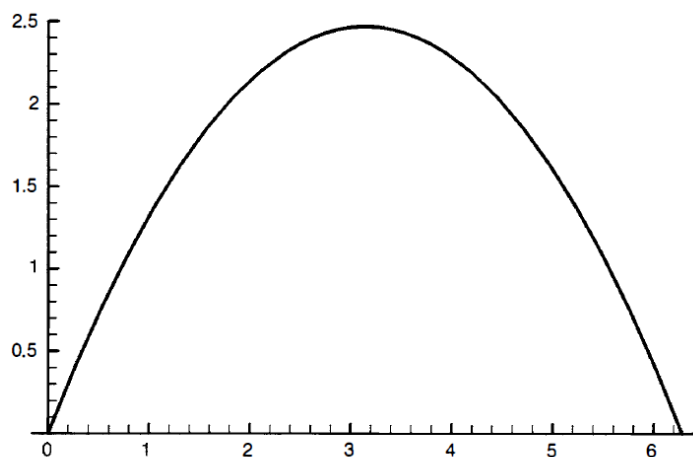


Figure 1.1.7.

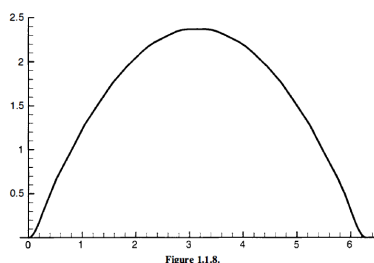


Figure 1.1.8.

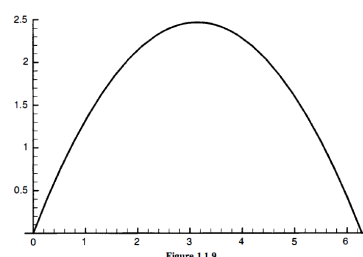


Figure 1.1.9.

Figure 5: fig2.1.2

Figure 6: fig2.1.3

对于一般的 2π 周期的、 p 阶导数是分片 C^1 的函数也有类似的性质；见定理1.3

4. 定理1.3的证明

5. 一般的 2π 周期的、分片光滑的函数的研究，转换为对锯齿函数的研究

1.2 标量内积与 L_2 模

1. 定义

常用的收敛性定义有：“按 $\|\cdot\|$ 模收敛”和“逐点收敛”

本章若没有特别说明，则 $\|\cdot\|$ 是指 L_2 模。

令 \bar{f} 为 f 的复共轭，则 L_2 标量内积与 L_2 模分别定义为：

- 函数 f 与 g 的内积: $(f, g) = \int_0^{2\pi} \bar{f}(x)g(x)dx$,
- 函数 f 的 L_2 模: $\|f\|_2 = (f, f)^{\frac{1}{2}} = (\int_0^{2\pi} \bar{f}(x)f(x)dx)^{\frac{1}{2}} = (\int_0^{2\pi} |f|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$
- 序列 $\{f_\mu\}_{\mu=1}^\infty$ 在平均意义下 (L_2 模意义下) 收敛于 f , 即:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \|f_\mu - f\| = 0$$

标量内积是双线性的, 即:

$$(f, g) = \overline{(g, f)}, \quad (f + g, h) = (f, h) + (g, h)$$

$$(\lambda f, g) = \bar{\lambda}(f, g), \quad (f, \lambda g) = \lambda(f, g), \quad \lambda \text{ is constant scalar}$$

$$L_2 \text{ 模满足: } \|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|, \quad |(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|,$$

$$\text{三角不等式: } \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \quad |||f\| - \|g\|| \leq \|f - g\|$$

2. 若干重要引理、定理

Lemma 1.1 指数函数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 关于 L_2 标量内积是标准正交的, 即:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{imx}\right) = \begin{cases} 0 & \text{当 } m \neq n; \\ 1 & \text{当 } m = n \end{cases}$$

Theorem 1.4 (*Bessel*不等式)

对所有的 N , 有: $\sum_{\omega=-N}^N |\hat{f}(\omega)|^2 \leq \|f\|^2$ 。

此外, 当且仅当 *Parseval*关系成立 (即: $\sum_{\omega=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 = \|f\|^2$) 时, 有:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} (\|f\|^2 - \sum_{\omega=-N}^N |\hat{f}(\omega)|^2) = 0;$$

$$\text{其中 } S_N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-N}^N \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}, \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-i\omega x} f(x) dx。$$

*Parseval*关系: $\sum_{\omega=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 = \|f\|^2$

*Bessel*不等式 $\sum_{\omega=-N}^N |\hat{f}(\omega)|^2 \leq \|f\|^2$

Theorem 1.5 任意分片连续地函数 f 都能展开成在 L_2 模意义下收敛于 f 的 *Fourier*级数, 即: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}$, $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-i\omega x} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-i\omega x}, f(x))$; 且 *Parseval*关系成立。

证明:

- 1) 对所有的属于 $C^1(-\infty, \infty)$ 的 2π 周期函数, *Parseval* 关系成立。
- 2) 若 f 是一个分片连续地函数, 则在 L_2 模意义下, 它可以被 2π 周期属于 C^1 的函数任意好的逼近 (实变函数中的一个

1.2 标量内积与 L_2 模

1 FOURIER级数理论的一些常用概念与结果

定理) ; 即: 存在函数序列 $\{f_\mu\}$, $f_\mu \in C^1$, 且是 2π 周期的, 使得:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \|f - f_\mu\| = 0$$

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \|f_\mu\| = \|f\|$$

。

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} (|\hat{f}(\omega)|^2 - |\hat{f}_\mu(\omega)|^2) \right| \\ & \leq (2(\|f\|^2 + \|f_\mu\|^2))^{\frac{1}{2}} \cdot \|f - f_\mu\|; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \|f\|^2 - \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \\ & \leq \lim_{\mu \rightarrow \infty} (2(\|f\|^2 + \|f_\mu\|^2))^{\frac{1}{2}} \|f - f_\mu\| \\ & \Rightarrow: \|f\|^2 = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \text{ 证毕} \end{aligned}$$

由于任意 C^1 函数可以被 C^∞ 函数任意好地近似, 所以我们也
可以使用 C^∞ 函数代替 C^1 函数。一个“坏”函数可以用一系
列光滑函数近似。

Theorem 1.6 若 $f, g \in L_2$, 则 $(f, g) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{f} \hat{g}$, 其中:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) e^{i\omega x}$$

若 f, g 是一般函数, 则在 L_2 意义下上式成立。

作业-20240912:

参考书1: page 17: 1.1.1; 1.1.2

2 周期性格点函数与差分算子

2.1 收敛速度刻画-“大O”表示

收敛速度的“大O”表示

1、函数

- 定义：假设 $\lim_{h \rightarrow 0} G(h) = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} F(h) = L$, 若存在常数 $K > 0$, 且对足够小的 h , 有 $|F(h) - L| \leq K|G(h)|$, 则可写成 $F(h) = L + O(G(h))$, 即: $F(h)$ 收敛于 L 的速度与 $G(h)$ 收敛于 0 的速度相当; 通常取 $G(h) = h^p$, $p > 0$; 且 p 越大, 收敛的速度越快

- 例子

2、序列

- 定义：假设 $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个已知收敛于 0 的序列, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 α , 若存在常数 $K > 0$, 且对大的 n , 有 $|\alpha_n - \alpha| \leq K|\beta_n|$, 则称 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 α 的速度与 $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 0 的速度相当; 或 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 以 $O(\beta_n)$ 收敛的速度收敛于 α ; 记为: $\alpha_n = \alpha + O(\beta_n)$ 。 $O(\beta_n)$ 读为: 大O β_n 通常取: $\beta_n = \frac{1}{n^p}$, $p > 0$, p 越大, 收敛的速度越快

- 例子

2.2 周期性格点函数

将 x 轴用一系列点分割, 则这些点称为格点 $x_0, x_{\pm 1}, x_{\pm 2}, \dots, x_{\pm n} \dots$;

2.3 差分算子

2 周期性格点函数与差分算子

如均匀剖分： $x_j = j \cdot h, j = 0, \pm 1, \dots$ ；其中 $h = \frac{T}{N+1}$ 是空间步长， T 为周期，这儿 $T = 2\pi$ 。函数 $u(x)$ 在格点 x_j 处的值称为格点函数值 $u_j = u(x_j)$ 。周期性格点函数 $u_j = u(x_j) = u(x_j + 2\pi) = u_{j+N+1}$ 。

2.3 差分算子

1. 平移算子 $E = E^1$ ： $(Ev)_j \equiv v_{j+1}$

平移算子 E 是线性算子：

$$E^p v = E^{p-1}(Ev) : (E^p v)_j = v_{j+p}, (E^{-1}v)_j = v_{j-1}, (E^0 v)_j = v_j ; \text{且} : (\alpha E^p + \beta E^q)v = \alpha E^p v + \beta E^q v, \alpha, \beta \text{ 分别是常数}$$

2. 前差算子 D_+ ： $D_+ \equiv \frac{E^1 - E^0}{h}$

3. 后差算子 D_- ： $D_- \equiv \frac{E^0 - E^{-1}}{h}$

4. 中心算子 D_0 ： $D_0 \equiv \frac{E^1 - E^{-1}}{2h}$

$$hD_+ e^{i\omega x_j} = (e^{i\omega h} - 1)e^{i\omega x_j} = (i\omega h + O(\omega^2 h^2))e^{i\omega x_j}$$

$$hD_- e^{i\omega x_j} = (1 - e^{-i\omega h})e^{i\omega x_j} = (i\omega h + O(\omega^2 h^2))e^{i\omega x_j}$$

$$hD_0 e^{i\omega x_j} = \frac{1}{2}(e^{i\omega h} - e^{-i\omega h})e^{i\omega x_j} = (i\omega h + O(\omega^3 h^3))e^{i\omega x_j}$$

2.4 导数的近似

$$|(D_+ - \frac{\partial}{\partial x})e^{i\omega x}| = O(\omega^2 h), \text{ 1阶近似 (1阶精度)}$$

$$|(D_- - \frac{\partial}{\partial x})e^{i\omega x}| = O(\omega^2 h), \text{ 1阶近似 (1阶精度)}$$

$$|(D_0 - \frac{\partial}{\partial x})e^{i\omega x}| = O(\omega^3 h^2), \text{ 2阶近似 (2阶精度)}$$

即： D_+, D_- 分别是 $\frac{\partial}{\partial x}$ 的1阶近似； D_0 是 $\frac{\partial}{\partial x}$ 的2阶近似；

高阶导数可以用上述算子的乘积近似；如：

$$(D_+ D_- v)_j = (D_- D_+ v)_j = h^2((E - 2E^0 + E^{-1})v)_j = h^2(v_{j+1} - 2v_j +$$

v_{j-1});

$$h^2 D_+ D_- e^{i\omega x_j} = (e^{i\omega h} - 2 + e^{-i\omega h}) e^{i\omega x_j} = (-4(\sin(\frac{\omega h}{2}))^2) e^{i\omega x_j} = (-\omega^2 h^2 + O(\omega^4 h^4)) e^{i\omega x_j}$$

\Rightarrow : $|(D_+ D_- - \frac{\partial^2}{\partial x^2}) e^{i\omega x}| = O(\omega^4 h^2)$; 即: $D_+ D_-$ 是 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 的2阶近似 (2阶精度)

2.5 有限维向量空间的模以及性质

考虑 m 维向量空间 V_m , $\forall u = (u^{(1)}, \dots, u^{(m)}) \in V_m$, $u^{(j)}, j = 1, \dots, m$ 是复数, u^* 是 u 的共轭转置, 即: $u^* = \bar{u}^T$ 。

标量内积: $\langle u, v \rangle = u^* v = \sum_{j=1}^m \bar{u}^{(j)} v^{(j)}$; 模: $|u| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$

标量内积满足下列双线性关系:

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}, \quad \langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$$

$$\langle \lambda u, v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle, \quad \langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle, \quad \lambda \text{ 是复常数}$$

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u| \cdot |v|, \quad |u + v| \leq |u| + |v|$$

$$\langle u, v \rangle \leq |u| \cdot |v| \leq \delta |u|^2 + \frac{1}{4\delta} |v|^2, \quad \text{常数 } \delta > 0$$

2.6 矩阵的模

设矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times m}$, A 的转置为: $A^T = (a_{ji})_{m \times m}$;

A 的共轭转置为: $A^* = (\bar{a}_{ji})_{m \times m}$; 其中 a_{ij} 是复数。

若 u 是 m 维向量空间的矢量, 则 A 的模为: $|A| \equiv \max_{|u|=1} |Au|$ 。

矩阵模的性质: $|Au| \leq |A| \cdot |u|$, $|A+B| \leq |A| + |B|$, $|AB| \leq |A| \cdot |B|$

若 λ, u 分别是 A 的特征值和相应的特征向量, 则有: $A \cdot u = \lambda \cdot u$ 。

A 的谱半径为 $\rho(A) \equiv \max_j |\lambda_j(A)|$, 且有: $\rho(A) \leq |A|$, 其中 λ_j 是 A 的

2.7 周期性格点函数的标量内积和模
第 j 个特征值。

2 周期性格点函数与差分算子

2.7 周期性格点函数的标量内积和模

将 $[a, b]$ 区间用 $N+1$ 个节点均分，空间步长为 h 。对于固定的 h 和 N ，这些节点处的函数值构成了一个矢量空间

由于我们主要是对 $h \rightarrow 0$ 或 $N(h) \rightarrow \infty$ 时的函数值感兴趣，而上面定义的内积，在这种极限情况下并不一定是有限的，所以需要另外定义离散的内积。

离散的内积和模： $(u, v)_h \equiv \sum_{j=0}^N \bar{u}_j v_j h$ ，及 $\|u\|_h^2 \equiv (u, u)_h$ 。

离散的内积是双线性的；即：

$$(u, v)_h = \overline{(v, u)_h}, \quad (u + w, v)_h = (u, v)_h + (w, v)_h$$

$$(\lambda u, v)_h = \bar{\lambda} (u, v)_h, \quad (u, \lambda v)_h = \lambda (u, v)_h, \quad \lambda \text{ 是复常数}$$

$$|(u, v)_h| \leq \|u\|_h \cdot \|v\|_h, \quad |(u, bv)_h| \leq \|b\|_\infty \cdot \|u\|_h \cdot \|v\|_h, \quad \|b\|_\infty = \max_j |b_j|$$

$$\|u + v\|_h \leq \|u\|_h + \|v\|_h, \quad |\|u\|_h - \|v\|_h| \leq \|u - v\|_h$$

若 u, v 是连续函数在格点的投影，则有：

$$\lim_{h \rightarrow 0} (u, v)_h = (u, v), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|u\|_h^2 = \|u\|^2$$

这个结论对 C^1 函数也是有效的

2.8 算子模

$$\|Q\|_h = \sup_{\|u\|_h=1} \|Qu\|_h$$

2.9 矢量格点函数的标量内积和模

对于矢量 $u = (u^{(1)}, \dots, u^{(m)})^T$ 的格点函数，定义其内积和模：

$$(u, v)_h \equiv \sum_{j=0}^N \langle u_j, v_j \rangle h, \quad \text{及} \quad \|u\|_h^2 \equiv (u, u)_h。$$

2.9 矢量格点函数的标量内积和模
如此定义的内积的性质；

2 周期性格点函数与差分算子

$$(u, v)_h = \overline{(v, u)_h}, \quad (u + w, v)_h = (u, v)_h + (w, v)_h$$

$$(\lambda u, v)_h = \bar{\lambda}(u, v)_h, \quad (u, \lambda v)_h = \lambda(u, v)_h, \quad \lambda \text{ 是复常数}$$

$$|(u, v)_h| \leq \|u\|_h \cdot \|v\|_h, \quad \|u + v\|_h \leq \|u\|_h + \|v\|_h, \quad | \|u\|_h - \|v\|_h | \leq \|u - v\|_h$$

$$\text{若 } A \text{ 是常系数矩阵, 则有: } |(Au, v)_h| \leq |A| \cdot \|u\|_h \cdot \|v\|_h$$

$$\text{若 } A = A_j \text{ 是一个节点函数矩阵, 则有: } |(Au, v)_h| \leq \cdot \max_j |A_j| \cdot \|u\|_h \cdot \|v\|_h$$

3 三角插值

对给定的未知函数 $f(x)$ 的若干点的函数值构造 $f(x)$ 的近似函数 $\varphi(x)$ 插值：构造上述近似函数 $\varphi(x)$ 的一个过程。其中近似函数 $\varphi(x)$ 称为“插值函数”。当“插值函数”为“三角函数”，则称为三角插值

3.1 三角插值

令 $u \in P_h$ 是一个 2π 周期的格点函数

问题：将 $[0, 2\pi]$ 均分为 $N + 1$ 个小区域，节点为 x_0, \dots, x_N ， $x_j = j \cdot h$ ， $j = 0, 1, \dots, N$ ， $h = \frac{2\pi}{N+1}$ ， $u_j = u(x_j)$ ， $u_j = u_{j+1+N}$ 。寻求唯一（存在唯一）的 $\phi(x)$ 使得 $u_j = \phi(x_j)$ ， $u_j = u_{j+1+N}$ ，且 $\phi(x)$ 是三角函数：

- N 是偶数，则三角多项式是对称的，即从 $-\frac{N}{2}$ 到 $\frac{N}{2}$ ：
$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{u}(\omega) e^{i\omega x};$$
其中 $\tilde{u}(\omega)$ 由 $u_j = \phi(x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{u}(\omega) e^{i\omega x_j}$ ， $j = 0, 1, \dots, N$ 确定。
- N 是奇数，则三角多项式是非对称的，且 $-\frac{N+1}{2} + 1 \leq \omega \leq \frac{N+1}{2}$

为方便起见，我们假设 N 是偶数

Lemma 3.1 指数函数 $e^{i\nu x}$ ， $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \frac{N}{2}$ 关于离散内积是正交的，即：

$$(e^{i\nu x}, e^{i\mu x})_h = \begin{cases} 0, & 0 < |\nu - \mu| \leq N; \\ 2\pi, & \nu = \mu \end{cases}$$

Theorem 3.1 满足 $u_j = \phi(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, N$, 的三角插值:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{u}(\omega) e^{i\omega x}$$

是唯一的, 且

$$\tilde{u}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{i\omega x}, u)_h$$

Theorem 3.2 若 $\phi(x)$ 、 $\psi(x)$ 分别满足: $\phi(x_j) = u_j$, $\psi(x_j) = v_j$, $j = 0, 1, \dots, N$, 的三角插值:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{u}(\omega) e^{i\omega x}, \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{v}(\omega) e^{i\omega x}; \quad \text{则有:}$$

$$(1) (u, v)_h = \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{u}(\omega) \tilde{v}(\omega) = (\phi, \psi)$$

$$(2) \|\phi\|^2 = \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} |\tilde{u}(\omega)|^2 = \|u\|_h^2$$

$$(3) \|D_+^l u\|_h^2 \leq \left\| \frac{d^l}{dx^l} \phi \right\|^2 \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2l} \|D_+^l u\|_h^2, \quad l = 0, 1, \dots.$$

3.2 $\hat{u}(\omega)$ 与 $\tilde{u}(\omega)$ 关系

考虑 2π 周期的周期函数 u , 假设 u 可以用 Fourier 级数表示,

$$\text{即: } u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega) e^{i\omega x},$$

$$\text{其格点函数的三角插值为: } \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{u}(\omega) e^{i\omega x};$$

讨论 $\hat{u}(\omega)$ 与 $\tilde{u}(\omega)$ 关系

Lemma 3.2 若 $|\omega| \leq \frac{N}{2}$, $\tilde{u}(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega + l(N+1))$ 。尤其是:

若 $|\omega| > \frac{N}{2}$, $\hat{u}(\omega) = 0$; 则有: 三角插值 $\phi(x) = u(x)$ 。

Theorem 3.3 假设 u 是 2π 周期的周期函数, 其 Fourier 系数满足下列关

系: $|\hat{u}(\omega)| \leq \frac{c}{|\omega|^m}$, $\omega \neq 0$, $m > 1$; 则有:

$$\|u(\cdot) - \phi(\cdot)\|_{\infty} \leq \frac{2c}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{N}{2}\right)^{1-m} \left(\frac{1}{m-1} + \frac{2(N+1)}{N} B_m\right),$$

3.2 $\hat{u}(\omega)$ 与 $\tilde{u}(\omega)$ 关系

3 三角插值

其中 $B_m = \sum_{j=1}^{\infty} (\frac{1}{2j-1})^m$, $u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega) e^{i\omega x}$,
 $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{u}(\omega) e^{i\omega x}$, $\|u(\cdot)\|_{\infty} = \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} |u(x)|$ 。

推论：存在常数 C_l ，使得：

$$\left\| \frac{d^l}{dx^l} u(x) - \frac{d^l}{dx^l} \phi(x) \right\|_{\infty} \leq C_l \left(\frac{N}{2}\right)^{1+l-m}, \quad 1+l < m$$

作业-20240914:

参考书1: P24, 1.2.1、1.2.2;

参考书1, p37:1.5.1, 1.5.2

补充作业:

试证：参考书1中P26的定理1.3.3中公式 (1.3.4)；以及当N为奇数时，写出P26页相应的定理1.3.2，并证明之。

大作业1 (20240914)

求下述偏微分方程初值问题在时刻 $t = 0.3$ 的近似解：

$$\begin{cases} u_t = u_x, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(2\pi x), & -\infty < x < \infty, \\ \text{周期性边界条件, 且周期为: } 1 \end{cases}$$

该方程的精确解为 $u(x, t) = \sin(2\pi(x + t))$ ，对时空区域 $[0, 1], [0, 1]$ 剖分(均分)如下：

时间： $t_n = n \cdot \Delta t$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, 时间步长 $\Delta t = \frac{1}{N}$ 。

空间： $x_j = j \cdot \Delta x$, $j = 0, 1, 2, \dots, J$, 空间步长 $\Delta x = \frac{1}{J}$ 。

记 $v_j^n \approx u(x_j, t_n)$ ，时间导数近似 $u_t \approx \frac{u(x, t+\Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$ ，空间导数分别

用前差 $u_x \approx \frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}$ 和 $u_x \approx \frac{u(x+\Delta x,t)-u(x-\Delta x,t)}{2\Delta x}$ 。得到离散方程A: $v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(v_{j+1}^n - v_j^n)$ 和离散方程B: $v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$ 。

定解条件: 初始条件: $v_j^0 = \sin(2\pi x_j)$, 边界条件: $v_j^n = v_{j+J}^n$ 。

问题1: 取 $\Delta x = 0.02$, $\Delta t = 0.01$, 分别用离散方程A和离散方程B求上述偏微分方程初值问题在时刻 $t = 0.3$ 的近似解和精确解(画图)。

问题2: 取 $\Delta x = 0.02$, $\Delta t = 0.03$, 分别用离散方程A和离散方程B求上述偏微分方程初值问题在时刻 $t = 0.3$ 的近似解, 并画图比较精确解和精确解(画图)。

问题3: 对上述实验结果进行描述, 分析并评论。

偏微分方程数值解

中国科学技术大学 数学学院

张梦萍

办公室：东区-管理科学楼1227室
0551-63601855; mpzhang@ustc.edu.cn

付杨鑫

(办公室：东区-管理科学楼1212室)

李顺

(办公室：东区-管理科学楼1212室)

第一部分：一维线性偏微分方程初值问题的有限差分方法

第二章：模型方程—对流方程

本章以模型方程的初值问题为例，介绍有限差分方法的构造，及其基本概念、性质和理论

1 对流方程的初值问题

1.1 相关回顾

一、函数的Fourier级数的收敛性

Theorem 1.1 假设 $f \in C^1_{(-\infty, \infty)}$ 是 2π 周期的周期函数，则 $f(x)$ 可

由如下Fourier级数表示： $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}$ 。

其中，Fourier系数 $\hat{f}(\omega)$ 为： $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i\omega x} dx$ 。

且该Fourier级数一致收敛性于 $f(x)$

Theorem 1.2 假设 f 是 2π 周期、分片 C^1 函数。若在 $a < x < b$

上 $f \in C^1_{(a,b)}$ ，则在 (a,b) 上的任意子区间 $a < \alpha \leq x \leq \beta < b$

上，其Fourier级数一致收敛性于 $f(x)$ 。在间断点 x 处，Fourier级

数收敛性于 $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$

Theorem 1.3 若 $g(x)$ 是 2π 周期函数，假设它的 p 阶导数是分片 C^1 函

数，则其Fourier系数满足：

$$|\hat{g}(\omega)| \leq \text{constant}/(|\omega|^{p+1} + 1)$$

二、函数的标量内积与 L_2 模

- 函数 f 与 g 的内积: $(f, g) = \int_0^{2\pi} \bar{f}(x)g(x)dx$,

- 函数 f 的 L_2 模: $\|f\|_2 = (f, f)^{\frac{1}{2}} = (\int_0^{2\pi} \bar{f}(x)f(x)dx)^{\frac{1}{2}} = (\int_0^{2\pi} |f|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$

- 序列 $\{f_\mu\}_{\mu=1}^\infty$ 在平均意义下 (L_2 模意义下) 收敛于 f , 即:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \|f_\mu - f\| = 0$$

Lemma 1.1 指数函数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 关于 L_2 标量内积是标准正交的, 即:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{imx} \right) = \begin{cases} 0 & \text{当 } m \neq n; \\ 1 & \text{当 } m = n \end{cases}$$

Theorem 1.4 (*Bessel*不等式)

对所有的 N , 有: $\sum_{\omega=-N}^N |\hat{f}(\omega)|^2 \leq \|f\|^2$ (即*Bessel*不等式)。

此外, 当且仅当*Parseval*关系成立 (即: $\sum_{\omega=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 = \|f\|^2$) 时, 有:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} (\|f\|^2 - \sum_{\omega=-N}^N |\hat{f}(\omega)|^2) = 0;$$

其中 $S_N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-N}^N \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}$, $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-i\omega x} f(x)dx$ 。

Theorem 1.5 任意分片连续地函数 f 都能展开成在 L_2 模意义下收

敛于 f 的*Fourier*级数, 即: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}$, $\hat{f}(\omega) =$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-i\omega x} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-i\omega x}, f(x))$; 且*Parseval*关系成立。

三、三角插值

Lemma 1.2 指数函数 $e^{i\nu x}$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \frac{N}{2}$ 关于离散内积是正交的, 即:

$$(e^{i\nu x}, e^{i\mu x})_h = \begin{cases} 0, & 0 < |\nu - \mu| \leq N; \\ 2\pi, & \nu = \mu \end{cases}$$

Theorem 1.6 满足 $u_j = \phi(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, N$, 的三角插值:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{u}(\omega) e^{i\omega x}$$

是唯一的。

Theorem 1.7 若 $\phi(x)$ 、 $\psi(x)$ 分别满足: $\phi(x_j) = u_j$, $\psi(x_j) = v_j$, $j = 0, 1, \dots, N$, 的三角插值; $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{u}(\omega) e^{i\omega x}$, $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{v}(\omega) e^{i\omega x}$; 则有:

- (1) $(u, v)_h = \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{u}(\omega) \tilde{v}(\omega) = (\phi, \psi)$
- (2) $\|\phi\|^2 = \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} |\tilde{u}(\omega)|^2 = \|u\|_h^2$
- (3) $\|D_+^l u\|_h^2 \leq \|\frac{d^l}{dx^l} \phi\|^2 \leq (\frac{\pi}{2})^{2l} \|D_+^l u\|_h^2$, $l = 0, 1, \dots$ 。

四、 $\hat{u}(\omega)$ 与 $\tilde{u}(\omega)$ 关系

Theorem 1.8 假设 u 是 2π 周期的周期函数, 其 Fourier 系数满足下列关系: $|\hat{u}(\omega)| \leq \frac{c}{|\omega|^m}$, $\omega \neq 0$, $m > 1$; 则有:

$$\|u(\cdot) - \phi(\cdot)\|_\infty \leq \frac{2c}{\sqrt{2\pi}} (\frac{N}{2})^{1-m} (\frac{1}{m-1} + \frac{2(N+1)}{N} B_m),$$

$$\text{其中 } B_m = \sum_{j=1}^{\infty} (\frac{1}{2j-1})^m, \quad u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega) e^{i\omega x},$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{u}(\omega) e^{i\omega x}, \quad \|u(\cdot)\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} |u(x)|。$$

推论: 存在常数 C_l , 使得:

$$\|\frac{d^l}{dx^l} u(x) - \frac{d^l}{dx^l} \phi(x)\|_\infty \leq C_l (\frac{N}{2})^{1+l-m}, \quad 1+l < m$$

1.2 对流方程的初值问题的解

考虑常系数的对流方程的初值问题：

$$\begin{cases} u_t = u_x & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (*)$$

其中 $f(x)$ 是光滑的 2π 周期的周期函数

1. 初值是一个谐波，对流方程的初值问题(*)的解
2. 一般情况的初值（如：初值为 2π 周期的光滑函数），对流方程的初值问题(*)的解
3. 对流方程的初值问题(*)解的特性
 \Rightarrow ：问题(*)存在特征线，且特征线为直线，解沿特征线是不变的。
 初值沿特征线以有限速度传播。

2 对流方程的初值问题的有限差分方法—二层格式

1. 剖分

由于本问题是 2π 周期的，所以将区域 $[0, 2\pi]$ 用 $N + 1$ 个节点 x_j 均匀剖分，即： $x_j = j \cdot h$ ， $j = 0, 1, \dots, J$ ；空间步长为： $h = \frac{2\pi}{J}$ ；
 时间离散：均匀剖分，取时间步长为 Δt ， $t_n = n \cdot \Delta t$ ， $n = 0, 1, \dots, N$ 。

格点函数值：解 $u(x, t)$ 在 (x, t) 平面上的格点 $P = (x_j, t_n)$ 处的值记为： $u_j^n = u(x_j, t_n)$ ；近似值记为： $v_j^n \simeq u_j^n$ ；

由于 u 是 2π 周期的，所以 v 也是 2π 周期的；故有： $v_j^n = v_{j+J}^n$

2. 方程离散—差商近似微商：

1阶导数 \approx 1阶差商（前差-F、后差-B、中心差-C）

FTCS 格式（有限差分方法、有限差分方程、离散方程）：

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{2h}(v_{j+1}^n - v_j^n) = (I + \Delta t D_0)v_j^n \equiv Qv_j^n \\ v_j^0 = f_j = f(x_j), \quad j = 0, \dots, J \end{cases} \quad (*1)$$

3. 差分方程(*1)的解

a. 初值是一个谐波，(*1)的近似解

b. 初值可以用一个三角插值表示，(*1)的近似解

c. 讨论初值出现小扰动时，(*1)的近似解的变化。

d. 稳定性

在实际计算中，误差是不可避免的。

Definition 2.1：考虑一种数值方法，若满足：

$\lim_{\Delta t, h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t_n \leq T} |\hat{Q}^n| \leq K(T)$ ，则称该方法是稳定的

e. FTCS格式的修正—加人工粘性

f. 二种常用的格式

Lax-Friedrich 格式：（取： $\sigma = \frac{h}{2\Delta t} = \frac{1}{2\lambda}$ ， $\lambda = \frac{\Delta t}{h}$ ）

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{2}(v_{j-1}^n + v_{j+1}^n) + \Delta t D_0 v_j^n = (I + \Delta t D_0)v_j^n + \frac{h^2}{2} D_+ D_- v_j^n$$

2 对流方程的初值问题的有限差分方法—二层格式

Lax-Wendroff格式：（取： $\sigma = \frac{1}{2}\lambda = \frac{\Delta t}{2h}$ ）

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \Delta t D_0 v_j^n + \frac{\Delta t^2}{2} D_+ D_- v_j^n$$

g. 考虑一般的差分近似（单步格式）

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = Q v_j^n, & Q = \sum_{\mu=-r}^s A_\mu(\Delta t, h) E^\mu \\ v_j^0 = f_j \end{cases}$$

其中 A_μ 是 $\Delta t, h$ 的有理函数， $r, s \geq 0$ ，且是整数；

即：用 $r + s + 1$ 个函数 $v_{j-r}^n, \dots, v_{j+s}^n$ 计算 v_j^{n+1} 。

Theorem 2.1 在有限时间区域 $0 \leq t \leq T$ ，考虑 $\Delta t, h \rightarrow 0$ 时，差分近似： $v_j^{n+1} = Q v_j^n$ ， $Q = \sum_{\mu=-r}^s A_\mu(\Delta t, h) E^\mu$ ， $v_j^0 = f_j$ ，假设：

(a) 初值 f 是（分片连续）可展开为 *Fourier* 级数（ $\in L_2$ ），且其三角插值收敛于 f

(b) 差分近似是稳定的，即存在常数 K_s ，使得对所有的 Δt 和 h 有：

$$\sup_{0 \leq t_n \leq T} |\hat{Q}^n| \leq K_s$$

(c) 差分近似是相容的，即对每个固定的 ω ，有：

$$\lim_{\Delta t, h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t_n \leq T} |\hat{Q}^n(\xi) - e^{i\omega t_n}| = 0$$

则：差分近似解的三角插值收敛于微分方程的解，即：

$$\lim_{\Delta t, h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t_n \leq T} \|u(\cdot, t_n) - \psi_N(\cdot)\| = 0$$

2 对流方程的初值问题的有限差分方法—二层格式

其中 $u(\cdot, t_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x_j+t_n)} \hat{u}^n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x_j} \hat{f}(\omega)$

，差分近似解的三角插值为：

$$\psi_N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} e^{i\omega x_j} \hat{v}^n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} e^{i\omega x_j} \hat{Q}^n \hat{f}(\omega)。$$

证明：

由于初值 f 是（分片连续）可展开为Fourier级数（ $\in L_2$ ），

根据定理1.5，可见Parseval关系成立

$$\sum_{\omega=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 = \|f\|^2$$

取 M ，使得 $0 < M < \frac{N}{2}$ ，则：

$$\|u(\cdot, t_n) - \psi_N(\cdot)\|^2 = \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} |e^{i\omega t_n} \hat{f}(\omega) - \hat{Q}^n \tilde{f}(\omega)|^2 + \sum_{|\omega| > \frac{N}{2}} |\hat{f}(\omega)|^2$$

$$\leq \sum_{\omega=-M}^M |e^{i\omega t_n} \hat{f}(\omega) - \hat{Q}^n \tilde{f}(\omega)|^2 + \sum_{M < |\omega| \leq \frac{N}{2}} |e^{i\omega t_n} \hat{f}(\omega) - \hat{Q}^n \tilde{f}(\omega)|^2 + \sum_{|\omega| > \frac{N}{2}} |\hat{f}(\omega)|^2$$

$$(|a - b|^2 \leq |a|^2 + |b|^2 = 2|a| \cdot |b| \leq 2(|a|^2 + |b|^2))$$

$$\leq I + 2 \sum_{M < |\omega| \leq \frac{N}{2}} |\hat{Q}^n \tilde{f}(\omega)|^2 + 2 \sum_{M < |\omega| \leq \frac{N}{2}} |\hat{f}|^2 + \sum_{|\omega| > \frac{N}{2}} |\hat{f}(\omega)|^2$$

$$\sum_{M < |\omega| \leq \frac{N}{2}} + \sum_{|\omega| > \frac{N}{2}} = \sum_{|\omega| > M}$$

$$= I + 2 \sum_{M < |\omega| \leq \frac{N}{2}} |\hat{Q}^n \tilde{f}(\omega)|^2 + \sum_{M < |\omega| \leq \frac{N}{2}} |\hat{f}|^2 + \sum_{|\omega| > M} |\hat{f}(\omega)|^2$$

$$\leq I + 2(\sum_{M < |\omega| \leq \frac{N}{2}} + \sum_{|\omega| > \frac{N}{2}}) |\hat{Q}^n \tilde{f}(\omega)|^2 + (\sum_{M < |\omega| \leq \frac{N}{2}} + \sum_{|\omega| > \frac{N}{2}}) |\hat{f}|^2 + \sum_{|\omega| > M} |\hat{f}(\omega)|^2$$

$$= I + 2 \sum_{M < |\omega|} |\hat{Q}^n \tilde{f}(\omega)|^2 + 2 \sum_{M < |\omega|} |\hat{f}|^2 = I + II + III$$

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{\omega=-M}^M |e^{i\omega t_n} \hat{f}(\omega) - \hat{Q}^n \tilde{f}(\omega) + \hat{Q}^n \hat{f}(\omega) - \hat{Q}^n \hat{f}(\omega)|^2 \\
 &\leq 2 \sum_{\omega=-M}^M (|\hat{Q}^n(\tilde{f} - \hat{f})|^2 + |\hat{f}|^2 |\hat{Q}^n - e^{i\omega t_n}|^2)
 \end{aligned}$$

(由假设 (a) 和 (c) 可得:)

$$\begin{aligned}
 \lim_{M \rightarrow \infty} I &\leq 2 \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{\omega=-M}^M (|\hat{Q}^n(\tilde{f} - \hat{f})|^2 + |\hat{f}|^2 |\hat{Q}^n - e^{i\omega t_n}|^2) \\
 &= 2 \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{\omega=-M}^M |\hat{Q}^n(\tilde{f} - \hat{f})|^2 + 2 \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{\omega=-M}^M |\hat{f}|^2 |\hat{Q}^n - e^{i\omega t_n}|^2 = 0
 \end{aligned}$$

(由假设 (a) 可得:)

$$\lim_{M \rightarrow \infty} II = 2 \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{M < |\omega|} |\hat{f}|^2 = 0$$

(由假设 (b) 可得:)

$$\begin{aligned}
 \lim_{M \rightarrow \infty} III &= 2 \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{M < |\omega|} |\hat{Q}^n|^2 \cdot |\tilde{f}(\omega) - \hat{f} + \hat{f}|^2 \\
 &\leq 4K_s^2 \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{M < |\omega|} (|\tilde{f} - \hat{f}|^2 + |\hat{f}|^2) \\
 &= 4K_s^2 (\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{M < |\omega|} |\tilde{f} - \hat{f}|^2 + \lim_{M \rightarrow \infty} II) \\
 &= 0。証毕
 \end{aligned}$$

3 对流方程的初值问题的有限差分格式—多层格式

一、常系数对流方程的初值问题的常见的有限差分格式：

考虑常系数的对流方程的初值问题：

$$\begin{cases} u_t = u_x & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

其中 $f(x)$ 是 2π 周期的周期函数。

1. 显示格式：由已知层的函数值直接得到未知层的函数值

2. 隐式格式：不能由已知层的函数值直接得到未知层的函数值

3. 单步格式（二层格式）：格式只涉及二个时间层

4. 多步格式（三层、及三层以上格式）格式：涉及三个，或三个以上时间层

二、蛙跳格式（即：CTCS格式）

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^{n-1} + \frac{\Delta t}{h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) \\ v_j^0 = f_j = f(x_j) \end{cases}。$$

这儿 v_j^1 需要通过其它单步格式得到，如FTCS格式，即： $v_j^1 = v_j^0 + \frac{\Delta t}{2h}(v_{j+1}^0 - v_{j-1}^0)$ ， $v_j^0 = f_j$ 。

三、带源项的PDE初值问题 $\begin{cases} u_t = u_x - au & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$ 的

蛙跳格式

3 对流方程的初值问题的有限差分格式—多层格式
这儿 $a > 0$ ，且为常数。

作业-20240923：参考书1：P50：2.1.1-2.1.3

大作业-20240923 针对下述偏微分方程初值问题：

$$\begin{cases} u_t = u_x, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(2\pi x), & -\infty < x < \infty, \\ \text{Periodic boundary condition, } T = 1. \end{cases}$$

该方程的精确解为 $u(x, t) = \sin(2\pi(x + t))$ 。

对时空区域做均匀剖分，其中 $x_j = j \cdot h$ ， $j = 0, 1, 2, \dots, J$ ，时间步长 $h = \frac{1}{J}$ 。令 $r = \frac{\Delta t}{h}$ 。

问题1：取 $r = 0.5$ ， $J = 80$ ，分别取 $T = 0.1, 0.4, 0.8, 1.0$ 。分别用FTCS、Lax-Friedrich和Lax-Wendroff方法计算其数值解。绘出最大误差随时间变化图；并给出评论。

问题2：取 $r = 0.5$ ， $T = 1.0$ ，分别取 $J = 10, 20, 40, 80, 160$ 。用Lax-Wendroff方法计算其数值解，并与精确解画在同一图上进行比较，给出评论。

4 迎风格式与CFL条件

考虑常系数的对流方程的初值问题：

$$\begin{cases} u_t = u_x & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}; \text{ 其解为 } u(x, t) = f(x + t)。$$

一、 $u_t = u_x$ 的FTBS格式

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{2h}(v_j^n - v_{j-1}^n) = (I + \Delta t D_-)v_j^n \equiv Qv_j^n \\ v_j^0 = f_j = f(x_j), \quad j = 0, \dots, J \end{cases}$$

该格式无法满足稳定性要求；即：该方法是不稳定的

$u_t = u_x$ 的FTBS格式不稳定的原因何在？如何构造稳定的格式？

二、 常系数对流方程初值问题的解的依赖区

沿直线 $x + t = \text{constant}$ 解不变。该直线称为特征线。在任意点 $P = (x, t)$ 处的解，由过该点的特征线与 $t = 0$ 的交点 $P_0 = (x_0, 0)$ 点的值 $u|_{P_0}$ 确定，即： $u|_P = u|_{P_0}$ 。

$D_P = \{P_0\}$ 称为 P 点的解的依赖区。若取 $P = (x_j, t_{n+1})$ ，则 $x_0 = x_j + t_{n+1}$ 。

三、 常系数对流方程的初值问题的有限差分格式的数值解的依赖区：

常系数对流方程初值问题的FTCS格式在 $P = (x_j, t_{n+1})$ 点的近似解 v_j^{n+1} 依赖于初始时刻的点：

$x_{j-n-1}, x_{j-n}, \dots, x_j, \dots, x_{j+n}, x_{j+n+1}$ 的近似解。

则称 $N_P = \{x_{j-n-1}, x_{j-n}, \dots, x_j, \dots, x_{j+n}, x_{j+n+1}\}$ 为 P 点数值解的依赖区；

四、 CFL条件

CFL条件：PDE解的依赖区 D_P 必须被包含在数值解的依赖

区 N_P : $D_P \subseteq N_P$

Theorem 4.1 CFL条件是有限差分格式收敛的必要条件

CFL条件适合于变系数情形，甚至是非线性双曲问题；它是这些格式收敛的必要条件！

五、迎风格式

迎风格式：特征线方向与模板方向一致的格式；逆风格式：特征线方向与模板方向不一致的格式

Example 4.1 讨论 $u_t + au_x = 0$ ， a 是常数，的迎风格式

作业-20240926: 针对方程 $u_t + u_x = 0$ ，导出其解的依赖区；其蛙跳格式的数值解的依赖区；以及CFL条件

大作业-20240926

针对下述偏微分方程初值问题：

$$\begin{cases} u_t = u_x, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(2\pi x), & -\infty < x < \infty, \\ \text{Periodic boundary condition, } T = 1. \end{cases} \quad (1)$$

该方程的精确解为 $u(x, t) = \sin(2\pi(x + t))$ 。对时空区域做均匀剖分，其中 $x_j = j \cdot h$ ， $j = 0, 1, 2, \dots, J$ ，时间步长 $h = \frac{1}{j}$ 。令 $\lambda = \frac{\Delta t}{h}$ 。

4 迎风格式与CFL条件

问题：取 $T = 1.0$, $J = 80$, 分别取 $\lambda = 0.5, 1.5$ 。用CTCS格式 (v_j^1 用FTFS格式) 计算其数值解, 并与精确解画在同一图上进行比较, 给出评论。

5 隐式格式

一、BTCS格式

讨论 $\begin{cases} u_t = u_x & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$ 的BTCS格式；其中该问题的初值、解均为 2π 周期的周期函数。

BTCS格式： $\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{2h}(v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}) \\ v_j^0 = f(x_j), j = 0, 1, \dots, J, v_J^n = v_{j+J+1}^n \end{cases} \Rightarrow$ 要得到

问题的解，则需要每个时间步求解一个 $J+1$ 阶线性代数方程组。

\Rightarrow ：该格式是无条件稳定的——这是一个典型的隐式格式；对时间步长没有约束，可以选择较大的时间步长。大多数全隐式格式都是无条件稳定的

二、Crank-Nicolson格式

$$u_t = u_x = \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2}u_x,$$

$$(I - \frac{\Delta t}{2}D_0)v_j^{n+1} = (I + \frac{\Delta t}{2}D_0)v_j^n, \quad j = 0, \dots, J$$

\Rightarrow ：该格式是无条件稳定的，且对所有的 ω （频率），振幅不变。

三、 θ -方法

$$u_t = u_x = \theta u_x + (1 - \theta)u_x,$$

$$(I - \Delta t \theta D_0)v_j^{n+1} = (I + \Delta t(1 - \theta)D_0)v_j^n, \quad j = 0, \dots, J, \quad \text{其中 } 0 \leq \theta \leq 1.$$

\Rightarrow ： $\theta \geq \frac{1}{2}$ 时，该格式是无条件稳定的。通常取： $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ 。

6 误差

预备知识——Taylor展开定理：

$$f(x \pm h) = f(x) \pm hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots + \frac{(-h)^k}{k!}f^{(k)}(x) + \frac{(-h)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\xi)$$

，其中： ξ 介于 x 与 $x+h$ 之间。

一、截断误差

Definition 6.1 截断误差：

与差分方程等价的PDE与源PDE的差。即：差分方程中近似解 v_j^n 用精确解 u_j^n 代替后得到的与差分方程等价的PDE与源PDE的差。

\Rightarrow ：截断误差是数值方法精度的度量。

二、格式（方法）的精度

Definition 6.2 数值格式的精度：

若数值格式的截断误差为： $T = O(h^p + \Delta t^q)$ ，则称该数值格式是 (p, q) 阶精度的；即：该格式对空间是 p 阶精度，对时间是 q 阶精度。

三、整体误差

整体误差：数值解与精确解之间的差，即： $e_j^n = v_j^n - u_j^n$

作业-20240930：参考书1：P58, 2.3.1；P61：2.4.1-2.4.2

7 基于PDE的积分形式的有限差分格式的构造

常见的数值积分公式（回顾）

- 端点均为积分节点

$n = 1$ （梯形公式）：

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) - \frac{h^3}{12}f''(\xi), \quad h = x_1 - x_0, \quad \xi \in (x_0, x_1)$$

$n = 2$ （Simpson公式）：

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi),$$

$$h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0, \quad \xi \in (x_0, x_2)$$

- 端点均不为积分节点

$n = 0$ （中点公式）：

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x) = 2hf(x_0) + \frac{h^3}{3}f''(\xi), \quad h = x_1 - x_0 = x_0 - x_{-1}, \quad \xi \in (x_{-1}, x_1)$$

$n = 1$ ：

$$\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x) = \frac{3h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + \frac{3h^3}{4}f''(\xi),$$

$$h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = x_0 - x_{-1}, \quad \xi \in (x_{-1}, x_2)$$

- 积分节点仅为一个端点

$$\int_a^b f(x) = (b-a)f(a) + \frac{1}{4}(b-a)^2f'(\xi), \quad \xi \in (a, b)$$

针对 $u_t + au_x = 0$ ， a 为常数， $(x, t) \in \bar{D} = [0, 1] \times [0, T]$ ，基于其积分形式，构造以格点处的函数为未知数的有限差分格式。

一、剖分

用节点 $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_J = 1$ 将 $[0, 1]$ 分成 J 个小区域(cell)；

则涉及格点 x_j 的cell为： $I_j = [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ ， $j = 1, \cdots, J-1$ 。

7 基于PDE的积分形式的有限差分格式的构造

用节点 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ 将 $[0, T]$ 分成 N 个小区域 $[t_n, t_{n+1}]$, $n = 0, \dots, N - 1$ 。

二、方程离散

取时空区域 $\Omega_j^n = [t_n, t_{n+1}] \times [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ 为控制区域（控制体）。

讨论控制体 Ω_j^n 上, $u_t + au_x = 0$ 的积分形式:

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (u^{n+1} - u^n) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} a(u_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}) dt = 0$$

该方程式是精确成立的。用不同的数值积分公式对上述方程中的积分做近似, 得到不同的有限差分格式

取时空区域 $\Omega_j^n = [t_{n-1}, t_{n+1}] \times [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ 为控制区域（控制体）。

讨论控制体 Ω_j^n 上, $u_t + au_x = 0$ 的积分形式:

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (u^{n+1} - u^{n-1}) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} a(u_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}) dt = 0$$

该方程式精确成立的。用不同的数值积分公式对上述方程中的积分做近似, 得到不同的有限差分格式

8 变系数对流方程

$$u_t + a(x, t) \cdot u_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

。其中 $a(x, t)$ 为已知的连续函数。其初值问题的解稳定、存在唯一。

特征线方程：

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t), \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}u(x(t), t) = 0.$$

特征线为互不相交的曲线，解 $u(x, t)$ 沿着特征线保持不变

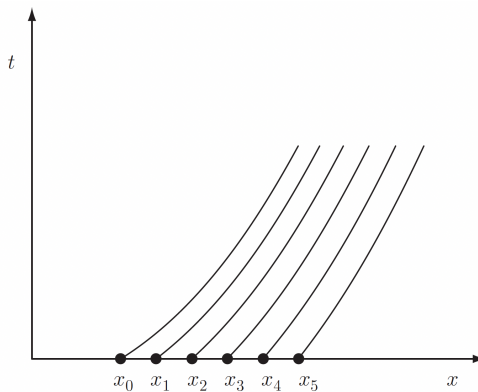


Fig. 4.1. Typical characteristics for $u_t + a(x, t)u_x = 0$.

可以将常系数对流方程的FDM推广到变系数方程

- Lax-Friedrichs格式

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{2}(v_{j-1}^n + v_{j+1}^n) - \frac{1}{2}ra_j^n(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$$

$$\text{或: } v_j^{n+1} = \frac{1}{2}(1 + a_j^n r)v_{j-1}^n + \frac{1}{2}(1 - a_j^n r)v_{j+1}^n$$

具有 (2, 1) 阶局部截断误差。

由于 $a_j^n = a(x_j, t_n)$ 随 j, n 改变，所以不能直接用Fourier方法分析其稳定性。可采用能量法分析其稳定性。

若 $|\frac{\partial a}{\partial x}| \leq M, x \in \mathbf{R}, t \in [0, T] \Rightarrow: |a_{j+1}^n - a_{j-1}^n| \leq 2Mh$ (中值定理), 则有:

$$\|v^{n+1}\|_h^2 \leq (1 + M\Delta t)\|v^n\|_h^2 \leq \dots \leq e^{MT}\|v^0\|_h^2 = e^{MT}\|u^0\|_h^2$$

此时, 格式稳定

对变系数线性对流方程的有限差分方法, 除用能量法分析稳定性外, 简单实用的“冻结系数法”也是分析其稳定性的常用方法。

- 迎风格式

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{a_j^n r}{2}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + \frac{|a_j^n| r}{2}(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)$$

具有 (1, 1) 阶局部截断误差。用“冻结系数法”可得其稳定性条件为: $\max_j |a_j^n| r \leq 1$

9 一阶线性偏微分方程组

9.1 常系数一阶线性偏微分方程组

考虑常系数一阶偏微分方程组：

$$U_t + A \cdot U_x = 0 \quad (*)$$

其中 $U = U(x, t) = (u^{(1)}, \dots, u^{(p)})^T$, $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 为常系数矩阵

一、Lax-Friedrichs格式

$$V_j^{n+1} = \frac{1}{2}(V_{j-1}^n + V_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2h}A(V_{j+1}^n - V_{j-1}^n)$$

稳定性分析：

取谐波解： $V_j^n = \hat{V}^n e^{i\omega jh}$ 代入上式，得： $\hat{V}^{n+1} = \hat{G} \cdot \hat{V}^n = \dots = \hat{G}^n \cdot \hat{V}^0$ ；其中增长矩阵（放大因子）为：

$$\hat{G} = \frac{1}{2}(e^{i\omega h} + e^{-i\omega h})I - \frac{\Delta t}{2h}(e^{i\omega h} - e^{-i\omega h})A = (\cos \omega h)I - i(r \sin \omega h)A$$

其中 I 为 p 阶单位矩阵。若 A 的特征值为 λ_m ，则 G 的特征值

为： $\mu_m = \cos \omega h - i(r \sin \omega h)\lambda_m$, $m = 1, \dots, p$ ；即： $|\mu_m|^2 =$

$$1 - (1 - r^2 \lambda_m^2)(\sin \omega h)^2$$

\Rightarrow ：若 $r\rho(A) \leq 1$ ；则有 $\rho(\hat{G}) \leq 1$ ；即该方法稳定。其中 $\rho(\hat{G})$, $\rho(A)$ 分别是矩阵 \hat{G} , A 的谱半径

Lax-Wendroff格式：

$$V_j^{n+1} = V_j^n - \frac{\Delta t}{2h}A(V_{j+1}^n - V_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2}{2h^2}A(V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n)$$

类似上述分析，可得到相同的稳定性条件

二、迎风格式

Definition 9.1 若 A 的特征值是实的，且存在非奇异矩阵 S 使得 $\Lambda = S^{-1}AS = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ ，其中 $\lambda_j, j = 1, \dots, p$ 为 A 的特征值，则称 (*) 为双曲型方程组。若除此之外， A 的特征值互不相等，则称 (*) 为严格双曲型方程组

假设 (*) 为双曲型方程组，取 $W = S^{-1}U = (w^{(1)}, \dots, w^{(p)})^T$ ，则由 (*) 可得：

$$W_t + \Lambda \cdot W_x = 0 \quad (*1)$$

(*1) 称为 (*) 的特征形式。其分量形式为：

$$w_t^{(m)} + \Lambda_m \cdot w_x^{(m)} = 0, m = 1, \dots, p \quad (*2)$$

对每个 m ，按标量对流方程设计迎风格式，即：

$$(w^{(m)})_j^{n+1} = (w^{(m)})_j^n - \frac{r}{2}\Lambda((w^{(m)})_{j+1}^n - (w^{(m)})_{j-1}^n) + \frac{r}{2}|\Lambda|((w^{(m)})_{j+1}^n - 2(w^{(m)})_j^n + (w^{(m)})_{j-1}^n)$$

其中 $|\Lambda| = \text{diag}\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_p|\}$ ；即：

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{r}{2}\Lambda(W_{j+1}^n - W_{j-1}^n) + \frac{r}{2}|\Lambda|(W_{j+1}^n - 2W_j^n + W_{j-1}^n)$$

；或：

$$V_j^{n+1} = V_j^n - \frac{r}{2}A(V_{j+1}^n - V_{j-1}^n) + \frac{r}{2}|A|(V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n)$$

其中 $|A| = S^{-1}|\Lambda|S$ 。

稳定性分析：

增长矩阵： $\hat{G} = I - i(r \sin \omega h)\Lambda + r(\cos \omega h - 1)|\Lambda|$ ，其特征值为：

$$\mu_m = 1 - i(r \sin \omega h)\lambda_m + r|\lambda_m|(\cos \omega h - 1), m = 1, \dots, p; \text{ 即: } |\mu_m|^2 =$$

$$1 - 4r|\lambda_m|(1 - r|\lambda_m|)(\sin \frac{\omega h}{2})^2$$

\Rightarrow : 若 $r \max |\lambda_m| \leq 1$; 则有 $\rho(\hat{G}) \leq 1$; 即该方法稳定。

作业-20241010:

补充作业1: 针对 $u_t + au_x = 0$, a 为常数, 基于其积分形式构造时间1阶、空间3阶的有限差分格式

补充作业2: 试构造: $U_t + A \cdot U_x = 0$ 的迎风格式; 其中 $U = (u, v)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

偏微分方程数值解

中国科学技术大学 数学学院

张梦萍

办公室：东区-管理科学楼1227室

0551-63601855; mpzhang@ustc.edu.cn; 2024-09

第一部分：一维线性偏微分方程初值问题的有限差分方法

第三章：模型方程—扩散方程

本章以模型方程的初值问题为例，介绍有限差分方法的构造，及其基本概念、性质和理论

1 常系数扩散方程初值问题

考虑常系数的扩散方程的初值问题：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}; \text{ 其初值 } f(x) \text{ 为 } 2\pi \text{ 周期的周期函数。}$$

一、常系数扩散方程的初值问题的解

设初值为： $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega)$ ，则解为：

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}$$

。

⇒：每个Fourier分量都随时间 t 的增大而衰减；对大的 ω ，衰减是非常强的。而且，它不同于双曲型方程，它的传播速度是无限的。

此外，由Parseval关系得：

$$\|u(\cdot, t)\|^2 = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} |e^{-\omega^2 t} \hat{f}(\omega)|^2 \leq \|f(\cdot)\|^2$$

⇒：能量稳定

二、有限差分方法

1. (时间) 向前Euler方法 (FTCS) —— 二层显式格式

$$v_j^{n+1} = (I + \Delta t D_+ D_-) v_j^n = v_j^n + \frac{\Delta t}{h^2} (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)$$

稳定性: $\sigma \leq \frac{1}{2}$ 时, 格式稳定。

截断误差:

$$\begin{aligned} T_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} \\ &= \frac{1}{2} \Delta t u_{tt}(x_j, t_n) - 2 \frac{h^2}{3!} u_{xxx}(x_j, t_n) + O(h^3 + \Delta t^2) = O(h^2 + \Delta t) \end{aligned}$$

2. 蛙跳格式 (CTCS) —— 多层格式

$$v_j^{n+1} = v_j^{n-1} + 2\Delta t D_+ D_- v_j^n = v_j^{n-1} + 2 \frac{\Delta t}{h^2} (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)$$

稳定性: 本方法不稳定, 格式无效。 \Rightarrow : 需要修正

将CTCS格式中 v_j^n 项用 $\frac{1}{2}(v_j^{n+1} + v_j^{n-1})$ 近似, 得到Dufort-Frankel格式:

$$v_j^{n+1} = v_j^{n-1} + 2 \frac{\Delta t}{h^2} (v_{j+1}^n - v_j^{n+1} - v_j^{n-1} + v_{j-1}^n)$$

$$\Rightarrow: v_j^{n+1} = \frac{1}{1+2\sigma} (2\sigma(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n) + (1-2\sigma)v_j^{n-1})$$

稳定性: D-F格式是无条件稳定的, 且是显式格式。

$$\text{截断误差: } T_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + u_{j-1}^n}{h^2}$$

$$= (u_t - u_{xx} + \frac{\Delta t^2}{h^2} u_{tt} + O(\Delta t^2 + h^2 + \frac{\Delta t^4}{h^2}))|_j^n$$

$$\Rightarrow: \text{若: } \lim_{h, \Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{h} = 0, \text{ 则: } \lim_{h, \Delta t \rightarrow 0} T_j^n = 0.$$

如: 取 $\Delta t = c \cdot h^{1+\delta}$, 且 $\delta > 0$, 则有: $T_j^n = O(h^{2\delta})$ 。当我们取 $\delta = 1$, 即: $\Delta t = c \cdot h^2$, 则格式的精度为 (2,2) 阶, 与CTCS格式精度一致。

3. (时间) 向后Euler方法 (BTCS) - 隐式格式

$$(I - \Delta t D_+ D_-) v_j^{n+1} = v_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{h^2} (v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}) = v_j^n$$

稳定性: 无条件稳定的

\Rightarrow : 在计算中可以取 $\Delta t = h$ 。

截断误差:

$$\begin{aligned} T_j^{n+1} &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} \\ &= (u_t - u_{xx} - \frac{\Delta t}{2} u_{tt} - \frac{1}{12} h^2 u_{xxxx} + \dots)|_j^{n+1} \\ &= O(\Delta t + h^2) \end{aligned}$$

整体误差:

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= v_j^n + \sigma(v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}) \\ u_j^{n+1} &= u_j^n + \sigma(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + T_j^{n+1} \Delta t \end{aligned}$$

整体误差: $e_j^{n+1} = v_j^{n+1} - u_j^{n+1}$; 取 $E^n = \max_j |e_j^n|$

$$E^{n+1} \leq E^n + \bar{T} \Delta t \leq \dots \leq E^0 + (n+1) \Delta t \bar{T}$$

其中 $\bar{T} = \max_{j,n} |T_j^{n+1}|$;

若初值为准确值 $E^0 = 0$, $t_{n+1} = (n+1) \Delta t \leq t_{end}$, 则有:

$$E^{n+1} \leq \bar{T} t_{end} \leq \frac{\Delta t}{2} (M_{tt} + \frac{1}{6\sigma} M_{xxxx}) t_{end}$$

\Rightarrow : $\Delta t, h \rightarrow 0$ 时, $E^{n+1} \rightarrow 0$; 即: 数值解收敛于准确解, 格式收敛。

4. Crank-Nicolson格式

$$u_t = u_x = \frac{1}{2} u_x + \frac{1}{2} u_{xx},$$

$$(I - \frac{\Delta t}{2}D_+D_-)v_j^{n+1} = (I + \frac{\Delta t}{2}D_+D_-)v_j^n, \quad j = 0, \dots, J$$

格式是无条件稳定的。

5. θ -方法

$$u_t = u_{xx} = \theta u_{xx} + (1 - \theta)u_{xx},$$

$$(I - \Delta t \theta D_+D_-)v_j^{n+1} = (I + \Delta t(1 - \theta)D_+D_-)v_j^n, \quad j = 0, \dots, J;$$

其中 $0 \leq \theta \leq 1$ 。

\Rightarrow : 是关于 u_j^{n+1} 的三对角方程组:

$$-\theta \sigma v_{j-1}^{n+1} + (1 + 2\theta \sigma)v_j^{n+1} - \theta \sigma v_{j+1}^{n+1} = v_j^n + (1 - \theta)\sigma(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)$$

当 $1 \geq \theta \geq \frac{1}{2}$ 时, $|\hat{Q}| \leq 1$ 。该格式是无条件稳定的。

\Rightarrow : 通常取 $1 \geq \theta \geq \frac{1}{2}$;

$\theta = 0$, 为FTCS格式; $\theta = 1$, 为BTCS格式;

$\theta = \frac{1}{2}$, 为Crank-Nicolson 格式

2 基于PDE的积分形式的有限差分格式的构造

常见的数值积分公式（回顾）

– 端点均为积分节点

$$n = 1 \quad (\text{梯形公式}) : \int_{x_0}^{x_1} f(x) = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) - \frac{h^3}{12}f''(\xi), \quad h = x_1 - x_0, \quad \xi \in (x_0, x_1)$$

$$n = 2 \quad (\text{Simpson公式}) : \int_{x_0}^{x_2} f(x) = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi), \quad h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0, \quad \xi \in (x_0, x_2)$$

– 端点均不为积分节点

$$n = 0 \quad (\text{中点公式}) : \int_{x_0}^{x_1} f(x) = hf(x_0) + \frac{h^3}{3}f''(\xi), \quad h = x_1 - x_0 = x_0 - x_{-1}, \quad \xi \in (x_{-1}, x_1)$$

$$n = 1 : \int_{x_0}^{x_2} f(x) = \frac{3h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + \frac{3h^3}{4}f''(\xi), \quad h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = x_0 - x_{-1}, \quad \xi \in (x_{-1}, x_2)$$

– 一个端点均为积分节点

$$\int_a^b f(x) = (b-a)f(a) + \frac{1}{4}(b-a)^2 f'(\xi), \quad \xi \in (a, b)$$

一、剖分

用节点 $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_M = 1$ 将 $[0, 1]$ 分成 M 个小区域(cell); 则涉及格点 x_j 的cell为: $I_j = [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$, $j = 1, \cdots, M-1$ 。

用节点 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ 将 $[0, T]$ 分成 t 个小区域 $[t_n, x_{n+1}]$, $j = 0, \cdots, M-1$ 。

二、方程离散

考虑 $u_t = u_{xx} + f(x, t)$, $(x, t) \in \bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, T]$

2 基于PDE的积分形式的有限差分格式的构造

(一) 基于积分形式，构造以**函数的格点值**为未知数的有限差分格式

取时空区域 $\Omega_j^n = [t_n, t_{n+1}] \times [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ 为控制区域（控制体）。

讨论控制体 Ω_j^n 上， $u_t = u_{xx} + f(x, t)$ 的积分形式：

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (u^{n+1} - u^n) dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} ((u_x)_{j+\frac{1}{2}} - (u_x)_{j-\frac{1}{2}}) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f(x, t) dx dt$$

该方程式精确成立的。用不同的数值积分公式对上述方程中的积分做近似，得到不同的有限差分格式。

取时空区域 $\Omega_j^n = [t_{n-1}, t_{n+1}] \times [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ 为控制区域（控制体）。

讨论控制体 Ω_j^n 上， $u_t = u_{xx} + f(x, t)$ 的积分形式：

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (u^{n+1} - u^{n-1}) dx = \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} ((u_x)_{j+\frac{1}{2}} - (u_x)_{j-\frac{1}{2}}) dt + \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f(x, t) dx dt$$

该方程式精确成立的。

(二) 基于积分形式，构造以**函数的网格平均**为未知数的有限差分格式

取时空区域 $\Omega_j^n = [t_n, t_{n+1}] \times [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ 为控制区域（控制体）。

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (u^{n+1} - u^n) dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} ((u_x)_{j+\frac{1}{2}} - (u_x)_{j-\frac{1}{2}}) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f(x, t) dx dt$$

该方程式精确成立的。

令 \bar{u}_j 、 \bar{f}_j 分别为在网格 $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ 上的积分平均，即： $\bar{u}_j =$

$$\frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t) dx, \quad \bar{f}_j = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f(x, t) dx, \quad \text{则有：}$$

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (u^{n+1} - u^n) dx = h(\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f(x, t) dx dt = h \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{f}_j dt$$

2 基于PDE的积分形式的有限差分格式的构造

$$h(\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n) = h \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{f}_j dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} ((u_x)_{j+\frac{1}{2}} - (u_x)_{j-\frac{1}{2}}) dt$$

该方程式精确成立的。

作业-20241017:

参考书1: P70: 2.5.2, 2.5.3

补充作业1: 针对 $u_t = u_{xx} + f(x, t)$, $(x, t) \in \bar{D} = [0, 1] \times [0, T]$ 的积分形式, 构造以格点处的函数为未知数的有限差分格式; 并导出其截断误差。

补充作业2: 针对 $u_t = u_{xx}$, 基于其在控制体 $\Omega_j^n = [t_{n-1}, t_{n+1}] \times [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ 上的积分形式, 构造以函数的网格平均为未知数的有限差分格式, 并给出精度。

3 用待定系数法构造高阶有限差分格式

构造高阶有限差分格式的关键是用构造导数的高阶近似。

待定系数法构造导数的高阶近似：用若干点的函数值的线性组合近似函数的导数（包括高阶导数）的方法

一、均匀网格剖分

对于均匀剖分，可以论证：用 u 在三个点： $x_{j\pm 1} = (j \pm 1)h, x_j = jh$ 处的函数值的线性组合是无法得到 u_{xx} 的3阶近似。

\Rightarrow ：点的个数很重要。

讨论：是否可以用 u 在五个点： $x_{j\pm 2} = (j \pm 2)h, x_{j\pm 1} = (j \pm 1)h, x_j = jh$ 处的函数值的线性组合得到 u_{xx} 的4阶近似？

理论上：可通过多个点的函数值的线性组合得到导数的足够高阶的近似。

实际上：如果用的点太多（即：模板太大），将带来边界处理的困难。

二、非均匀网格剖分

空间区域剖分：在很多情况下，为了减少计算量，空间区域的剖分要用非均匀剖分，尤其是对自适应算法。

取非均匀剖分： $x_{j+1} - x_j = \frac{3}{2}h, x_j - x_{j-1} = \frac{3}{4}h$ 。

用 u 在三个点： $x_{j\pm 1}, x_j$ 处的函数值的线性组合近似 u_{xx}

3 用待定系数法构造高阶有限差分格式

⇒：非均匀网格比均匀网格要复杂的多，且很难做分析研究。

对于缓变网格，可通过坐标变换，在变换平面进行

4 变系数扩散方程

考虑二种类型的变系数扩散方程：非守恒型扩散方程、守恒型扩散方程

4.1 非守恒型扩散方程

$u_t = b(x, t)u_{xx}$, $-\infty < x < \infty, t > 0$, 其中热传导系数 $b(x, t) > 0$ 。

1. FTCS格式：

$$v_j^{n+1} = (I + b_j^n \Delta t D_+ D_-) v_j^n = v_j^n + b_j^n \frac{\Delta t}{h^2} (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)$$

其中 $b_j^n = b(x_j, t_n)$ 。稳定性：

取谐波解 $v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x_j} \hat{v}^n(\omega)$, 放大因子: $\hat{Q} = (1 - 4b_j^n \sigma \sin^2(\frac{\xi}{2}))$, $\xi = \omega h$, $\sigma = \frac{\Delta t}{h^2}$ 。

若要求: $|\hat{Q}| \leq 1$, 则有: $b_j^n \sigma \leq \frac{1}{2}$; 即: $b_j^n \sigma \leq \frac{1}{2}$ 时, 格式稳定。

截断误差:

$$T_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - b_j^n \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = O(h^2 + \Delta t)$$

整体误差: $e_j^{n+1} = v_j^{n+1} - u_j^{n+1}$

$$\Rightarrow: e_j^{n+1} = e_j^n + b_j^n \sigma (e_{j+1}^n - 2e_j^n + e_{j-1}^n) - T_j^n \Delta t$$

假设 B 是 $b(x, t)$ 在计算区域的最小上界; 且 T_j^n 有上界: $\bar{T} = \max_{j,n} \sup |T_j^n|$; 令 $E^n = \max_j |e_j^n|$; 若初值为准确值 $E^0 =$

0, 且 $B\sigma \leq \frac{1}{2}$, 则有

$\Delta t, h \rightarrow 0$ 时, $E^{n+1} \rightarrow 0$; 即: 数值解收敛于准确解, 格式收敛。

BTCS格式:

$$v_j^{n+1} = v_j^n + b_j^{n+1} \Delta t D_+ D_- v_j^{n+1} = v_j^n + b_j^{n+1} \frac{\Delta t}{h^2} (v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1})$$

2. θ -方法

$$u_t = b(x, t) u_{xx} = b(x, t) (\theta u_{xx} + (1 - \theta) u_{xx}) = \theta b(x, t) u_{xx} + (1 - \theta) b(x, t) u_{xx},$$

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \Delta t b^* (\theta D_+ D_- v_j^{n+1} + (1 - \theta) D_+ D_- v_j^n),$$

$$j = 0, \dots, J; \quad 0 \leq \theta \leq 1;$$

其中 b^* 可以做多种选择, 如 $b^* = \frac{b_j^{n+1} + b_j^n}{2}$ 、 $b^* = b_j^{n+\frac{1}{2}}$ 等。

截断误差: 为简单起见, 取 $b^* = b_j^{n+\frac{1}{2}}$

$$T_j^{n+\frac{1}{2}} = [(\frac{1}{2} - \theta) \Delta t u_{xxt} - \frac{b}{12} (\Delta x)^2 u_{xxxx} + \frac{1}{24} (\Delta t)^2 u_{ttt} - \frac{b}{8} (\Delta t)^2 u_{xxtt} + \frac{1}{12} (\frac{1}{2} - \theta) \Delta t (\Delta x)^2 u_{xxxxt} - \frac{2b}{6!} (\Delta x)^4 u_{xxxxxx} + \dots]_j^{n+\frac{1}{2}}$$

稳定性条件、收敛性条件均为: 在所考虑的计算区域中的每一点都有:

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (1 - \theta) b(x, t) \leq \frac{1}{2}$$

4.2 守恒型扩散方程

$$u_t = (b(x, t)u_x)_x$$

一类方法：将守恒型扩散方程转换为非守恒型形式： $u_t = b(x, t)u_{xx} + b_x(x, t)u_x$ ，算法设计同上。这类方法的缺点：当 $b(x, t)$ 变化剧烈时，存在稳定性问题

另一类方法：考虑方程的守恒性质，取一个时空区域 Ω_j^n ，对守恒型方程在 Ω_j^n 上积分，再利用数值积分公式，构造有限差分方法。

令 $\Omega_j^n = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$ ，则有：

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (u(x, t^{n+1}) - u(x, t^n)) dx = \int_{t^n}^{t^{n+1}} ((bu_x)(x_{j+1/2}, t) - (bu_x)(x_{j-1/2}, t)) dt$$

这个方程是准确的，没有做任何近似

分别用中点公式、一个端点格式对积分做近似，得到：

$$\Delta x (v_j^{n+1} - v_j^n) = \Delta t \left(b_{j+1/2}^n \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{1/2 \Delta x} - b_{j-1/2}^n \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{1/2 \Delta x} \right)$$

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \mu \Delta_- \left(b_{j+1/2}^n \Delta_+ v_j^n \right)$$

其中， $a_{j+1/2}^n = a(x_{j+1/2}, t^n)$. 具有 (2, 1) 阶局部截断误差。

作业-20241021:

补充作业1：试证；（均匀剖分）用 u 在三个点： $x_{j\pm 1} = (j \pm 1)h, x_j = jh$ 处的函数值的线性组合是无法得到 u_{xx} 的3阶

4.2 守恒型扩散方程

或高于3阶的近似。

4 变系数扩散方程

补充作业2: 针对偏微分方程: $u_t = ((0.1 + \sin^2 x)u_x)_x$, 构造(2,2)阶精度的有限差分格式。

偏微分方程数值解

中国科学技术大学 数学学院

张梦萍

办公室：东区-管理科学楼1227室

0551-63601855; mpzhang@ustc.edu.cn; 2024-09

第一部分：一维线性偏微分方程初值问题的有限差分方法

第四章：偏微分方程初值问题的适定性

本章通过考虑几个模型方程初值问题的解和性质，提出适定性概念，并用于一般情况。

1 适定性定义

1. 一些模型方程初值问题的解的特点

1) 标量方程：

前面章节已经表明：模型方程（对流方程、扩散方程）的初值问题的解的 L_2 模，对所有的时间都可以用初值数据的 L_2 模控制，即：

$$\| u(\cdot, t) \|_{L_2} \leq \| u(\cdot, 0) \|_{L_2} \quad (*1)$$

(*1)保证了：初始数据的微小变化，带来的解的变化也是微小的；即：解连续地依赖于初值

2) 带源项的标量方程：

$$\begin{cases} u_t = u_x + \alpha u, & \alpha = \text{constant}, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases};$$

其中 $f(x)$ 为 2π 周期函数。

\Rightarrow ：解仍然连续依赖于初始数据。

3) 对称的方程组:

$$\text{考虑: } \begin{cases} u_t = Au_x, & u = (u^{(1)}, u^{(2)})^T, \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases};$$

其中 $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ 为 2π 周期函数, 且 $A = \begin{pmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{pmatrix}$, $d = \text{constant}$ 。

对称的、双曲型方程初值问题都有估计:

$$\|u(\cdot, t)\|^2 = \|u(\cdot, 0)\|^2$$

\Rightarrow ：解仍然连续依赖于初始数据。

4) 非对称双曲方程组

$$\text{考虑: } \begin{cases} u_t = Bu_x, & u = (u^{(1)}, u^{(2)})^T, \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases};$$

其中 $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ 为 2π 周期函数,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad d = \text{constant} > 0。$$

\Rightarrow ：解仍然连续依赖于初始数据。

由上述问题的共同特征, 可见:

若初始时刻设置为: $t = t_0$ 时刻, 则都有:

$$\|u(\cdot, t)\| \leq K \|u(\cdot, t_0)\| \quad (*3)$$

2. 适定性定义

下面针对一般的PDE组初值问题，引入适定性(Well-posed)概念：考虑一般的PDE组：

$$\begin{cases} u_t = P(x, t, \frac{\partial}{\partial x})u, & t > t_0 \\ u(x, t_0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (*4)$$

其中 $u = (u^{(1)}, \dots, u^{(m)})^T$, $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})^T$, $P(x, t, \frac{\partial}{\partial x})$ 是一个一般的 p 阶空间算子，可以写为：

$P(x, t, \frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{|\nu| \leq p} A_\nu(x, t) (\frac{\partial}{\partial x^{(1)}})^{\nu_1} \dots (\frac{\partial}{\partial x^{(n)}})^{\nu_n}$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ 是非负整数的多重指标，且 $|\nu| = \sum_i \nu_i$, $A_\nu = A_{\nu_1 \dots \nu_n}$ 是 $m \times m$ 矩阵函数。为方便起见，假设 $A_\nu(x, t) \in C_{(x,t)}^\infty$ ，且系数和数据对空间维都是 2π 周期的。

Definition 1.1 若对每个 t_0 和 $f \in C^\infty(x)$ ，有：

- 存在唯一的解 $u(x, t) \in C^\infty(x, t)$ ，它关于每个空间维数都是 2π 周期的
- 存在与 t_0 无关的常数 α 和 K ，使得：

$$\| u(\cdot, t) \| \leq K e^{\alpha(t-t_0)} \| f(\cdot) \| \quad (*5)$$

则：(*4) 是适定的(Well-posed)

注意：适定性的定义不是唯一的；如：可以使用不同的模、允许有不同的增长的函数形式。对变系数问题，指数增长也是允许的。

非适定性问题称为不适定的(III-posed)。

3. 例子

$$\text{Example 1.1 } \left\{ \begin{array}{l} u_t = u_x \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \quad -\infty < x < \infty \end{array} \right. .$$

$$\text{Example 1.2 } \left\{ \begin{array}{l} u_t = u_x + u \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \quad -\infty < x < \infty \end{array} \right. .$$

$$\text{Example 1.3 } \left\{ \begin{array}{l} u_t = -u_{xx} \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) \quad -\infty < x < \infty, 2\pi \text{ periodic} \end{array} \right. .$$

$$\text{Example 1.4 } \left\{ \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + 100u \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) \quad -\infty < x < \infty \end{array} \right. .$$

2 一维常系数标量偏微分方程

考虑:

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} + bu_x + cu, & t > t_0 \\ u(x, t_0) = f(x) & -\infty < x < \infty, 2\pi \text{ periodic} \end{cases} \quad (**1)$$

其中 a 、 b 、 c 是复常数。下面讨论: 若(**1)是适定的, a 、 b 、 c 应该满足的条件

由于做时间变换 $t' = t - t_0$, 常系数总是不变的, 所以可以设 $t_0 = 0$

Theorem 2.1 (**1)是适定的(Well-posed), 当且仅当: 有一个实常数 α , 使得对所有的实数 ω , 有:

$$\operatorname{Re} K \leq \alpha, \quad K = -a\omega^2 + ib\omega + c, \quad (**2)$$

(**2)的意义:

1. 常数 c 的影响 (即: 非导数项是否影响问题的适定性?)

将 $\alpha + c$ 代替 α , 则(**2)为: $\operatorname{Re}(K - c) = \operatorname{Re}(-a\omega^2 + ib\omega) \leq \alpha$

\Rightarrow : c 对条件(**2)无影响。即: 偏微分方程(**1)中非导数项不影响问题的适定性

注意: 对一般的偏微分方程也是如此。

2. 抛物型方程

若 $a_r = \operatorname{Re}(a) > 0$, 则称该方程为抛物型方程

此时, 由于 $(|b| - 2a_r|\omega|)^2 \geq 0$, 所以有:

$$\operatorname{Re} K \leq -a_r\omega^2 + |b| \cdot |\omega| \leq \frac{|b|^2}{4a_r}$$

\Rightarrow : 对所有的 b , 该问题是适定的

对一般抛物型方程也是如此, 这是其特有的, 即: 高阶导数项决定问题的适定性

3. $Re a = 0$, 即 $Re K = -\omega Im b$

若 $Im b \neq 0$, 则问题不是适定的 (因为可选择 ω 的符号, 使得 $Re K$ 可以变得任意大)

\Rightarrow : 适定问题存在的形式为:

$u_t = ia_i u_{xx} + b_r u_x$, 其中 $a = ia_i$, $b = b_r$; a_i, b_r 是实数。

若 $a_i \neq 0$, 则称该方程为 Schrodinger 方程;

若 $a_i = 0$, 则该方程为双曲型方程

4. $Re a < 0$, 则对任意的 b , $Re K \geq |a_r| \omega^2 - |b| \cdot |\omega|$ 没有上界

\Rightarrow : 该问题不适定

3 一维常系数1阶偏微分方程组

考虑:

$$\begin{cases} u_t = Au_x, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, t_0) = f(x) & -\infty < x < \infty, 2\pi \text{ periodic} \end{cases} \quad (***)$$

其中 $A = (a_{ij})_{m \times m}$, $u = (u^{(1)}(x, t), \dots, u^{(m)}(x, t))^T$ 。

1. 定理

Theorem 3.1 当且仅当 A 的特征值是实数，且有完备的特征向量，则(***)是适定的

证明:

- 1) 首先证明: A 的特征值是实数，才有(***)是适定的可能性
- 2) 设 A 的特征值都是实数，且有完备的特征向量组时，该问题是适定的。
- 3) 设 A 的特征值都是实数，但特征向量组不完备，则问题不适定

a) 讨论一个典型情况: $u_t = Au_x = (\lambda I + J)u_x$

b) 讨论一般情况：存在可逆矩阵 S ，使得：

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 I + J_1 & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_r I + J_r \end{pmatrix}$$

若所有块矩阵都是标量（即 J_j 是标量，且为0），则意味着 A 可对角化，且有完备的特征向量组；此外，若至少有一个块矩阵不是标量，则问题就不可能是适定的（见前面讨论）

2. 低阶项不影响强双曲方程组初值问题的适定性

对 $u_t = Au_x$ ：

- 若 A 的特征值是实数，且互不相等，则该方程组是严格双曲的
- 若 A 的特征值是实数，且具有完备的特征向量，则该方程组是强双曲的
- 若 A 的特征值是实数，则该方程组是弱双曲的

Definition 3.1 对 $u_t = Au_x$ ，若 A 是一个 *Hermite* 矩阵(即： $A = A^* = \bar{A}^T$)，则称 $u_t = Au_x$ 是对称双曲的

\Rightarrow ：对称双曲和严格双曲是强双曲的特殊情况

\Rightarrow ：强双曲方程组的初值问题是适定的；弱双曲方程组的初值问题是不适定的

Lemma 3.1 若 $y \in C^1$ ，且满足不等式 $\frac{dy}{dt} \leq \alpha y$ ， $t \geq 0$ ；则： $y(t) \leq e^{\alpha t} y(0)$

Theorem 3.2 考虑带有非导数项的扰动的强双曲问题:

$$\begin{cases} u_t = Au_x + Bu, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, t_0) = f(x) & -\infty < x < \infty, 2\pi \text{ periodic} \end{cases}$$

若 B 是 $m \times m$ 常数矩阵, 则该问题是适定的

作业-20241024:

参考书1: P113: 4.1.1

参考书1: P115: 4.2.1

参考书1: P122: 4.3.1

4 一维常系数抛物型偏微分方程组

考虑:
$$\begin{cases} u_t = Au_{xx} + Bu_x + Cu = Pu, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, t_0) = f(x) & -\infty < x < \infty, 2\pi \text{ periodic} \end{cases}$$

其中 A, B, C 均为常系数矩阵, P 是空间算子。

Definition 4.1 若 A 的特征值 λ 满足: $Re \lambda \geq \delta$, $\delta > 0$ 是一个常数, 则称 $u_t = Au_{xx} + Bu_x + Cu = Pu$ 是抛物型的

$A \geq 0$ (即 A 半正定的) $\Leftrightarrow A$ 的特征值大于等于 0, 即 $\lambda(A) \geq 0$

若 A 为 Hermite 矩阵, 且对于任意的矢量 v , 有 $\langle Av, v \rangle \geq 0$, 则称 $A \geq 0$,

若 A, B 均为 Hermite (?) 矩阵, 且 $A - B \geq 0$, 则称 $A \geq B$ 。 $\Rightarrow: B \leq |B| \cdot I$

若 $A = A^*$, 则称 A 为 Hermite 矩阵。

若 A 为 Hermite 矩阵, 则其特征值是实数, 且存在酉阵, 使其对角化

Theorem 4.1 抛物型方程组的初值问题是 *Well-Posed*

证明:

(一) 解的稳定性和存在性

1、初值为一谐波, 解的存在性与稳定性

假设 $A + A^* \geq \delta I$, $\delta > 0$ (这个假设最后是需要证明的!)

2、初值是分片连续的, 解的存在性与稳定性

3、证明: 对于抛物型方程, 总可以通过变换, 使得: $A + A^* \geq \delta I$, $\delta > 0$

Lemma 4.1 Schur 引理: 对为一个固定的矩阵 A , 存在唯一的一个矩阵 U , 使得 U^*AU 是一个上三角矩阵

(二) 解的唯一

令 $u(x, t)$ 是问题的任一光滑解，它可以展开成收敛的Fourier级数，即：

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{u}(\omega, t), \quad \text{其中 } \hat{u}(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{i\omega x}, u(x, t)), \quad \hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega)$$

$$\left(\text{目标是要证明: } \begin{cases} \hat{u}(\omega, t)_t = \hat{P}\hat{u} \\ \hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega) \end{cases} \right)$$

5 一般常系数微分方程组

考虑:

$$\begin{cases} u_t = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, t_0) = f(x) & -\infty < x < \infty, 2\pi \text{ periodic} \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)})^T$ 、 $u = (u^{(1)}, \dots, u^{(m)})^T$ 、 $\omega = (\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(d)})^T$ 。

假设初值为: $f(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{i\langle \omega, x \rangle} \hat{f}(\omega)$, $\langle \omega, x \rangle = \sum_{j=1}^d \omega_j x^{(j)}$

构造谐波解为: $u(x, t) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{i\langle \omega, x \rangle} \hat{u}(\omega, t)$, 代入源方程得:

$$\begin{cases} \hat{u}(\omega, t)_t = \hat{P}(i\omega) \hat{u}(\omega, t) \\ \hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega) \end{cases}$$

\Rightarrow : $\hat{u}(\omega, t) = e^{\hat{P}t} \hat{f}(\omega)$, 其中 $\hat{P}(i\omega)$ 是 $m \times m$ 矩阵。

Theorem 5.1 偏微分方程组的初值问题 (1) 是 *Well-Posed* \Leftrightarrow (当且仅当) 对所有的 ω , 存在常数 K 和 α , 使得:

$$|e^{\hat{P}(i\omega)t}| \leq K \cdot e^{\alpha t} \quad (2)$$

Theorem 5.2 偏微分方程组的初值问题 (1) 是 *Well-Posed* 的必要条件是: 对任意的 ω , $\hat{P}(i\omega)$ 的特征值 λ , 满足 $Re \lambda \leq \alpha$

Theorem 5.3 假设满足上面定理的条件, 且对于任意 ω , 存在常数 K 和变换矩阵 $S(\omega)$, 使得 $|S(\omega)| \cdot |S^{-1}(\omega)| \leq K$; 同时, $S^{-1} \hat{P}(i\omega) S$ 是对角阵, 则该偏微分方程组的初值问题 (1) 是 *Well-Posed*。

Theorem 5.4 若对于任意 ω , 存在常数 α , 使得 $\hat{P}(i\omega) + \hat{P}^*(i\omega) \leq 2\alpha I$; 则该偏微分方程组的初值问题 (1) 是 *Well-Posed*。

Definition 5.1 若对所有的光滑函数 $w(x)$, 有常数 α , 使得 $(w, Pw) + (Pw, w) \leq 2\alpha(w, w)$; 则称微分算子 $P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ 为半有界算子 (*semibounded*)

注意：本定义并不意味：微分算子 $P(\frac{\partial}{\partial t})$ 是有界的

Theorem 5.5 微分算子 $P(\frac{\partial}{\partial t})$ 为半有界算子 \Leftrightarrow (当且仅当) :

$$\hat{P}(i\omega) + \hat{P}^*(i\omega) \leq 2\alpha I。$$

Theorem 5.6 若 P 是半有界算子，则 (1) 的解满足：

$$\|u(\cdot, t)\| \leq e^{\alpha t} \|u(\cdot, 0)\|$$

若 $A = A^*$ ，则称 A 为 Hermite 矩阵。

若 A 为 Hermite 矩阵，则其特征值是实数，且存在酉阵，使其对角化

若 A 的元素为实数时，则 Hermite 矩阵就是实对称矩阵

若 $U^*U = I$ ，则称 U 为酉阵。

若 U 的元素为实数时，则酉阵就是正交矩阵

Example 5.1 讨论 $\frac{\partial}{\partial t}u = A_1\frac{\partial}{\partial x}u + A_2u$ 的适定性。其中：

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & \pi \end{pmatrix}$$

作业-20241029:

参考书1: P126: 4.4.1; 4.4.2

参考书1: P134: 4.5.1; 4.5.2

补充作业：试证：若对于任意 ω ，存在常数 α ，使得 $\hat{P}(i\omega) + \hat{P}^*(i\omega) \leq 2\alpha I$ ；则该偏微分方程组的初值问题 (1) 是 Well-Posed。

偏微分方程数值解

中国科学技术大学 数学学院

张梦萍

办公室：东区-管理科学楼1227室

0551-63601855; mpzhang@ustc.edu.cn; 2024-09

第一部分：一维线性偏微分方程初值问题的有限差分方法

第五章：有限差分方法的基本性质

本章主要介绍偏微分方程有限差分方法的基本概念、基本理论

1 差分方法的相容性、收敛性、稳定性

本节主要针对一般的偏微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = g, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, t_0) = f(x) & -\infty < x < \infty, 2\pi \text{ periodic} \end{cases} \quad (5.1)$$

其中 \mathcal{L} 是（时空）偏微分算子，考虑其一般差分格式 $Lv_j^n = g_j^n$ 的相容性、收敛性和稳定性。

回顾：

- 有限维空间：

常用实的欧氏空间 \mathcal{R} 或复的欧氏空间 \mathcal{C} 中的模： $\forall U^n = (U_1^n, \dots, U_N^n) \in \mathcal{R}$ 或 \mathcal{C}

$$l_2 \text{ 模 (2模)} : \|U^n\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^N |U_j^n|^2}$$

$$l_{2,\Delta x} \text{ 模 (能量模)} : \|U^n\|_{2,\Delta x} = \sqrt{\sum_{j=1}^N |U_j^n|^2 \Delta x}$$

$$l_\infty \text{ 模 (最大模)} : \|U^n\|_\infty = \sup_{1 \leq j \leq N} |U_j^n|$$

- 无限维序列空间：

对于初值问题，计算区域是无界的，所以空间网格个数是无限

1.1 截断误差与差分方法的精度： 1 差分方法的相容性、收敛性、稳定性的，相应的格点函数可视为无穷序列或无限维向量

无限维实的或复的 l_2 空间：

$$l_2 = \{U^n = (\dots, U_{-1}^n, U_0^n, U_1^n, \dots)^T : \sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_j^n|^2 < \infty\}$$

$$l_2 \text{ 模 (2模)} : \|U^n\|_2 = \sqrt{\sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_j^n|^2}$$

$$l_{2,\Delta x} \text{ 模 (能量模)} : \|U^n\|_{2,\Delta x} = \sqrt{\sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_j^n|^2 \Delta x}$$

无限维有界序列空间 l_∞ ：

$$l_\infty = \{U^n = (\dots, U_{-1}^n, U_0^n, U_1^n, \dots)^T : \sup_{-\infty < j < \infty} |U_j^n| < \infty\}$$

$$l_\infty \text{ 模 (最大模)} : \|U^n\|_\infty = \sup_{-\infty \leq j \leq \infty} |U_j^n|$$

• 高维问题 (以二维问题为例)

有限维空间, $U^n = \{U_{ij}^n\}_{i=1, j=1}^{n_x, n_y}$ ：

$$l_2 \text{ 模 (2模)} : \|U^n\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} |U_{ij}^n|^2}$$

$$l_{2,\Delta x} \text{ 模 (能量模)} : \|U^n\|_{2,\Delta x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} |U_{ij}^n|^2 \Delta x \Delta y}$$

无限维空间, $U^n = \{U_{ij}^n\}_{i=-\infty, j=-\infty}^{\infty, \infty}$ ：

$$l_2 \text{ 模 (2模)} : \|U^n\|_2 = \sqrt{\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_{ij}^n|^2}$$

$$l_{2,\Delta x} \text{ 模 (能量模)} : \|U^n\|_{2,\Delta x} = \sqrt{\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_{ij}^n|^2 \Delta x \Delta y}$$

1.1 截断误差与差分方法的精度：

截断误差：与差分方程 $Lv_j^n = g_j^n$ 等价的微分方程，与源方程 $\mathcal{L}u = g$ 之差

Definition 1.1 对于满足 $\mathcal{L}u = g$ 的任意光滑函数 $u(x, t)$ ， $T_j^n = Lu_j^n - g_j^n - (\mathcal{L}u(x_j, t_n) - g(x_j, t_n))$ 称为差分格式 $Lv_j^n = g_j^n$ 在 (x_j, t_n) 处的 (局部) 截断误差。

1.2 差分方法的相容性:

1 差分方法的相容性、收敛性、稳定性

截断误差反映了差分方程对源方程的近似程度。

Definition 1.2 若截断误差 $T_j^n = Lv_j^n - g_j^n - (\mathcal{L}u(x_j, t_n) - g(x_j, t_n)) = O((\Delta x)^p) + O((\Delta t)^q)$ 则称为差分格式 $Lv_j^n = g_j^n$ 的 (局部) 截断误差对时间是 q 阶、对空间是 p 阶的, 即: 差分格式 $Lv_j^n = g_j^n$ 对时间是 q 阶、对空间是 p 阶精度。

1.2 差分方法的相容性:

相容性: 反映源方程与差分方程之间的关系

Definition 1.3 当 $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ 时, 若差分格式 $Lv_j^n = g_j^n$ 的截断误差 $T_j^n \rightarrow 0$, 则称为该差分格式 $Lv_j^n = g_j^n$ 与源方程 $\mathcal{L}u = g$ 是 (无条件) 逐点相容的。

Definition 1.4 对于 $\mathcal{L}u = g$ 的二层格式: $\mathbf{V}^{n+1} = Q \cdot \mathbf{V}^n + \Delta t \cdot G^n$, 其中 $\mathbf{V}^n = (\dots, v_{-1}^n, v_0^n, v_1^n, \dots)$, $G^n = (\dots, g_{-1}^n, g_0^n, g_1^n, \dots)$ 。 $\forall (x, t)$, 若 $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ 时, 源方程 $\mathcal{L}u = g$ 的解 $u(x, t)$ 为 $\mathbf{U}^{n+1} = Q \cdot \mathbf{U}^n + \Delta t \cdot G^n + \Delta t \cdot T^n$, 且 $\|T^n\| \rightarrow 0$, 则称该差分格式 $Lv_j^n = g_j^n$ 与源方程 $\mathcal{L}u = g$ 是按模 $\|\cdot\|$ (无条件) 相容的。

1.3 差分方法收敛性:

收敛性: 反映源方程的精确解与差分方程的近似解之间的关系

Definition 1.5 $\forall (x, t)$, 当 $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, $j\Delta x \rightarrow x$, $n\Delta t \rightarrow t$ 时, 有 $v_j^n \rightarrow u_j^n = u(x_j, t_n)$, 则称近似于源方程 $\mathcal{L}u = g$ 的差分格式 $Lv_j^n = g_j^n$ 是 (无条件) 逐点收敛的。

1.4 稳定性:

1 差分方法的相容性、收敛性、稳定性

Definition 1.6 $\forall(x, t)$, 若 $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, $j\Delta x \rightarrow x$, $(n+1)\Delta t \rightarrow t$ 时, 有 $\|\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{V}^{n+1}\| \rightarrow 0$, 则称源方程 $\mathcal{L}u = g$ 的差分格式 $Lv_j^n = g_j^n$ (在 t 时刻) 是按模 $\|\cdot\|$ (无条件) 收敛的。若 $\|T^n\| = O((\Delta x)^p + (\Delta t)^q)$, 则称该差分格式按模 $\|\cdot\|$ 具有 (p, q) 阶精度; 或称该差分格式是按模 $\|\cdot\|$ (p, q) 阶收敛的。

1.4 稳定性:

稳定性: 定解条件 (初值条件) 的微小变化对数值解的影响

1. 定义

Definition 1.7 对于 $\mathcal{L}u = g$ 的二层格式:

$$\mathbf{V}^{n+1} = Q \cdot \mathbf{V}^n, n \geq 1, \quad (*1)$$

其中 Q 为差分算子, $\mathbf{V}^n = (\dots, v_{-1}^n, v_0^n, v_1^n, \dots)$ 。 $\forall(x, t)$, 若 \exists 常数 $\Delta x_0 > 0$, $\Delta t_0 > 0$, $K \geq 0$, $\beta \geq 0$, 使得 $\forall 0 \leq t \leq (n+1)\Delta t$, $0 < \Delta x \leq \Delta x_0$, $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$, 有:

$$\|\mathbf{V}^{n+1}\| \leq K e^{\beta t} \|\mathbf{V}^0\|, \quad (*2)$$

则称该差分格式(*1)关于模 $\|\cdot\|$ 是 (无条件) 稳定的。

Definition 1.8 上面定义中的 (*2) 由下式代替:

$$\|\mathbf{V}^{n+1}\| \leq K \|\mathbf{V}^0\|, \quad (*3)$$

1.4 稳定性: 1 差分方法的相容性、收敛性、稳定性
上面二种定义比较强, 常见的其它定义还有:

如: 对于 $\forall T$, 当 $(n+1)\Delta t \leq T$ 时, (*2) 或 (*3) 成立; 其中 K 和 β 可以与 T 有关。

2. 命题

考虑 $\mathcal{L}u = g$ 的二层差分格式: $\mathbf{V}^{n+1} = Q \cdot \mathbf{V}^n, n \geq 1$ 的稳定性

(a) 命题1

(*1)关于 $\|\cdot\|$ 是稳定的 $\Leftrightarrow \exists$ 常数 $\Delta x_0 > 0, \Delta t_0 > 0, K \geq 0, \beta \geq 0$, 使得 $\forall 0 \leq t \leq (n+1), 0 < \Delta x \leq \Delta x_0, 0 < \Delta t \leq \Delta t_0$, 有:

$$\|Q^{n+1}\| \leq Ke^{\beta t}, \quad (*4)$$

Example 1.1 试证: 若 $0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}$, 则 $v_j^{n+1} = (1 - 2\mu)v_j^n + \mu(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$ 关于 L_∞ 模是稳定的。

Example 1.2 讨论 $u_t + au_x = 0$ 的FTFS格式关于 L_2 模稳定性。

(b) 命题2

在 $L_{2,\Delta x}$ 空间, 序列 U^n 是稳定的, 当且仅当在 $L_2[-\pi, \pi]$ 空间中, 序列 \hat{U}^n 是也稳定的

\Rightarrow 稳定性分析只要在Fourier空间执行即可, 不必返回到物理空间

Example 1.3 讨论 $u_t + au_x = 0$ 的FTBS格式的稳定性。

(c) 命题3

$\mathbf{V}^{n+1} = Q \cdot \mathbf{V}^n$ 关于 $l_{2,\Delta x}$ 模是稳定的 $\Leftrightarrow \exists$ 常数 $\Delta x_0 > 0, \Delta t_0 >$

1.4 稳定性: 1 差分方法的相容性、收敛性、稳定性
 $0, K \geq 0, \beta \geq 0$, 使得 $\forall 0 < \Delta x \leq \Delta x_0, \omega \in [0, 2\pi]$,
 有:

$$|g(\omega)|^{n+1} \leq K e^{\beta(n+1)\Delta t}$$

其中 g 为格式的放大因子, 即: $\hat{v}^{n+1} = g\hat{v}^n$

(d) 命题4

$\mathbf{V}^{n+1} = Q \cdot \mathbf{V}^n$ 关于 $l_{2,\Delta x}$ 模是稳定的 \Leftrightarrow : \exists 常数 $\Delta x_0 > 0, \Delta t_0 > 0, c \geq 0$, 使得 $\forall 0 < \Delta x \leq \Delta x_0, \omega \in [0, 2\pi]$, 有:

$$|g(\omega)| \leq 1 + c\Delta t$$

Von Neumann 条件

(e) 命题5

若 $\mathbf{V}^{n+1} = Q \cdot \mathbf{V}^n$ 是稳定的, 则: 对任意的标量 b , 差分格式 $\mathbf{V}^{n+1} = (Q + b\Delta t I) \cdot \mathbf{V}^n$ 也是稳定的

1.5 LAX定理—差分方法相容性、收敛性、稳定性之间的关系

1.5 LAX定理—差分方法相容性、收敛性、稳定性之间的关系

LAX定理反映差分方法相容性、收敛性和稳定性之间的关系

- 相容性：差分方程与偏微分方程的关系
- 收敛性：差分方程的解与偏微分方程的解之间的关系
- (初值) 稳定性：差分方程的解与偏微分方程定解条件（初值条件）的关系

Theorem 1.1 (*Lax*等价定理)：对于一个适定的相信线性偏微分方程初值问题的相容的二层差分格式，其收敛性与稳定性是等价的。

Theorem 1.2 (*Lax*定理)：对于一个适定的相信线性偏微分方程初值问题，其按 $\|\cdot\|$ 模是 (p, q) 阶精度的二层差分格式为： $\mathbf{V}^{n+1} = Q \cdot \mathbf{V}^n + \Delta t G^n$ ，若它关于 $\|\cdot\|$ 模是稳定的，则它是关于 $\|\cdot\|$ 模 (p, q) 阶收敛的。

作业-20241031：(第2本参考书)P111: 3.1.2

1.6 偏微分方程的耗散性、色散性

Example 1.4 讨论PDE: $u_t + au_x = 0$ 的谐波解的特征

任取一个谐波作为PDE的解, 即取: $u(x, t) = e^{i(kt+\omega x)}$; 其中 k 为波的频率, ω 是该波的波数, 波长为 $\frac{2\pi}{\omega}$

代入PDE得: $ik + ia\omega = 0 \rightarrow k = -a\omega$

这儿 $k = k(\omega) = -a\omega$ 称为 $u_t + au_x = 0$ 的色散关系, 且其解为: $u(x, t) = e^{i\omega(x-at)}$

一般情况下 $k = k(\omega) = \alpha + ib$ 是复数, 则PDE的谐波解为:

$$u(x, t) = e^{-bt} e^{i(\alpha t + \omega x)}$$

- 谐波振幅 e^{-bt} 可能随时间衰减。谐波振幅随时间衰减的现象称为“耗散”

- 谐波传播的波速为 $c_e = -\frac{\text{Re}(k)}{\omega} = -\frac{\alpha}{\omega} \stackrel{u_t + au_x = 0}{=} a$;

若 $c_e > 0$, 则谐波从左向右传播, $c_e < 0$, 谐波从右向左传播。

- 色散关系 $k = k(\omega)$

如果 k 是 ω 的线性函数, 则不同波数的谐波传播的波速是相同的, 整体波形保持不变; 若 k 是 ω 的非线性函数, 则不同波数的谐波传播的波速是不同的, 整体波形随时间发生变化, 相应的物理现象称为“色散”

- 放大因子

$$\lambda_e \triangleq \frac{u(x, t+\Delta t)}{u(x, t)} = e^{ik\Delta t} = e^{-b\Delta t} e^{i\alpha\Delta t} = |\lambda_e| e^{i\varphi_e}, \text{ 称 } |\lambda_e| = e^{-b\Delta t} \text{ 为 } \lambda_e$$

1.6 偏微分方程的耗散性、色散性 1 差分方法的相容性、收敛性、稳定性的模，称 $\varphi_e = \alpha\Delta t$ 为 λ_e 的幅角。

\Rightarrow 放大因子体现了谐波解的随时间变化特征

不同波数的谐波的传播和振幅衰减是PDE的解的性质的一个重要组成部分。若有谐波振幅无限增长，则该PDE的解是不稳定的

Definition 1.9 1. PDE的耗散性

若PDE的谐波解的振幅不随时间增长，且至少有一个谐波的振幅是衰减的，则称该PDE具有耗散性，其解是稳定的。若PDE的所有谐波解的振幅既不增长，也不衰减，则称该PDE是无耗散的，其解是稳定的。若非上述二种情况，则称该PDE是逆耗散的，其解不稳定。

2. PDE的色散性

若不同波数的谐波以不同的速度传播，则称该PDE具有色散性，其解是色散的

若谐波的传播速度与波数无关，则称该PDE无色散，其解是无色散的

Example 1.5 讨论 $u_t + au_x = 0$ 的耗散性、色散性 (a 是常数)。

Example 1.6 讨论 $u_t + cu_{xxx} = 0$ 的耗散性、色散性 (c 是常数)。

1.7 差分方程的耗散性、色散性

1.7.1 差分方程的耗散性、色散性

类似于上面讨论PDE耗散性、色散性的做法，任取一个谐波作为差分方程的解，即取： $v_j^n = e^{i(\omega x_j + kt_n)}$ 时空均匀剖分 $e^{i(\omega j \Delta x + kn \Delta t)}$ ，代入差分方程得：离散的色散关系 $k = k(\omega) = \alpha + ib$ 。由此得到差分方程的谐波解：

$$v_j^n = e^{-bt_n} e^{i\omega(x_j - (\frac{-\alpha}{\omega})t_n)}, \text{ 其中 } c = \frac{-\alpha}{\omega} \text{ 为波速。}$$

$$\text{放大因子: } \lambda = \frac{v_j^{n+1}}{v_j^n} = e^{(-b+i\alpha)\Delta t}$$

$$\Rightarrow v_j^n = \lambda^n e^{i\omega x_j}$$

Definition 1.10 若差分方程的谐波解为： $v_j^n = e^{-bt_n} e^{i\omega(x_j - (\frac{-\alpha}{\omega})t_n)} = \lambda^n e^{i\omega x_j}$ ，则：

- $b < 0$

该差分方程的解的振幅随时间无界增长，该差分方法是逆耗散的，其解不稳定。

- $b > 0$

该差分方程的解的振幅随时间递减，该差分方法是耗散的，其解是稳定的。

- $b = 0$

该差分方程的解的振幅随时间不变化，该差分方法是无耗散的。

- $\alpha \equiv 0$

该差分方程的谐波解传播速度为0，即不传播；该差分方法是无色耗散的。

1.7 差分方程的耗散性、色散性

1 差分方法的相容性、收敛性、稳定性

- $\alpha \neq 0$

该差分方程的谐波解以 $\frac{-\alpha}{\omega}$ 的速度传播。若 $\frac{-\alpha}{\omega}$ 与 ω 有关，即该差分方程的谐波解的传播速度与 ω 有关，该差分方法是色耗散的。

讨论：

- $\frac{|\lambda|}{|\lambda_e|} < 1$ 时，则相对于源方程，格式有更强的耗散性；反之，格式的耗散性弱与源方程
- $\frac{\phi}{\phi_e} < 1$ 时，则相对于源方程，数值解的相位滞后；反之，相位超前

Example 1.7 讨论 $u_t + au_x = 0$ 的 FTBS 格式的稳定性、耗散项、色散性 (a 是常数)。

1.7.2 用 MPDE 方法分析 $U_t = LU$ 的差分格式的耗散性、色散性

以一个例子介绍 MPDE 方法：考虑 $u_t + au_x = 0$, $a > 0$ 的 FTBS 格式：

$$v_j^{n+1} = v_j^n - r(v_j^n - v_{j-1}^n), \quad r = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \quad (*0)$$

假设 $u(x, t)$ 是与数值格式 (*0) 等价的 PDE 的精确解，则有：

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \\ &= \left\{ u_t + \frac{\Delta t}{2} u_{tt} + \frac{\Delta t^2}{6} u_{ttt} + \cdots + au_x - \frac{a\Delta x}{2} u_{xx} + \frac{\Delta x^2}{6} u_{xxx} + \cdots \right\}_j^n \quad (*1) \end{aligned}$$

将讨论差分格式 (*0) 的耗散性、色散性转换为讨论与差分格式 (*0) 等价的 PDE (*1) 的耗散性、色散性。

为了讨论 PDE (*1) 的耗散性、色散性，需要将 (*1) 中的对时间 t 的高

1.7 差分方程的耗散性、色散性

1 差分方法的相容性、收敛性、稳定性

阶导数 (≥ 2 阶) 转换为对空间变量 x 的导数。由于不是讨论源方程 $u_t + au_x = 0$ 的性质, 这儿就不能用源方程做转换, 只能用 (*1) 本身做转换。即: 通过对 (*1) 的循环求导来实现, 得到一个与 (*0) 等价的 $U_t = LU$ 型 PDE, 即 MPDE:

$$0 = u_t + au_x - \frac{a\Delta x}{2}(1-r)u_{xx} + \frac{a\Delta x^2}{6}(1-r)(1-2r)u_{xxx} + \dots \quad (*2)$$

上式 (*2) 与 (*0) 是等价的, 即为 MPDE; 且 $r = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$

- 首先取 (*2) 的前几项, 分析其性质。

$$u_t + au_x - \nu_2 u_{xx} + \mu_3 u_{xxx}, \quad \nu_2 = \frac{a\Delta x}{2}(1-r), \quad \mu_3 = \frac{a\Delta x^2}{6}(1-r)(1-2r)$$

任取一个谐波作为 PDE 的解, 即取: $u(x, t) = e^{i(\omega x + kt)}$, 代入上式得:

$$ik + a(i\omega) - \nu_2(i\omega)^2 + \mu_3(i\omega)^3 = 0 \longrightarrow : \text{色散关系 } k = -a\omega + \mu_3\omega^3 + i\nu_2\omega^2$$

$$\text{其解为: } u(x, t) = e^{-\nu_2\omega^2 t} e^{i\omega(x - (a - \mu_3\omega^2)t)} = e^{-\frac{a\Delta x}{2}(1-r)\omega^2 t} e^{i\omega(x - (a - \frac{a\Delta x^2}{6}(1-r)(1-2r)\omega^2)t)}$$

解的振幅为: $|u| = e^{-\frac{a\Delta x}{2}(1-r)\omega^2 t}, t = n\Delta t$; 耗散性:

$$- a > 0, r < 1$$

$n \rightarrow \infty \Rightarrow |u| \rightarrow 0$; 即: (*2) 具有耗散性, 解稳定

$$- a > 0, r = 1$$

$|u| = 0$; 即: (*2) 无耗散性, 解稳定

$$- a > 0, r < 1$$

$$- a > 0, r < 1$$

$n \rightarrow \infty \Rightarrow |u| \rightarrow \infty$; 即: (*2) 是逆耗散性, 解不稳定

1.7 差分方程的耗散性、色散性

1 差分方法的相容性、收敛性、稳定性

解的色散性： $e^{i\omega(x - (a - \frac{a\Delta x^2}{6}(1-r)(1-2r)\omega^2)t)}$ ，解的谐波传播速度： $a - \frac{a\Delta x^2}{6}(1-r)(1-2r)\omega^2$

\Rightarrow ：解的传播速度与 ω 有关 \Rightarrow ：(*2)具有色散性

- 讨论一般情况：与 $U_t = LU$ 相容的二层差分格式： $\sum_{\mu} \alpha_{\mu} v_{j+\mu}^{n+1} = \sum_{\nu} \beta_{\nu} v_{j+\nu}^n$

与上述数值格式等价的MPDE为：

$$u_t = Lu + \sum_l^{\infty} \nu_{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l}} + \sum_m^{\infty} \mu_{2m+1} \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m+1}} \quad (*3)$$

其中 ν_{2l} ， μ_{2m+1} 分别称为耗散项系数和色散项系数

取一个谐波作为PDE的解，即取： $u(x, t) = e^{i(\omega x + kt)}$ ，代入(*3)得色散关系：

$$ik = L(i\omega) + \sum_l^{\infty} (-1)^l \nu_{2l} \omega^{2l} + i \sum_m^{\infty} (-1)^m \mu_{2m+1} \omega^{2m+1}$$

令 $\nu = \sum_l^{\infty} (-1)^l \nu_{2l} \omega^{2l}$ ， $\mu = \sum_m^{\infty} (-1)^m \mu_{2m+1} \omega^{2m+1}$ ，则其解为：

$$u(x, t) = e^{L(i\omega) + i\omega t} e^{\nu t} e^{i\mu t}。$$

其中 $e^{L(i\omega) + i\omega t}$ 是源方程 $U_t = LU$ 的解； $e^{\nu t}$ 是数值耗散部分； $e^{i\mu t}$ 是数值色散部分

作业-20241104

补充作业1：分析偏微分方程 $u_t + u_x - \nu_2 u_{xx} + \mu_3 u_{xxx} = 0$ 的耗散性、色散性，其中 ν_2 ， μ_3 分别为常实数

补充作业2：分析偏微分方程 $u_t = u_{xx}$ 的耗散性和色散性，以及用二种方法分别分析其FTCS格式的耗散性和色散性

大作业20241104: 针对下述偏微分方程初值问题:

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0.4 \leq x \leq 0.6 \\ 0, & \text{others} \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

- (1) 分别用其FTBS格式、FTCS格式和Lax-Wendroff格式分别计算 $t = 0.05, 0.2, 0.8, 3.2$ 时刻的数值解, 其中 $r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ 分别取0.2和0.8, 空间步长取 $\Delta x = 0.05$ 。将相同时刻(即相同 t 值)、相同 r 值的三种格式的数值解和相应的偏微分方程初值问题的精确解绘在同一张图上(如果某些格式在某些时刻的数值解与其它格式的结果相差太大, 不宜绘在同一张图上, 可以略去, 但需要说明); 并写出“观察到的现象”。
- (2) 分别分析偏微分方程 $u_t = u_x$ 的耗散性和色散性, 以及其FTBS格式、FTCS格式和Lax-Wendroff格式的耗散性和色散性; 并对产生(1)中“观察到的现象”进行评论

偏微分方程数值方法

第二部分：二维线性偏微分方程初值问题的有限差分方法

第六章：二维线性偏微分方程的初值问题

目录

1 二维常系数对流方程的初值问题	1
2 二维变系数对流方程的初值问题	6
3 二维常系数扩散方程的初值问题	7

1 二维常系数对流方程的初值问题

考虑二维常系数对流方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t + au_x + bu_y = 0, & (x, y) \in (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty), t > 0 \\ u(x, y, 0) = f(x, y), & (x, y) \in (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) \end{cases}$$

其中, a, b 为常数, $u(x, y, t)$ 、 $f(x, y)$ 对 x, y 分别为 2π 周期的周期函数。

方程性质:

- 方程适定性: 代入 $u(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(kt + \omega_x x + \omega_y y)}$

$$k = -a\omega_x - b\omega_y \quad \Rightarrow \quad u(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(-(a\omega_x + b\omega_y)t + \omega_x x + \omega_y y)}$$

方程适定的条件 $a, b \in \mathbb{R}$ 。

- 准确解为 $u(x, y, t) = f(x - at, y - bt)$, 即初值沿 x 方向以速度 a 传播, 沿 y 方向以速度 b 传播。
- 准确解在 $P = (x^*, y^*, t^*)$ 处的解 $u(x^*, y^*, t^*)$ 的依赖区为

$$D_p = (x_0^*, y_0^*, 0), \quad x_0^* = x^* - at^*, \quad y_0^* = y^* - bt^*$$

- 特征线为直线

$$\frac{dx(t)}{dt} = a, \quad \frac{dy(t)}{dt} = b \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + at, \quad y(t) = y_0 + bt$$

沿特征线解的值不变

$$\frac{d}{dt} u(x(t), y(t), t) = u_x x'(t) + u_y y'(t) + u_t = 0$$

数值格式:

一、网格剖分:

- 空间剖分: 等距均匀网格, 即 Δx 和 Δy 是常数。

- x 方向: $x_j = j\Delta x, j = \dots, -1, 0, 1, \dots; \Delta x = 2\pi/n_x$

- y 方向: $y_k = k\Delta y, k = \dots, -1, 0, 1, \dots; \Delta y = 2\pi/n_y$

- 时间剖分：为方便分析，采用均匀剖分（即 Δt 为常数），且满足稳定性条件

$$t_n = n\Delta t, n \geq 0; \quad \Delta t = cfl \times \min(\Delta x, \Delta y).$$

- (x_j, y_k, t_n) 处准确解： $u(x_j, y_k, t_n) = u_{jk}^n$ ；数值解： v_{jk}^n

二、有限差分格式

- 可以使用差商 \approx 导数。如：FTBS 格式

$$v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(v_{jk}^n - v_{j-1,k}^n) - \frac{b\Delta t}{\Delta y}(v_{jk}^n - v_{j,k-1}^n)$$

- 也可以使用前面针对一维问题采用的其他方法构造有限差分格式。如：
Lax-Friedrich 格式：

$$v_{jk}^{n+1} = \frac{1}{4}(v_{j-1,k}^n + v_{j+1,k}^n + v_{j,k-1}^n + v_{j,k+1}^n) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(v_{j+1,k}^n - v_{j-1,k}^n) - \frac{b\Delta t}{2\Delta y}(v_{j,k+1}^n - v_{j,k-1}^n)$$

Lax-Wendroff 格式：

$$\begin{aligned} v_{jk}^{n+1} &= v_{j,k}^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(v_{j+1,k}^n - v_{j-1,k}^n) - \frac{b\Delta t}{2\Delta y}(v_{j,k+1}^n - v_{j,k-1}^n) \\ &+ \frac{a^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}(v_{j+1,k}^n - 2v_{j,k}^n + v_{j-1,k}^n) + \frac{b^2\Delta t^2}{2\Delta y^2}(v_{j,k+1}^n - 2v_{j,k}^n + v_{j,k-1}^n) \\ &+ \frac{ab\Delta t^2}{4\Delta x\Delta y}(v_{j+1,k+1}^n - v_{j+1,k-1}^n - v_{j-1,k+1}^n + v_{j-1,k-1}^n) \end{aligned}$$

积分方法：

积分区域取 $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [y_{k-1/2}, y_{k+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$ ：

$$\begin{aligned} &\int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, y, t_{n+1}) - u(x, y, t_n) dy dx \\ &+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} au(x_{j+1/2}, y, t) - au(x_{j-1/2}, y, t) dy dt \\ &+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} bu(x, y_{k+1/2}, t) - bu(x, y_{k-1/2}, t) dx dt = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(v_{j+1,k}^n - v_{j-1,k}^n) - \frac{b\Delta t}{2\Delta y}(v_{j,k+1}^n - v_{j,k-1}^n) \quad (FTCS)$$

$$\text{or } \Rightarrow v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(v_{jk}^n - v_{j-1,k}^n) - \frac{b\Delta t}{\Delta y}(v_{jk}^n - v_{j,k-1}^n) \quad (FTBS)$$

- 分裂方法:

$$u_t = Au = A_1u + A_2u \Rightarrow \begin{cases} v^{n+1/2} = (1 + \Delta t A_2)v^n \\ v^{n+1} = (1 + \Delta t A_1)v^{n+1/2} \end{cases}$$

如分别使用一维 Lax-Wendroff 格式

$$\begin{aligned} v_{jk}^{n+1/2} &= v_{jk}^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(v_{j+1,k}^n - v_{j-1,k}^n) + \frac{a^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}(v_{j+1,k}^n - 2v_{jk}^n + v_{j-1,k}^n) \\ v_{jk}^{n+1} &= v_{jk}^{n+1/2} - \frac{b\Delta t}{2\Delta y}(v_{j,k+1}^{n+1/2} - v_{j,k-1}^{n+1/2}) + \frac{b^2\Delta t^2}{2\Delta y^2}(v_{j,k+1}^{n+1/2} - 2v_{jk}^{n+1/2} + v_{j,k-1}^{n+1/2}) \end{aligned}$$

三、误差

- 截断误差 (FTBS)

$$\begin{aligned} T_{jk}^n &= \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\Delta t} + a \frac{u_{jk}^n - u_{j-1,k}^n}{\Delta x} + b \frac{u_{jk}^n - u_{j,k-1}^n}{\Delta y} \\ &= O(\Delta t) + O(\Delta x) + O(\Delta y) \end{aligned}$$

格式逐点相容, 按最大模相容, 且对时间是 1 阶精度, 对空间也是 1 阶精度。

- 注意: 二维问题:

有限维空间: $U = \{U_{ij}\}_{i=1, j=1}^{n_x, n_y}$

$$L_2 \text{ 模 (2 模): } \|U\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n_y} \sum_{i=1}^{n_x} |U_{ij}|^2}$$

$$L_{2, \Delta x} \text{ (能量模): } \|U\|_{2, \Delta x} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n_y} \sum_{i=1}^{n_x} |U_{ij}|^2 \Delta x \Delta y}$$

$$L_\infty \text{ (最大模): } \|U\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n_x, 1 \leq j \leq n_y} |U_{ij}|$$

无穷维空间: $U = \{U_{ij}\}_{i=-\infty, j=-\infty}^{\infty, \infty}$

$$L_2 \text{ 模 (2 模): } \|U\|_2 = \sqrt{\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} |U_{ij}|^2}$$

$$L_{2, \Delta x} \text{ (能量模): } \|U\|_{2, \Delta x} = \sqrt{\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} |U_{ij}|^2 \Delta x \Delta y}$$

$$L_\infty \text{ (最大模): } \|U\|_\infty = \sup_{-\infty < i < \infty, -\infty < j < \infty} |U_{ij}|$$

- 整体误差

令 $e_{ij}^n = v_{jk}^n - u_{jk}^n$, $E^n = \max_{j,k} |e_{jk}^n|$, $r_x = a\Delta t/\Delta x$, $r_y = b\Delta t/\Delta y$ 。若 $r_x > 0, r_y > 0$ 且 $1 < r_x + r_y \leq 1$, 则有

$$\Rightarrow E^{n+1} \leq E^n + \Delta t T^*$$

其中, $T^* = \max_{j,k,n} |T_{jk}^n| = O(\Delta t) + O(\Delta x) + O(\Delta y)$

$$E^0 = 0 \Rightarrow E^{n+1} \leq (n+1)\Delta t T^* = t_{n+1} T^* \Rightarrow (1,1,1) \text{ 阶收敛}$$

四、稳定性- Fourier 分析方法

- 令 $v_{jk}^n = \hat{v}^n e^{i(\omega_x x_j + \omega_y y_k)}$, $\hat{v}^{n+1} = \hat{Q} \hat{v}^n$, 代入格式得到放大因子 \hat{Q}

$$\Rightarrow \hat{Q} = 1 - r_x(1 - e^{-i\omega_x \Delta x}) - r_y(1 - e^{-i\omega_y \Delta y})$$

令 $\eta_x = \omega_x \Delta x$, $\eta_y = \omega_y \Delta y$

$$\hat{Q} = (1 - r_x - r_y) + r_x \cos \eta_x + r_y \cos \eta_y - i(r_x \sin \eta_x + r_y \sin \eta_y)$$

若 $r_x > 0, r_y > 0$ 且 $0 < r_x + r_y \leq 1$, 则有 $|\hat{Q}| \leq 1$, 即格式稳定.

作业: 参考书 2: P246, Example 5.8.3

五、CFL 条件

- 若取 $P^* = (x_j, y_k, t_{n+1})$, 则有依赖区域 $D_p = (x_j - at_{n+1}, y_k - bt_{n+1}, 0)$ 其 FTBS 格式的数值解的依赖区域为

$$N_p = [x_{j-n-1}, x_j] \times [y_{k-n-1}, y_k]$$

CFL 条件为 $D_p \subset N_p$

$$\begin{cases} x_{j-n-1} \leq x_j - at_{n+1} \leq x_j, & \Rightarrow 0 \leq r_x \leq 1 \\ y_{k-n-1} \leq y_k - bt_{n+1} \leq y_k, & \Rightarrow 0 \leq r_y \leq 1 \end{cases}$$

- 注意: CFL 条件是收敛的必要条件, 不充分; 该 FTCS 格式稳定的充要条件是 $r_x > 0, r_y > 0$ 且 $0 < r_x + r_y \leq 1$ 。
- 构造迎风格式

$$v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n - \Delta t D_x v_{jk}^n - \Delta t D_y v_{jk}^n$$

$$D_x v_{jk}^n = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x}(v_{jk}^n - v_{j-1,k}^n), & a > 0 \\ \frac{1}{\Delta x}(v_{j+1,k}^n - v_{jk}^n), & a < 0 \end{cases} \quad D_y v_{jk}^n = \begin{cases} \frac{1}{\Delta y}(v_{jk}^n - v_{j,k-1}^n), & b > 0 \\ \frac{1}{\Delta y}(v_{j,k+1}^n - v_{jk}^n), & b < 0 \end{cases}$$

或

$$v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{1 + \operatorname{sgn}(a)}{2} (v_{jk}^n - v_{j-1,k}^n) + \frac{1 - \operatorname{sgn}(a)}{2} (v_{j+1,k}^n - v_{jk}^n) \right) \\ - \frac{b\Delta t}{\Delta y} \left(\frac{1 + \operatorname{sgn}(b)}{2} (v_{jk}^n - v_{j,k-1}^n) + \frac{1 - \operatorname{sgn}(b)}{2} (v_{j,k+1}^n - v_{jk}^n) \right)$$

或

$$v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (v_{j+1,k}^n - v_{j-1,k}^n) + \frac{|a|\Delta t}{2\Delta x} (v_{j+1,k}^n - 2v_{jk}^n + v_{j-1,k}^n) \\ - \frac{b\Delta t}{2\Delta y} (v_{j,k+1}^n - v_{j,k-1}^n) + \frac{|b|\Delta t}{2\Delta y} (v_{j,k+1}^n - 2v_{jk}^n + v_{j,k-1}^n)$$

作业：参考书 2: P251, Example 5.8.7

2 二维变系数对流方程的初值问题

$$u_t + a(x, y, t)u_x + b(x, y, t)u_y = 0$$

特征线方程

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y, t), \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}u(x(t), y(t), t) = 0$$

特征线为互不相交曲线，解沿着特征线保持不变。

数值格式：

可将常系数对流方程的 FDM 推广到变系数方程，如迎风格式

$$v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n - \frac{a_{jk}^n \Delta t}{\Delta x} \left(\frac{1 + \text{sgn}(a_{jk}^n)}{2} (v_{jk}^n - v_{j-1,k}^n) + \frac{1 - \text{sgn}(a_{jk}^n)}{2} (v_{j+1,k}^n - v_{jk}^n) \right) \\ - \frac{b_{jk}^n \Delta t}{\Delta y} \left(\frac{1 + \text{sgn}(b_{jk}^n)}{2} (v_{jk}^n + v_{j,k-1}^n) - \frac{1 - \text{sgn}(b_{jk}^n)}{2} (v_{j,k+1}^n - v_{jk}^n) \right)$$

或

$$v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n - \frac{a_{jk}^n \Delta t}{2\Delta x} (v_{j+1,k}^n - v_{j-1,k}^n) + \frac{|a_{jk}^n| \Delta t}{2\Delta x} (v_{j+1,k}^n - 2v_{jk}^n + v_{j-1,k}^n) \\ - \frac{b_{jk}^n \Delta t}{2\Delta y} (v_{j,k+1}^n - v_{j,k-1}^n) + \frac{|b_{jk}^n| \Delta t}{2\Delta y} (v_{j,k+1}^n - 2v_{jk}^n + v_{j,k-1}^n)$$

截断误差：使用 Taylor 展开

稳定性分析：能量法、冻结系数法

3 二维常系数扩散方程的初值问题

考虑二维常系数对流方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} + bu_{yy}, & (x, y) \in (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty), t > 0 \\ u(x, y, 0) = f(x, y), & (x, y) \in (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) \end{cases}$$

其中, $a, b \in \mathbb{R}$ 为常数, $u(x, y, t)$ 、 $f(x, y)$ 对 x, y 分别为 2π 周期的周期函数。

方程性质:

- 方程适定性: 代入 $u(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(kt + \omega_x x + \omega_y y)}$

$$ik = -a\omega_x^2 - b\omega_y^2 \Rightarrow u(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(a\omega_x^2 + b\omega_y^2)t + i(\omega_x x + \omega_y y)}$$

方程适定的条件 $a, b > 0$ 。

数值格式:

- 空间剖分: 等距均匀网格, 即 Δx 和 Δy 是常数。
 - x 方向: $x_j = j\Delta x, j = \dots, -1, 0, 1, \dots; \Delta x = 2\pi/n_x$
 - y 方向: $y_k = k\Delta y, k = \dots, -1, 0, 1, \dots; \Delta y = 2\pi/n_y$
- 时间剖分: 为方便分析, 采用均匀剖分 (即 Δt 为常数), 且满足稳定性条件

$$t_n = n\Delta t, n \geq 0.$$

- (x_j, y_k, t_n) 处准确解: $u(x_j, y_k, t_n) = u_{jk}^n$; 数值解: v_{jk}^n

一、使用一维问题的方法构造有限差分格式: 如:

1. FTCS 格式:

$$v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} (v_{j+1,k}^n - 2v_{jk}^n + v_{j-1,k}^n) + \frac{b\Delta t}{\Delta y^2} (v_{j,k+1}^n - 2v_{jk}^n + v_{j,k-1}^n)$$

- 截断误差、相容性

$$T_{jk}^n = \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\Delta t} - \frac{a}{\Delta x^2} (u_{j+1,k}^n - 2u_{jk}^n + u_{j-1,k}^n) - \frac{b}{\Delta y^2} (u_{j,k+1}^n - 2u_{jk}^n + u_{j,k-1}^n)$$

$$=O(\Delta t) + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2)$$

格式逐点相容；对时间是 1 阶精度，对空间是 2 阶精度。

- 整体误差、收敛性

令 $e_{jk}^n = v_{jk}^n - u_{jk}^n$, $E^n = \max_{j,k} |e_{jk}^n|$, $\mu_x = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}$, $\mu_y = \frac{b\Delta t}{\Delta y^2}$ 。若 $0 < \mu_x + \mu_y \leq \frac{1}{2}$, 则有

$$E^{n+1} \leq E^n + \Delta t T^*, \quad T^* = \max_{j,k,n} |T_{jk}^n| = O(\Delta t + \Delta x^2 + \Delta y^2)$$

$$E^0 = 0 \Rightarrow E^{n+1} \leq (n+1)\Delta t T^*, \text{ 具有 } (1,2,2) \text{ 阶收敛}$$

- 稳定性 - Fourier 分析

令 $v_{jk}^n = \hat{v}^n e^{i(\omega_x x_j + \omega_y y_k)}$, $\hat{v}^{n+1} = \hat{Q} \hat{v}^n$, 代入格式得到放大因子 \hat{Q}

$$\hat{Q} = 1 - 4\mu_x \sin^2(\omega_x \Delta x / 2) - 4\mu_y \sin^2(\omega_y \Delta y / 2)$$

要使 $|\hat{Q}| \leq 1$, 则有 $\mu_x + \mu_y \leq \frac{1}{2}$, 格式稳定

2、Crank-Nicolson 格式

令空间算子 $\delta_x^2 = E^1 - 2E^0 + E^{-1} = \Delta x^2 D_+ D_-$

$$\frac{v_{jk}^{n+1} - v_{jk}^n}{\Delta t} = \frac{a}{2\Delta x^2} \delta_x^2 (v_{jk}^n + v_{jk}^{n+1}) + \frac{b}{2\Delta y^2} \delta_y^2 (v_{jk}^n + v_{jk}^{n+1})$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\mu_x \delta_x^2 - \frac{1}{2}\mu_y \delta_y^2\right) v_{jk}^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2}\mu_x \delta_x^2 + \frac{1}{2}\mu_y \delta_y^2\right) v_{jk}^n$$

- 截断误差

$$\begin{aligned} T_j^{n+1/2} &= \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\Delta t} - \frac{a}{2\Delta x^2} \delta_x^2 (u_{jk}^n + u_{jk}^{n+1}) - \frac{b}{2\Delta y^2} \delta_y^2 (u_{jk}^n + u_{jk}^{n+1}) \\ &= O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2) \end{aligned}$$

- 稳定性: Fourier 分析

$v_{jk}^n = \hat{v}^n e^{i(\omega_x x_j + \omega_y y_k)}$, $\hat{v}^{n+1} = \hat{Q} \hat{v}^n$, 得到放大因子

$$\hat{Q} = \frac{(1 - 2\mu_x \sin^2(\omega_x \Delta x / 2) - 2\mu_y \sin^2(\omega_y \Delta y / 2))}{(1 + 2\mu_x \sin^2(\omega_x \Delta x / 2) + 2\mu_y \sin^2(\omega_y \Delta y / 2))}$$

$$|\hat{Q}| \leq 1 \Rightarrow \text{无条件稳定}$$

作业：证明 Crank-Nicolson 格式的阶误差、分析其稳定性。

3. 积分近似方法

- 积分区域 $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [y_{k-1/2}, y_{k+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$

$$\begin{aligned} & \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, y, t_{n+1}) - u(x, y, t_n) dy dx \\ & + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} au_x(x_{j+1/2}, y, t) - au_x(x_{j-1/2}, y, t) dy dt \\ & + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} bu_y(x, y_{k+1/2}, t) - bu_y(x, y_{k-1/2}, t) dx dt = 0 \end{aligned}$$

采用中心积分公式

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\mu_x \delta_x^2 - \frac{1}{2}\mu_y \delta_y^2\right) v_{jk}^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2}\mu_x \delta_x^2 + \frac{1}{2}\mu_y \delta_y^2\right) v_{jk}^n \quad (CN)$$

二、ADI 方法

- 主要思想：引入过渡层，交替使用隐式/显式
- Step 1, $t_n \rightarrow t_{n+1/2}$: 关于 x 的导数使用隐式，关于 y 的导数使用显式（或者反过来）

$$\begin{aligned} \frac{v_{jk}^{n+1/2} - v_{jk}^n}{\Delta t/2} &= \frac{a}{\Delta x^2} \delta_x^2 v_{jk}^{n+1/2} + \frac{b}{\Delta y^2} \delta_y^2 v_{jk}^n \\ \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\mu_x \delta_x^2\right) v_{jk}^{n+1/2} &= \left(1 + \frac{1}{2}\mu_y \delta_y^2\right) v_{jk}^n \quad (1) \end{aligned}$$

- Step 2, $t_{n+1/2} \rightarrow t_{n+1}$: 关于 y 的导数使用隐式，关于 x 的导数使用显式

$$\begin{aligned} \frac{v_{jk}^{n+1} - v_{jk}^{n+1/2}}{\Delta t/2} &= \frac{a}{\Delta x^2} \delta_x^2 v_{jk}^{n+1/2} + \frac{b}{\Delta y^2} \delta_y^2 v_{jk}^{n+1} \\ \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\mu_y \delta_y^2\right) v_{jk}^{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{2}\mu_x \delta_x^2\right) v_{jk}^{n+1/2} \quad (2) \end{aligned}$$

- 将两者结合起来，得到

$$\left(1 - \frac{1}{2}\mu_x \delta_x^2\right) \left(1 - \frac{1}{2}\mu_y \delta_y^2\right) v_{jk}^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2}\mu_x \delta_x^2\right) \left(1 + \frac{1}{2}\mu_y \delta_y^2\right) v_{jk}^n \quad (3)$$

- 相容性：格式可以重新改写成

$$(1 - \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2 - \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2 + \frac{1}{4}\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2)v_{jk}^{n+1} = (1 + \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2 + \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2 + \frac{1}{4}\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2)v_{jk}^n$$

$$\frac{v_{jk}^{n+1} - v_{jk}^n}{\Delta t} = \frac{a}{2\Delta x^2}\delta_x^2(v_{jk}^n + v_{jk}^{n+1}) + \frac{b}{2\Delta y^2}\delta_y^2(v_{jk}^n + v_{jk}^{n+1}) - \frac{ab\Delta t}{4\Delta x^2\Delta y^2}\delta_x^2\delta_y^2(v_{jk}^{n+1} - v_{jk}^n)$$

由此可见，上式除最后一项，即为 Crank-Nicolson 格式

$$\frac{ab\Delta t}{4\Delta x^2\Delta y^2}\delta_x^2\delta_y^2(v_{jk}^{n+1} - v_{jk}^n) = O(\Delta t^2 + \Delta t^2\Delta x^2 + \Delta t^2\Delta y^2)$$

格式相容的，截断误差为 $O(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2)$

- 稳定性：放大因子为

$$\hat{Q} = \frac{(1 - 2\mu_x \sin^2(\omega_x \Delta x/2))(1 - 2\mu_y \sin^2(\omega_y \Delta y/2))}{(1 + 2\mu_x \sin^2(\omega_x \Delta x/2))(1 + 2\mu_y \sin^2(\omega_y \Delta y/2))}$$

$|\hat{Q}| \leq 1 \Rightarrow$ 算法无条件稳定

- 注：两步法 (1)-(2) 也称为 Peaceman-Rachford 格式
- 注：(3) 可以得到其他形式的二步法，如：D'Yakonov 格式

$$\begin{cases} (1 - \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^* = (1 + \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)(1 + \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^n \\ (1 - \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^* \end{cases}$$

三、近似分解方法

- ADI 方法 (3) 的另一种构造思路：
对 Crank-Nicolson 格式

$$(1 - \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2 - \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1} = (1 + \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2 + \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^n$$

在上式左边加上 $\frac{1}{4}\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2v_{jk}^{n+1}$

在上式右边加上 $\frac{1}{4}\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2v_{jk}^n$

相当于在差分方程中增加 $\frac{1}{4}\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2(v_{jk}^{n+1} - v_{jk}^n)$,

该项的量级为 $O(\Delta t^2 + \Delta t^2\Delta x^2 + \Delta t^2\Delta y^2)$ ，不影响原来 C-N 格式的精度

\Rightarrow 新格式： $(1 - \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)(1 - \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1} = (1 + \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)(1 + \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^n$

- Douglas-Rachford 格式
对于 BTCS 格式

$$(1 - \mu_x \delta_x^2 - \mu_y \delta_y^2) v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n$$

希望左边变成 $(1 - \mu_x \delta_x^2)(1 - \mu_y \delta_y^2) v_{jk}^{n+1}$, 为此需要在左边增加 $\mu_x \mu_y \delta_x^2 \delta_y^2 v_{jk}^{n+1}$

为等式两边平衡, 则需要在右边增加 $\mu_x \mu_y \delta_x^2 \delta_y^2 v_{jk}^n$

相当于在格式两边增加 $\mu_x \mu_y \delta_x^2 \delta_y^2 (v_{jk}^{n+1} - v_{jk}^n)$, 该项是 $O(\Delta t^2)$, 不影响原格式的相容性和精度

⇒ Douglas-Rachford 格式

$$(1 - \mu_x \delta_x^2)(1 - \mu_y \delta_y^2) v_{jk}^{n+1} = (1 + \mu_x \mu_y \delta_x^2 \delta_y^2) v_{jk}^n$$

及其计算中的等价格式

$$\begin{cases} (1 - \mu_x \delta_x^2) v_{jk}^* = (1 + \mu_y \delta_y^2) v_{jk}^n \\ (1 - \mu_y \delta_y^2) v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^* - \mu_y \delta_y^2 v_{jk}^n \end{cases}$$

格式放大因子

$$\hat{Q} = \frac{1 + 16\mu_x \mu_y \sin^2(\omega_x \Delta x / 2) \sin^2(\omega_y \Delta y / 2)}{(1 + 4\mu_x \sin^2(\omega_x \Delta x / 2))(1 + 4\mu_y \sin^2(\omega_y \Delta y / 2))}$$

格式无条件稳定。

- ADI 方法处理非齐次方程

$$u_{tt} = au_{xx} + bu_{yy} + F(x, y, t)$$

其对应的 CN 格式为

$$\frac{v_{jk}^{n+1} - v_{jk}^n}{\Delta t} = \frac{a}{2\Delta x^2} \delta_x^2 (v_{jk}^n + v_{jk}^{n+1}) + \frac{b}{2\Delta y^2} \delta_y^2 (v_{jk}^n + v_{jk}^{n+1}) + F_{jk}^{n+1/2}$$

或

$$\frac{v_{jk}^{n+1} - v_{jk}^n}{\Delta t} = \frac{a}{2\Delta x^2} \delta_x^2 (v_{jk}^n + v_{jk}^{n+1}) + \frac{b}{2\Delta y^2} \delta_y^2 (v_{jk}^n + v_{jk}^{n+1}) + \frac{1}{2}(F_{jk}^n + F_{jk}^{n+1})$$

对源项直接进行分解或增加高阶量

$$\begin{cases} (1 - \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^{n+1/2} = (1 + \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^n + \frac{\Delta t}{2}F_{jk}^{n+1/2} \\ (1 - \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1} = (1 + \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2}F_{jk}^{n+1/2} \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} (1 - \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^{n+1/2} = (1 + \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^n + \frac{\Delta t}{2}F_{jk}^n \\ (1 - \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1} = (1 + \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2}F_{jk}^{n+1} \end{cases}$$

- 3 维问题 $u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$

3 维 Peaceman-Rachford 格式 (以 $\Delta t/3$ 为时间步长三步走), 条件稳定, 且截断误差为 $O(\Delta t + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$

从 CN 格式出发

$$(1 - \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2 - \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2 - \frac{1}{2}\mu_z\delta_z^2)v_{jkl}^{n+1} = (1 + \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2 + \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2 + \frac{1}{2}\mu_z\delta_z^2)v_{jkl}^n$$

为使得左边形如 $(1 - \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)(1 - \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)(1 - \frac{1}{2}\mu_z\delta_z^2)v_{jkl}^{n+1}$, 需要增加

$$(\frac{1}{4}\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2 + \frac{1}{4}\mu_y\mu_z\delta_y^2\delta_z^2 + \frac{1}{4}\mu_x\mu_z\delta_x^2\delta_z^2)(v_{jkl}^{n+1} - v_{jkl}^n) - \frac{1}{8}\mu_x\mu_y\mu_z\delta_x^2\delta_y^2\delta_z^2(v_{jkl}^{n+1} + v_{jkl}^n)$$

得到

$$(1 - \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)(1 - \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)(1 - \frac{1}{2}\mu_z\delta_z^2)v_{jkl}^{n+1} = (1 + \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)(1 + \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)(1 + \frac{1}{2}\mu_z\delta_z^2)v_{jkl}^n$$

或

$$(1 - \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)(1 - \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)(1 - \frac{1}{2}\mu_z\delta_z^2)(v_{jkl}^{n+1} - v_{jkl}^n) = (\mu_x\delta_x^2 + \mu_y\delta_y^2 + \mu_z\delta_z^2)v_{jkl}^n + \frac{1}{4}\mu_x\mu_y\mu_z\delta_x^2\delta_y^2\delta_z^2v_{jkl}^n$$

得到 Douglas-Gunn 格式 (舍去了最后的高阶项)

$$\begin{cases} (1 - \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)(v_{jkl}^* - v_{jkl}^n) = (\mu_x\delta_x^2 + \mu_y\delta_y^2 + \mu_z\delta_z^2)v_{jkl}^n \\ (1 - \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)(v_{jkl}^{**} - v_{jkl}^*) = (v_{jkl}^* - v_{jkl}^n) \\ (1 - \frac{1}{2}\mu_z\delta_z^2)(v_{jkl}^{n+1} - v_{jkl}^n) = (v_{jkl}^{**} - v_{jkl}^*) \end{cases}$$

格式无条件稳定, 且截断误差为 $O(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$

作业: 1. 参考书 2: P193, HW4.4.11

2. 构造 $u_t + u_x + u_y = 0$ 的 ADI 格式, 并推导阶段误差、分析其稳定性。

四、分裂方法

$$u_t = Au = A_1u + A_2u$$

$$\begin{cases} u_t = A_1u & \Rightarrow v^{n+1} = Q_1v^n \\ u_t = A_2u & \Rightarrow v^{n+1} = Q_2v^n \end{cases}$$

- 一阶分裂格式

$$v^{n+1} = Q_2Q_1v^n \quad \text{or} \quad \begin{cases} v^{n+1/2} = Q_1v^n \\ v^{n+1} = Q_2v^{n+1/2} \end{cases}$$

假设 Q_1, Q_2 是一阶算子

$$Q_jv = (I + \Delta t A_j)v + O(\Delta t^2)$$

$$\Rightarrow Q_2Q_1v^n = (I + \Delta t A_1 + \Delta t A_2)v + O(\Delta t^2)$$

- 二阶分裂格式: 假设 Q_1, Q_2 是二阶算子

$$v^{n+1} = Qv^n = Q_1\left(\frac{\Delta t}{2}, t_{n+1/2}\right)Q_2(\Delta t, t_n)Q_1\left(\frac{\Delta t}{2}, t_n\right)v^n$$

准确解

$$\begin{aligned} u(t_{n+1}) &= u(t_n) + \Delta t u_t(t_n) + \frac{1}{2}\Delta t^2 u_{tt}(t_n) + O(\Delta t^3) \\ &= u(t_n) + \Delta t(A_1 + A_2)u(t_n) + \frac{1}{2}\Delta t^2(A_1^2 + A_1A_2 + A_2A_1 + A_2^2 + A_{1,t} + A_{2,t})u(t_n) + O(\Delta t^3) \end{aligned}$$

算子

$$Q_j = I + \Delta t \partial_t + \frac{1}{2}\Delta t^2 \partial_{tt} + O(\Delta t^3) = I + \Delta t A_j + \frac{1}{2}\Delta t^2(A_j^2 + A_{j,t}) + O(\Delta t^3)$$

(如果 A_j 表示为 $A(x, t)\partial_x$, 则 $A_{j,t}$ 表示 $(\partial A(x, t)/\partial t)\partial_x$)

$$\begin{aligned} Q &= Q_1\left(\frac{\Delta t}{2}, t_{n+1/2}\right)Q_2(\Delta t, t_n)Q_1\left(\frac{\Delta t}{2}, t_n\right) \\ &= I + \Delta t(A_1 + A_2) + \frac{1}{2}\Delta t^2(A_1^2 + A_1A_2 + A_2A_1 + A_2^2 + A_{1,t} + A_{2,t}) + O(\Delta t^3) \end{aligned}$$

偏微分方程数值方法

第三部分：线性偏微分方程初边值问题的有限差分方法

第七章：线性偏微分方程的初边值问题

目录

1	一维扩散方程的边界处理	1
1.1	基于微分形式的近似	1
1.2	基于积分形式的近似	3
2	一维对流方程的边界处理	4
3	性质分析	5
3.1	收敛性	5
3.2	相容性	6
3.3	稳定性	8
3.4	Lax 定理	9
3.5	能量稳定性	10
3.5.1	对流方程	10
3.5.2	抛物型方程	11
4	二维扩散方程的边界处理	15
4.1	FTCS 边界条件的数值近似	15
4.2	过渡层边界条件的数值近似	16
4.3	任意区域边界条件的数值近似	17

- Dirichlet 边界条件：本质边界条件
- Neumann、Robin 边界条件：自然边界条件

1 一维扩散方程的边界处理

考虑常系数的扩散方程适定的初边值问题：可以结合 Dirichlet 边界，Neumann 边界，Robin 边界。我们以混合边界问题为例：

$$\begin{cases} u_t = au_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, 1] \\ -au_x(0, t) + \sigma u(0, t) = \phi_0(t), & t > 0 \quad (b1) \\ u(1, t) = \phi_1(t), & t > 0 \quad (b2) \end{cases}$$

其中， $u_0(x)$ 、 $\phi_0(t)$ 、 $\phi_1(t)$ 是已知函数， $\sigma \geq 0$ 是已知常数。

空间剖分：均匀网格，

$$\Delta x = \frac{1}{M}, x_j = j\Delta x, j = 0, 1, \dots, M$$

对 PDE 的离散使用 FTCS 格式，边界条件 (b2) 可以直接赋值

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + \mu a \delta_x^2 v_j^n, & j = 1, \dots, M-1, \\ v_j^0 = u_0(x_j), & j = 0, \dots, M, \\ v_M^n = \phi_1(t^n), & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

下面主要讨论 $x=0$ 处边界条件 (b1) 的数值近似。

1.1 基于微分形式的近似

- 单侧差商离散：

$$\begin{aligned} & -a \frac{v_1^n - v_0^n}{\Delta x} + \sigma v_0^n = \phi_0(t^n) \\ \Rightarrow v_0^n &= \frac{a}{a + \sigma \Delta x} v_1^n + \frac{\Delta x}{a + \sigma \Delta x} \phi_0(t^n) = \tilde{\sigma} v_1^n + \frac{\Delta x}{a} \tilde{\sigma} \phi_0(t^n), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

算法实现：更新 t^{n+1} 时刻的区域内部点；再利用边界条件，得到 t^{n+1} 时刻的边界值。

带入内部点格式，可以构造矩阵-向量形式：

$$V^{n+1} = AV^n + \Delta t \Phi^n, \quad V^n = (v_1^n, \dots, v_{M-1}^n)^T$$

注：对于隐式时间离散，

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= v_j^n + \mu a \delta_x^2 v_j^{n+1}, \quad j = 1, \dots, M-1, \\ v_M^{n+1} &= \phi_1(t^{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ -a \frac{v_1^{n+1} - v_0^{n+1}}{\Delta x} + \sigma v_0^{n+1} &= \phi_0(t^{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

先利用边界条件，给定 t^{n+1} 时刻的边界离散关系；再将其同内部离散格式耦合在一起，形成 $M+1$ 阶方程组。若消去边界位置 v_0^{n+1} 和 v_M^{n+1} ，得到 $M-1$ 阶方程组。

$$AV^{n+1} = V^n + \Delta t \Phi^{n+1}$$

注：为提升边界条件的数值精度，可以扩大模版，建立高阶单侧离散

$$u_x(0, t) = \frac{1}{2\Delta x} [-u(2\Delta x, t) + 4u(\Delta x, t) - 3u(0, t)] + O(\Delta x^2)$$

- 双侧离散方法：利用对称模版的数值优势，设定特殊的空间网格，建立导数的双侧离散

- 虚拟点 (ghost point) 方法：将自然边界点设为空间网格点，计算区域外部增加少量的辅助网格点， $x_{-1} = x_0 - \Delta x$

$$\begin{aligned} (b1) \quad &\Rightarrow \quad -a \frac{v_1^n - v_{-1}^n}{2\Delta x} + \sigma v_0^n = \phi_0(t^n) \\ &\Rightarrow \quad v_0^{n+1} = [1 - 2\mu(a + \sigma\Delta x)] v_0^n + 2\mu a v_1^n + 2\mu\Delta x \phi_0(t^n) \end{aligned}$$

- 半网格 (offset mesh) 方法：将自然边界点设置在空间网格的正中间， $x_{1/2} = 0$

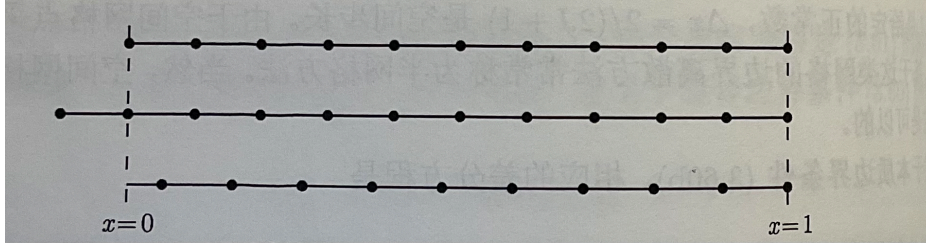
$$\Delta x = \frac{1}{M-1/2}, \quad x_j = (j-1/2)\Delta x, \quad j = 1, \dots, M,$$

设定虚拟点 $x_0 = x_1 - \Delta x = -1/2\Delta x$

$$(b1) \quad \Rightarrow \quad -a \frac{v_1^n - v_0^n}{\Delta x} + \frac{\sigma}{2}(v_0^n + v_1^n) = \phi_0(t^n)$$

$$\Rightarrow v_1^{n+1} = \left[1 - \mu a \frac{2a + 3\sigma\Delta x}{2a + \sigma\Delta x} \right] v_1^n + \mu a v_2^n + \frac{2\mu a \Delta x}{2a + \sigma\Delta x} \phi_0(t^n)$$

算法实现：数值编程保留虚拟点，直接应用于差分方程。



1.2 基于积分形式的近似

$$\Delta x = \frac{1}{M}, \quad x_j = j\Delta x, \quad j = 0, \dots, M.$$

在 $[x_0, x_{1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$ 上积分：

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_0}^{x_{1/2}} u_t dx dt = a \int_{t^n}^{t^{n+1}} [u_x(x_{1/2}, t) - u_x(x_0, t)] dt$$

$$\frac{\Delta x}{2} (u_0^{n+1} - u_0^n) + O(\Delta t \Delta x^2) = a \Delta t \left[\frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x} + O(\Delta x^2) + \frac{1}{a} (\phi_0(t^n) - \sigma u_0^n) \right] + O(\Delta t^2)$$

$$\Rightarrow v_0^{n+1} = [1 - 2\mu(a + \sigma\Delta x)] v_0^n + 2\mu a v_1^n + 2\mu \Delta x \phi_0(t^n)$$

Homework: 考虑模型问题

$$\begin{cases} u_t = au_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, 1] \\ -au_x(0, t) + \sigma u(0, t) = \phi_0(t), & t > 0 \quad (b1) \\ u(1, t) = \phi_1(t), & t > 0 \quad (b2) \end{cases}$$

采用 CN 格式，相应的自然边界分别采用单侧离散方法、虚拟网格方法和半网格方法，进行处理，请写出相应的差分格式。

程序作业：第二本参考书，P18，HW 1.5.9 (单侧差商离散 + 半网格方法)，HW 1.5.10.

2 一维对流方程的边界处理

$$\begin{cases} u_t = u_x, & x \in (0,1), t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [0,1], \\ u(1,t) = \phi(t), & t > 0. \end{cases}$$

$x=1$ 处: 需要入流边界条件;

$x=0$ 处: 不能提供出流边界条件。

空间使用均匀剖分:

$$\Delta x = \frac{1}{M}, \quad x_j = j\Delta x, \quad j = 0, \dots, M.$$

- 使用单边迎风格式:

出流边界点值可以直接利用格式计算出来, 无需特殊的边界处理

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(v_{j+1}^n - v_j^n), & j = 0, \dots, M-1, \\ v_M^{n+1} = \phi(t^{n+1}). \end{cases}$$

- 使用双边离散 (如 Lax-Wendroff 格式, Lax-Friedrichs 格式):

需要使用人工边界条件处理 v_0^{n+1}

– 利用内部数值解, 进行相应的外插多项式逼近 (不依赖 PDE 和数值解)

常数插值: $v_0^{n+1} = v_1^{n+1}$ (一阶近似)

线性插值: $v_0^{n+1} = 2v_1^{n+1} - v_2^{n+1}$ (二阶近似)

– 利用特征性回溯理论解, 进行内插多项式逼近

$$u(0, t^{n+1}) = u(\Delta t, t^n) \quad \Rightarrow \quad v_0^{n+1} = (1-\lambda)v_0^n + \lambda v_1^n = v_0^n + \lambda(v_1^n - v_0^n)$$

3 性质分析

考虑区域 $[0, 1]$:

- 均匀剖分网格尺度 $\Delta x = \frac{1}{M}$, $x_j = j\Delta x$, $j = 0, \dots, M$ 。
 标记: 数值解 $V^n = \{v_0^n, \dots, v_M^n\} \in X$, PDE 准确解在格点值的矢量 $U^n = \{u_0^n, \dots, u_M^n\} \in X$
- 均匀剖分网格尺度 $\Delta x^{(k)} = \frac{1}{M_k}$, $k = 1, 2, \dots$, 且当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\Delta x^{(k)} \rightarrow 0$ 。
 标记: 数值解 $V^{n,k} = \{v_0^{n,k}, \dots, v_{M_k}^{n,k}\} \in X^k$, PDE 准确解在格点值的矢量 $U^{n,k} = \{u_0^{n,k}, \dots, u_{M_k}^{n,k}\} \in X^k$, $\|\cdot\|_k$ 是空间 X^k 的一个模。

3.1 收敛性

- 初值问题与初边值问题的差分格式收敛的最大区别:
 初值问题: Δx 或 Δt 减小时, 考虑的空间序列仍是一个序列空间 (无限维空间);
 初边值问题: Δx 或 Δt 减小时, 考虑的空间序列 X^k 发生变化 (维度升到的有限维空间)。因此, 没有“一个好的空间”(如固定维数的空间) 可以显示差分格式的收敛性。
- 定义: 若 $k \rightarrow \infty$ 时, $\Delta x^{(k)} \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$, $n\Delta t \rightarrow t$, 有

$$\|U^{n+1,k} - V^{n+1,k}\|_k \rightarrow 0$$

则称差分格式 $V^{n+1,k} = Q \cdot V^{n,k} + \Delta t \cdot G^{n,k}$ 是 (无条件) 收敛的。

若 $\|U^{n+1,k} - V^{n+1,k}\|_k = O((\Delta x^{(k)})^p + (\Delta t)^q)$, 则称该差分方法关于模 $\|\cdot\|_k$ 是 (p, q) 阶收敛的。

- 例:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

的数值格式

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{(\Delta x^{(k)})^2} (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n), & j = 1, \dots, M_k - 1, \\ v_j^0 = f(x_j), & j = 0, \dots, M_k, \\ v_0^n = v_{M_k}^n = 0, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

当 $0 \leq \mu = \frac{\Delta t}{(\Delta x^{(k)})^2} \leq \frac{1}{2}$ 时, 该方法按最大模是收敛的。

证： 标记 $V^{n,k} = (v_1^{n,k}, \dots, v_{M_k-1}^{n,k})^T$, $U^{n,k} = (u_1^{n,k}, \dots, u_{M_k-1}^{n,k})^T$, $z_j^{n,k} = v_j^{n,k} - u(x_j^{(k)}, t^n)$
 考虑无穷模 $\|V^{n,k}\|_{k,\infty} = \max_{1 \leq j \leq M_k-1} |v_j^{n,k}|$, 当 $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} \|Z^{n+1,k}\|_{k,\infty} &\leq \|Z^{n,k}\|_{k,\infty} + A \left(\Delta t^2 + \Delta t (\Delta x^{(k)})^2 \right) \\ &\leq (n+1) \Delta t A \left(\Delta t + (\Delta x^{(k)})^2 \right) \\ &\rightarrow 0, \quad \text{as } \Delta t \rightarrow 0, \Delta x^{(k)} \rightarrow 0, (n+1) \Delta t \rightarrow t^* \end{aligned}$$

3.2 相容性

相容性： 反应 PDE 的初边值问题与差分方法（包括差分方程和初边值条件的近似）之间的关系。

- **截断误差**： 对于满足 $\mathcal{L}u = g$ 的任意光滑函数 $u(x,t)$, 考虑差分方法 $Lv_j^n = g_j^n$ （包括边界条件的近似）, $T_j^n = Lu_j^n - g_j^n - (\mathcal{L}u(x_j, t^n) - g(x_j, t^n))$ 在 (x_j, t^n) 处（包含区域内部和边界）的（局部）截断误差。

注： 区域内部的截断误差可以与边界上的截断误差不一样。

- **精度**： 若差分方法（区域内部 PDE 的有限差分近似，以及边界条件的数值近似）的截断误差 $T_j^n = O((\Delta x)^p + (\Delta t)^q)$ （包括区域内部和边界，且 p, q 取区域内部和边界上的最小值），则称该差分方法的（局部）截断误差对空间是 p 阶、对时间是 q 阶；且该差分方法对空间是 p 阶、对时间是 q 阶精度。
- **逐点相容**： 当 $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, $(j\Delta x, n\Delta t) \rightarrow (x^*, t^*)$ 时，若差分方法 $Lv_j^n = g_j^n$ （包括边界条件的近似）的截断误差 $T_j^n \rightarrow 0$, 则称差分方法在 (x^*, t^*) 点与相应的源方程 $\mathcal{L}u = g$ 的初边值问题是（无条件）逐点相容的。
- **按模相容**： 若 $\forall k \rightarrow \infty$ 时，均匀剖分序列 $\{\Delta x^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ 有 $\Delta x^{(k)} \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, (n+1)\Delta t \rightarrow t^*$, PDE 初边值问题的解 U 满足

$$U^{n+1} = Q \cdot U^n + \Delta t \cdot G^n + \Delta t \cdot T^n$$

且 $\|T^n\|_k \rightarrow 0$, 则称差分方法 $V^{n+1} = Q \cdot V^n + \Delta t \cdot G^n$ 与相应的源方程 PDE 初边值问题关于模 $\|\cdot\|_k$ 是（无条件）相容的。

若 $\|T^n\|_k = O((\Delta x)^p + (\Delta t)^q)$, 则称该差分方法按模 $\|\cdot\|_k$ 具有 (p, q) 阶精度。

- 例：讨论

$$\begin{cases} u_t = a u_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, 1] \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0 \\ u(1, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

的差分方法 (边界处理 $\frac{v_1^n - v_{-1}^n}{2\Delta x} = 0$)

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + a\mu\delta_x^2 v_j^n, & j = 1, \dots, M-1, \\ v_j^0 = u_0(x_j), & j = 0, \dots, M, \\ v_0^{n+1} = (1 - 2a\mu)v_0^n + 2a\mu v_1^n, & n = 0, 1, \dots \\ v_M^{n+1} = 0, & n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

证：格式关于 sup-norm 或 $l_{2,\Delta x}$ -norm 相容，精度为 $O(\Delta t + \Delta x^2)$

- 例：讨论上述初边值问题的差分格式 (边界处理 $\frac{v_1^n - v_0^n}{\Delta x} = 0$)

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + a\mu\delta_x^2 v_j^n, & j = 1, \dots, M-1, \\ v_j^0 = u_0(x_j), & j = 0, \dots, M, \\ v_0^{n+1} = v_1^{n+1}, & n = 0, 1, \dots \\ v_M^{n+1} = 0, & n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

证：格式不相容！

- 例：讨论上述初边值问题，定义在网格 $x_j = (j - 1/2)\Delta x$, $\Delta x = 1/(M + 1/2)$ 上的差分格式

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + a\mu\delta_x^2 v_j^n, & j = 2, \dots, M-1, \\ v_j^0 = u_0(x_j), & j = 0, \dots, M, \\ v_0^{n+1} = v_1^{n+1}, & n = 0, 1, \dots \\ v_M^{n+1} = 0, & n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

证：格式精度为 $T_1^n = O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$

Homework: 第二本参考书, P72: HW2.3.5(a)

3.3 稳定性

- **稳定性:** 对于 $\mathcal{L}u = g$ 的二层格式 (包括数值边界): $V^{n+1} = Q \cdot V^n, n \geq 1$, 若存在非负常数 K 和 β , 以及正的 $\Delta x_0, \Delta t_0$, 使得对于任意 $0 < \Delta x^{(k)} \leq \Delta x_0, 0 < \Delta t^{(k)} \leq \Delta t_0, 0 \leq t = (n+1)\Delta t$, 有

$$\|V^{n+1}\|_k \leq K \exp^{\beta t} \|V^0\|_k$$

则称差分格式关于模 $\|\cdot\|_k$ 是稳定的。

- **例:**

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{(\Delta x_k)^2} (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n), & j = 1, \dots, M-1, \\ v_j^0 = f(x_j), & j = 0, \dots, M, \\ v_0^n = v_M^n = 0, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

试证明: 当 $0 \leq \mu = \frac{\Delta t}{(\Delta x^{(k)})^2} \leq \frac{1}{2}$ 时, 该方法是按照 $\|\cdot\|_{\infty, k}$ 模 (即最大模) 稳定的。

Homework: 第二本参考书, P78: HW2.4.2 (按照最大模)

- **定理:** 对于 $\mathcal{L}u = g$ 的二层格式 (包括数值边界): $V^{n+1} = Q \cdot V^n, n \geq 1$, 若 $\forall k \rightarrow \infty$ 时, 他关于模 $\|\cdot\|_k$ 是稳定的充分必要条件是:
存在常数 $\Delta x_0 > 0, \Delta t_0 > 0, K \geq 0, \beta \geq 0$, 使得 $\forall 0 \leq \Delta x^{(k)} \leq \Delta x_0, 0 < \Delta t < \Delta t_0, t = (n+1)\Delta t$, 有

$$\|Q^{n+1}\|_k \leq K \exp^{\beta t}$$

则称差分格式关于模 $\|\cdot\|_k$ 是稳定的。

- **定理:** 对于 $\mathcal{L}u = g$ 的二层格式 (包括数值边界): $V^{n+1} = Q \cdot V^n, n \geq 1$, 若 $\forall k \rightarrow \infty$ 时, 他关于模 $\|\cdot\|_{2, k}$ 是稳定的必要条件是:
存在 $c \geq 0$, 使得

$$\sigma(Q) \leq 1 + c\Delta t$$

其中, $\sigma(Q) = \max_j |\lambda_j(Q)|$ 为 Q 的谱半径。

注: 若 Q 是对称的, 或者存在可逆矩阵 S 使得 Q 相似于一个对称矩阵 (即 SQS^{-1} 是对称矩阵), 且 S 和 S^{-1} 一直有界, 则上述条件是充分必要条件。

• 例:

$$\begin{cases} u_t = au_{xx}, & x \in (0,1), t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [0,1] \\ -au_x(0,t) + \sigma u(0,t) = 0, & t > 0 \\ u(1,t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

的单侧差商离散:

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + \mu a \delta_x^2 v_j^n, & j = 1, \dots, M-1, \\ v_j^0 = u_0(x_j), & j = 0, \dots, M, \\ v_0^{n+1} = \frac{a}{a + \sigma \Delta x} v_1^{n+1}, & n = 0, 1, \dots \\ v_M^{n+1} = 0, & n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

证明:

$$V^{n+1} = QV^n$$

- 当 $2\mu a \leq 1$ 时, Q 的元素都是非负的, 且每行的和 $\leq 1 \Rightarrow \|Q\|_\infty \leq 1$, 格式最大模稳定
- 当 $2\mu a \leq 1$ 时, Q 的谱半径 $\sigma(A) \leq 1 \Rightarrow$, 格式 L_2 模稳定

3.4 Lax 定理

Lax 定理: 对于一个适定的线性偏微分方程初边值问题的二层格式, 若其按序列模 $\|\cdot\|_k$ 是 (p, q) 阶精度的 ($p > 0, q > 0$), 且它关于模 $\|\cdot\|_k$ 是稳定的, 则它是关于 $\|\cdot\|_k$ 模 (p, q) 阶收敛的。

3.5 能量稳定性

标记

$$(u, v)_{r,s} = \sum_{j=r}^s \bar{u}_j v_j \Delta x, \quad \|u\|_{r,s}^2 = (u, u)_{r,s}$$

满足性质

$$\begin{aligned} (u, D_+ v)_{r,s} &= - (D_- u, v)_{r+1, s+1} + \bar{u}_j v_j |_r^{s+1} \\ &= - (D_+ u, v)_{r,s} - \Delta x (D_+ u, D_+ v)_{r,s} + \bar{u}_j v_j |_r^{s+1} \\ (u, D_0 v)_{r,s} &= - (D_0 u, v)_{r+1, s+1} + \frac{1}{2} (\bar{u}_j v_{j+1} + \bar{u}_{j+1} v_j) |_{r-1}^s \\ F_{j+\alpha} |_l^k &= F_{k+\alpha} - F_{l+\alpha} \end{aligned}$$

3.5.1 对流方程

$$\begin{cases} u_t = u_x, & 0 \leq x \leq 1, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u(1, t) = g(t). \end{cases}$$

- PDE 性质:

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 = (u, u_t) + (u_t, u) = (u, u_x) + (u_x, u) = |u|^2|_0^1 = |g(t)|^2 - |u(0, t)|^2$$

或 $\eta > \eta_0 \geq 0$

$$\|e^{-\eta T} u(\cdot, T)\|^2 + \int_0^T |e^{-\eta \tau} u(\cdot, \tau)|_{\Gamma}^2 d\tau = C \left(\|f(\cdot)\|^2 + \int_0^T |e^{-\eta \tau} g(\tau)|^2 d\tau \right)$$

(Hint: 定义 $v = e^{-\eta t} u$)

- 半离散格式:

$$\begin{cases} \frac{dv_j}{dt} = D_+ v_j, & j = 0, 1, \dots, N-1, \\ v_j(0) = f_j, & j = 0, 1, \dots, N, \\ v_N(t) = g(t) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \|v\|_{0, N-1}^2 \leq |g(t)|^2 \quad \Rightarrow \quad \|v(t)\|_{0, N-1}^2 \leq \|f\|_{0, N-1}^2 + \int_0^t |g(\tau)|^2 d\tau$$

- FTFS 格式

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = (I + \Delta t D_+) v_j, & j = 0, 1, \dots, N-1, \\ v_j^0 = f_j, & j = 0, 1, \dots, N, \\ v_N^n = g^n \end{cases}$$

若 $\lambda = \Delta t / \Delta x \leq 1$, 则

$$\|v^n\|_{0,N-1}^2 \leq \|f\|_{0,N-1}^2 + \sum_{m=0}^n |g^m|^2 \Delta t$$

注: 若考虑方程
$$\begin{cases} u_t = -u_x, & 0 \leq x \leq 1, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u(0, t) = g(t). \end{cases}$$

半离散格式: $\frac{d}{dt} \|v(t)\|_{1,N}^2 = -\Delta x \|D_- v\|_{1,N}^2 - |v_N(t)|^2 + |g(t)|^2$

FTBS 格式: $\|v^n\|_{1,N}^2 \leq \|v^0\|_{1,N}^2 + \Delta t |g^n|^2$

3.5.2 抛物型方程

1. 考虑初边值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 \leq x \leq 1, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u(0, t) = u(1, t) = 0. \end{cases}$$

假设 (数值) 解都是实数。

- PDE 性质:

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 = (u, u_t) + (u_t, u) = (u, u_{xx}) + (u_{xx}, u) = -2\|u_x\|^2 + (\bar{u}u_x + \bar{u}_x u)|_0^1 = -2\|u_x\|^2 \leq 0$$

或者

$$\|u(\cdot, t)\|^2 \leq \|u(\cdot, 0)\|^2 = \|f\|^2$$

- 半离散格式:

$$\begin{cases} \frac{dv_j}{dt} = D_+ D_- v_j, & j = 1, \dots, N-1, \\ v_j(0) = f_j, & j = 0, 1, \dots, N, \\ v_0(t) = v_N(t) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{1,N-1}^2 = -\|D_- v\|_{2,N}^2 \leq 0$$

- FTCS 格式:

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + \Delta t D_+ D_- v_j, & j = 1, \dots, N-1, \\ v_j^0 = f_j, & j = 0, 1, \dots, N, \\ v_0^n = v_N^n = 0 \end{cases} \quad (1)$$

当 $\frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1$, 算法稳定。(和周期边界稳定性一致)

$$\|v^{n+1}\|_{1,N-1}^2 \leq \|v^n\|_{1,N-1}^2 - 2\Delta t \left(1 - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2}\right) \|D_- v^n\|_{1,N}^2$$

2. 考虑边界条件

$$u_x(\gamma, t) + r_\gamma u(\gamma, t) = 0, \quad \gamma = 0, 1$$

- PDE 性质:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u\|^2 &= -2\|u_x\|^2 + 2(|r_0| + |r_1|) \|u\|_\infty^2 \\ &\leq -\|u_x\|^2 + \alpha \|u\|^2, \quad \alpha = 2(|r_1| + |r_0|)(2(|r_1| + |r_0|) + 1) \end{aligned}$$

若 $f \in C^1([0, L])$, 则对于任意 $\varepsilon > 0$

$$\|f\|_\infty^2 \leq \varepsilon \|f_x\|^2 + (\varepsilon^{-1} + L^{-1}) \|f\|^2$$

标记 $x_1, x_2 \in [0, L]$, 满足

$$|f(x_1)| = \min |f(x)|, \quad |f(x_2)| = \max |f(x)| = \|f\|_\infty$$

不失一般性, $x_1 < x_2$ 。利用 $\int_{x_1}^{x_2} \bar{f} f_x dx = |f|^2|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \bar{f}_x f dx$, 有

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty^2 - L^{-1} \|f\|^2 &\leq \|f\|_\infty^2 - |f(x_1)|^2 \\ &\leq 2 \int_{x_1}^{x_2} |f| \cdot |f_x| dx \leq 2 \int_0^L |f| \cdot |f_x| dx \\ &\leq 2\sqrt{\varepsilon} \|f_x\| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|f\| \leq \varepsilon \|f_x\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|f\|^2 \end{aligned}$$

- 选取网格剖分

$$(N-1)\Delta x = 1, \quad x_j = \left(j - \frac{1}{2}\right)\Delta x, \quad j = 0, 1, \dots, N$$

则有 $x_{1/2} = 0, x_{N-1/2} = 1$ 。考虑半离散格式:

$$\begin{cases} \frac{dv_j}{dt} = D_+ D_- v_j, & j = 1, \dots, N-1, \\ v_j(0) = f_j, & j = 0, 1, \dots, N, \\ D_+ v_0 + \frac{1}{2}r_0(v_0 + v_1) = 0 \\ D_- v_N + \frac{1}{2}r_1(v_N + v_{N-1}) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

当 Δx 足够小时, 有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{1,N-1}^2 \leq \text{Const} \|v\|_{1,N-1}^2$$

$$\max_{0 \leq j \leq N} |f_j|^2 \leq \varepsilon \|D_- f\|_{1,N}^2 + (1 + \varepsilon^{-1}) \|f\|_{0,N}^2, \quad \forall \varepsilon > 0$$

标记

$$|f_s| = \min_{0 \leq j \leq N} |f_j|, \quad |f_r| = \max_{0 \leq j \leq N} |f_j|$$

不失一般性, 假设 $s < r$ 。因为

$$(f, D_+ f)_{s,r-1} = -(D_- f, f)_{s+1,r} + |f_j|^2|_s^r$$

则有

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq j \leq N} |f_j| &\leq \min_{0 \leq j \leq N} |f_j| + \|f\|_{s,r} (\|D_+ f\|_{s,r-1} + \|D_- f\|_{s+1,r}) \\ &\leq \|f\|_{0,N}^2 + 2\|f\|_{0,N} \|D_- f\|_{1,N} \\ &\leq \varepsilon \|D_- f\|_{1,N}^2 + (1 + \varepsilon^{-1}) \|f\|_{0,N}^2 \end{aligned}$$

3. 考虑非齐次的边界条件: $x_0 = 0, x_{N-1/2} = 1$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), \\ u(0, t) = g_0(t), \quad u_x(1, t) = g_1(t). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}v_j = D_+D_-v_j, & j = 1, \dots, N-1 \\ v_j(0) = f_j, & j = 0, \dots, N-1 \\ v_0(t) = g_0(t), & D_-v_N(t) = g_1(t). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \|v(t)\|^2 &\leq \|\varphi(t)\|^2 + e^t \|\tilde{f}\|^2 + \int_0^t e^{t-\tau} \|\tilde{F}(\tau)\|^2 d\tau \\ &\leq \text{Const } e^t (|g_0(t)|^2 + |g_0(0)|^2 + |g_1(t)|^2 + |g_1(0)|^2 + \|\tilde{f}\|^2 \\ &\quad + \int_0^t (|g_0(\tau)|^2 + |\frac{dg_0(\tau)}{d\tau}|^2 + |g_1(\tau)|^2 + |\frac{dg_1(\tau)}{d\tau}|^2) d\tau) \end{aligned}$$

Hint: 定义

$$\varphi_j(t) = (x_j - 1)^2 g_0(t) + x_j(x_j - 1)g_1(t), \quad w_j(t) = v_j(t) - \varphi_j(t)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}w_j = D_+D_-w_j + \tilde{F}_j, & j = 1, \dots, N-1 \\ w_j(0) = \tilde{f}_j, & j = 0, \dots, N-1 \\ w_0(t) = 0, & D_-w_N(t) = 0. \end{cases}$$

作业：第一本教材，P465，HW 11.2.2

4 二维扩散方程的边界处理

考虑二维常系数扩散方程适定的初边值问题

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} + bu_{yy}, & x \in \Omega = (0,1) \times (0,1), t > 0 \\ u(x,y,0) = u_0(x,y), & x \in \bar{\Omega} = [0,1] \times [0,1] \\ u(x,y,t) = g(x,y,t), & x \in \partial\Omega_1 + \Omega_3 + \Omega_4, t > 0, \\ u_x(1,y,t) = f(y,t), & x \in \partial\Omega_2, t > 0. \end{cases}$$

其中, 常数 $a, b > 0$, 边界为

$$\begin{aligned} \partial\Omega &= \partial\Omega_1 + \partial\Omega_2 + \partial\Omega_3 + \partial\Omega_4, \\ \partial\Omega_1 : y &= 0, \quad \partial\Omega_2 : x = 1, \quad \partial\Omega_3 : y = 1, \quad \partial\Omega_4 : x = 0 \end{aligned}$$

即: $x = 1$ 处, 给出的是第二类 (Neumann) 边界条件; 在其他边界, 给出的是第一类 (Dirichlet) 边界条件。

空间采用等距剖分:

- x 方向均分成 M 等份: $\Delta x = 1/M, x_i = i\Delta x, i = 0, 1, \dots, M$;
- y 方向均分成 N 等份: $\Delta y = 1/N, y_j = j\Delta y, j = 0, 1, \dots, N$;

时间剖分: 假设使用均匀剖分, 且满足稳定性条件。

4.1 FTCS 边界条件的数值近似

$$\begin{cases} v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^n + \mu_x a \delta_x^2 v_{i,j}^n + \mu_y b \delta_y^2 v_{i,j}^n, & i = 1, \dots, M-1, j = 1, \dots, N-1, \\ v_{i,j}^0 = u_0(x_i, y_j), & i = 0, \dots, M, j = 0, \dots, N, \end{cases}$$

边界处理:

- Dirichlet B.C.: $u(x,y,t) = g(x,y,t), x \in \partial\Omega_1 + \Omega_3 + \Omega_4$,

$$\begin{cases} v_{0,j}^n = g(x_0, y_j, t^n), & j = 0, \dots, N, n > 0, \\ v_{i,0}^n = g(x_i, y_0, t^n), & i = 0, \dots, M, n > 0, \\ v_{i,N}^n = g(x_i, y_N, t^n), & i = 0, \dots, M, n > 0, \end{cases}$$

- Nuemann B.C.: $u_x(1,y,t) = f(y,t), x \in \partial\Omega_2$

– 一阶近似:

$$\frac{v_{M,j}^n - v_{M-1,j}^n}{\Delta x} = f(y_j, t^n), \quad j = 1, \dots, N-1, n \geq 0$$

– 二阶近似: 定义虚拟点 (x_{M+1}, y_j)

$$\frac{v_{M+1,j}^n - v_{M-1,j}^n}{2\Delta x} = f(y_j, t^n), \quad j = 0, 1, \dots, N, n \geq 0$$

带入格式, 有

$$v_{M,j}^{n+1} = v_{M,j}^n + 2\mu_x a (v_{M-1,j}^n - v_{M,j}^n + \Delta x f(y_j, t^n)) + \mu_y b \delta_y^2 v_{M,j}^n$$

4.2 过渡层边界条件的数值近似

回顾: Peaceman-Rachford 格式:

$$\left(\mathbb{I} - \frac{1}{2} a \mu_x \delta_x^2 \right) \left(\mathbb{I} - \frac{1}{2} b \mu_y \delta_y^2 \right) v_{i,j}^{n+1} = \left(\mathbb{I} + \frac{1}{2} a \mu_x \delta_x^2 \right) \left(\mathbb{I} + \frac{1}{2} b \mu_y \delta_y^2 \right) v_{i,j}^n$$

ADI 方法:

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{I} - \frac{1}{2} a \mu_x \delta_x^2 \right) v_{i,j}^{n+1/2} &= \left(\mathbb{I} + \frac{1}{2} b \mu_y \delta_y^2 \right) v_{i,j}^n \\ \left(\mathbb{I} - \frac{1}{2} b \mu_y \delta_y^2 \right) v_{i,j}^{n+1} &= \left(\mathbb{I} + \frac{1}{2} a \mu_x \delta_x^2 \right) v_{i,j}^{n+1/2} \end{aligned}$$

D'Yakonov 方法:

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{I} - \frac{1}{2} a \mu_x \delta_x^2 \right) v_{i,j}^* &= \left(\mathbb{I} + \frac{1}{2} a \mu_x \delta_x^2 \right) \left(\mathbb{I} + \frac{1}{2} b \mu_y \delta_y^2 \right) v_{i,j}^n \\ \left(\mathbb{I} - \frac{1}{2} b \mu_y \delta_y^2 \right) v_{i,j}^{n+1} &= v_{i,j}^* \end{aligned}$$

整数层, 边界条件直接设置。过渡层 $v_{i,j}^{n+1/2}$ 或 $v_{i,j}^*$ 需特殊处理。

考虑 Dirichlet 边界条件: $u(0, y, t) = g(0, y, t)$

• D'Yakonov 方法:

– 直接赋值: $v_{0,j}^* = g(x_0, y_j, t^{n+1})$

注意：利用格式

$$v_{0,j}^{n+1} - v_{0,j}^* = \frac{1}{2} b \mu_y \delta_y^2 v_{0,j}^{n+1} = \frac{b \Delta t}{2} \left(u_{yy}|_{0,j}^{n+1} + O(\Delta y^2) \right)$$

内部格式时间精度为 2 阶，但是边界时间精度只有 1 阶。

– 利用格式：保持 2 阶精度

$$\begin{aligned} v_{0,j}^* &= \left(\mathbb{I} - \frac{1}{2} b \mu_y \delta_y^2 \right) v_{i,j}^{n+1} \\ &= (1 + b \mu_y) g(x_0, y_j, t^{n+1}) - \frac{1}{2} b \mu_y g(x_0, y_{j-1}, t^{n+1}) - \frac{1}{2} b \mu_y g(x_0, y_{j+1}, t^{n+1}) \end{aligned}$$

• ADI 方法：

– 直接赋值：会破坏数值格式的精度阶，除非边界函数 g 与时间无关。

$$v_{0,j}^{n+1/2} = g(x_0, y_j, t^{n+1/2})$$

– 利用格式：两个方程相加，

$$\begin{aligned} 2v_{i,j}^{n+1/2} &= \left(\mathbb{I} + \frac{1}{2} b \mu_y \delta_y^2 \right) v_{i,j}^n + \left(\mathbb{I} - \frac{1}{2} b \mu_y \delta_y^2 \right) v_{i,j}^{n+1} \\ \Rightarrow v_{0,j}^{n+1/2} &= \frac{1}{2} \left[v_{0,j}^n + v_{0,j}^{n+1} \right] - \frac{1}{4} b \mu_y \delta_y^2 \left[v_{0,j}^{n+1} - v_{0,j}^n \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[g(x_0, y_j, t^n) + g(x_0, y_j, t^{n+1}) \right] - \frac{1}{4} b \mu_y \delta_y^2 \left[g(x_0, y_j, t^{n+1}) - g(x_0, y_j, t^n) \right] \end{aligned}$$

注： $v_{i,0}^{n+1/2}$, $v_{i,N}^{n+1/2}$ 使用不到，无需特殊处理。

4.3 任意区域边界条件的数值近似

复杂区域 Ω 上使用正交剖分的网格：

$$M_h = \{(x_i, y_j) : x_i = x_0 + ih, y_j = y_0 + jh, \}_{i=-\infty, \infty}^{j=-\infty, \infty}$$

- **网格内点**： M_h 的网格点落在 Ω 内（如 G, T, W, C, S, D）。若相应位置的差分方程同边界信息无关，则称其为**规则内点**（如 G, T）；否则，称为**非规则内点**（如 W, C, S, D）。

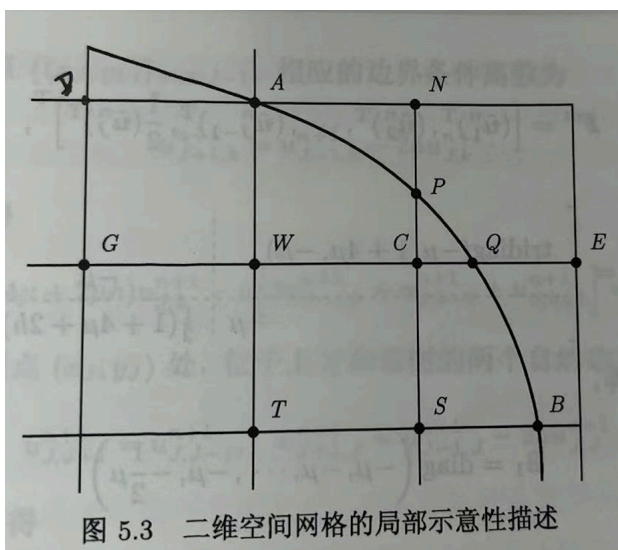


图 5.3 二维空间网格的局部示意性描述

- **网格边界点:** M_h 的网格线同边界 $\Gamma = \partial\Omega$ 的交点 (如 A, B, P, Q)。

- 标记

$$|CQ| = s_1h, \quad |CP| = s_2h, \quad |CW| = s_3h, \quad |CS| = s_4h$$

其中, $s_1 < 1, s_2 < 1$ 对应网格边界点, $s_3 = s_4 = 1$ 对应网格内点。

- Dirichlet **边界处理:** $u|_{\widehat{APQB}} = g(x, y)$

- 直接赋值: $v_A = g(A)$

$$\Rightarrow v_W^{n+1} = v_W^n + a\mu(v_G^n - 2v_W^n + v_C^n) + b\mu(g(A) - 2v_W^n + v_T^n)$$

- 插值逼近技术: 将最靠近的边界点信息直接迁移到非规则内点上
设靠近 C 的最近的网格边界点是 Q。

- 1) 常数延拓技术

$$v_C = g(Q)$$

- 2) 利用 Q 和 W 线形插值技术

$$v_C = \frac{s_1}{s_1 + s_3}v_W + \frac{s_3}{s_1 + s_3}g(Q)$$

- 非等臂长差分方程: 将网格边界点熟虑到非规则内点的离散模版

$$u_{xx}|_C \approx \frac{1}{\frac{1}{2}(s_1 + s_3)h} \left[\frac{v_Q - v_C}{s_1h} - \frac{v_C - v_W}{s_3h} \right], \quad v_Q = g(Q)$$

$$u_{yy}|_C \approx \frac{1}{\frac{1}{2}(s_2 + s_4)h} \left[\frac{v_P - v_C}{s_2 h} - \frac{v_C - v_S}{s_4 h} \right], \quad v_P = g(P)$$

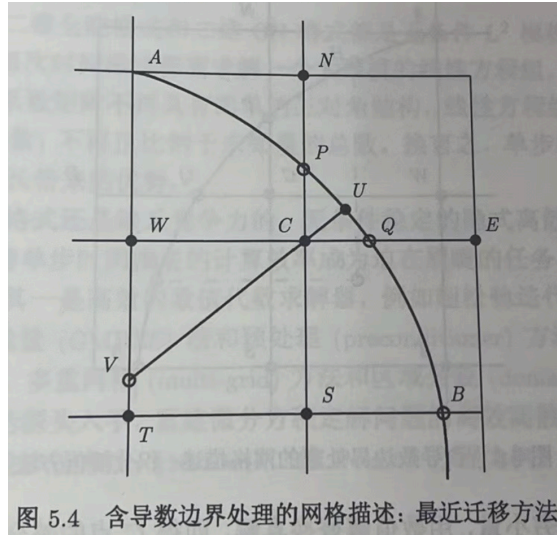
- Neumann **边界处理**: $\nabla u \cdot \vec{n}|_{\widehat{APQB}} = g(x, y)$, $\vec{n} = (n_1, n_2)^T$ 是单位外法向量

– 单侧差商离散: 考虑 A 点

$$n_1 [v_A - v_D] + n_2 [v_A - v_W] = hg(A)$$

– 边界条件迁移技术:

- 1) 确定 C 点到边界 Γ 的垂线, 确定垂足 U;



- 2) 确定垂线 CU 同内部网格线的交线, 记为 V;
- 3) 利用周边信息, 给出 v_V 的插值近似, 如

$$v_V = \frac{|VT|}{h} v_W + \frac{|WV|}{h} v_T$$

- 4) 利用 C 和 V 的函数信息, 建立法向导数的单侧逼近

$$g(U) = \frac{v_C - v_V}{|VC|}$$

等同于将 U 点的导数边界条件迁移到 C 点。

– 积分插值方法: 将边界条件融合到 PDE 的离散过程中。

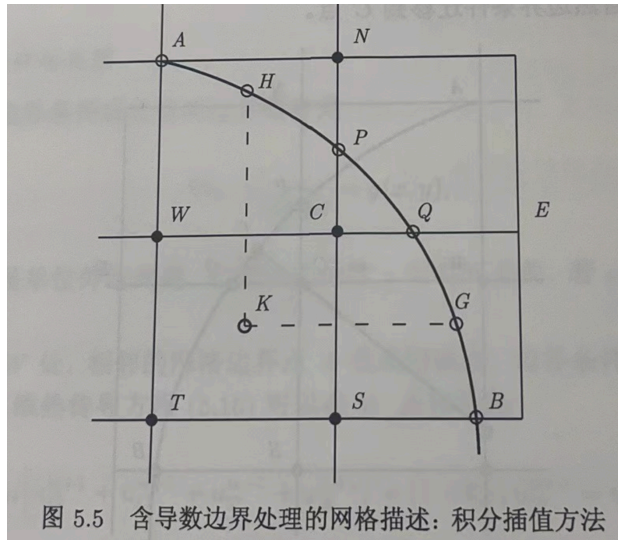


图 5.5 含导数边界处理的网格描述：积分插值方法

- 1) 确定 C 点的控制区域 Ω_C 。(通常由边界曲线、单元中心点连线、单元中心点到边界曲线的垂直线的连接而成)；
- 2) 将 PDE 在控制区域 Ω_C 中积分

$$LHS = \int_{\Delta HKG} u_t dx dy = \oint_{\partial HKG} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds = RHS$$

- 3) 近似积分：

$$LHS \approx |\Delta HKG| \frac{v_C^{n+1} - v_C^n}{\Delta t}$$

$$RHS \approx -\frac{v_C^n - v_W^n}{h} |HK| - \frac{v_C^n - v_S^n}{h} |KG| + \int_{\widehat{HPQG}} g(x, y) ds$$

考虑初边值问题

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} + bu_{yy}, & x \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1), t > 0 \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & x \in \bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1] \\ u(x, y, t) = g(x, y, t), & x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases}$$

使用均匀剖分

$$\Delta x = 1/M, \quad x_i = i\Delta x, \quad i = 0, 1, \dots, M,$$

$$\Delta y = 1/N, \quad y_j = j\Delta y, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

内部空间离散使用

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{I} - \frac{1}{2}b\mu_y\delta_y^2\right)v_{i,j}^{n+1/2} &= \left(\mathbb{I} + \frac{1}{2}a\mu_x\delta_x^2\right)v_{i,j}^n \\ \left(\mathbb{I} - \frac{1}{2}a\mu_x\delta_x^2\right)v_{i,j}^{n+1} &= \left(\mathbb{I} + \frac{1}{2}b\mu_y\delta_y^2\right)v_{i,j}^{n+1/2}\end{aligned}$$

请写出完整的离散格式，要求对中间层的边界处理的精度为 $O(\Delta t^2)$ 。

偏微分方程数值方法

第四部分：非线性偏微分方程的有限差分方法

第八章：非线性双曲守恒律方程

目录

1	特征线方法	3
2	双曲守恒律方程的弱解和熵解	5
2.1	弱解	5
2.2	粘性解	7
2.3	熵解	7
3	数值格式	9
3.1	基于光滑解的格式构造	9
3.2	守恒型差分格式	11
3.3	单调格式	13
3.4	TVD 格式	14

非线性扩散方程

$$u_t = b(u)u_{xx}, \quad b(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ 具有正的下确界}$$

- 系数冻结方法:

- 全显: $v_j^{n+1} = v_j^n + \mu b(v_j^n) \delta_x^2 v_j^n$
- 全隐: $v_j^{n+1} = v_j^n + \mu b(v_j^{n+1}) \delta_x^2 v_j^{n+1}$
- C-N: $v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{1}{2} \mu \left(b(v_j^n) \delta_x^2 v_j^n + b(v_j^{n+1}) \delta_x^2 v_j^{n+1} \right)$

可以使用冻结系数法, 给出时空约束条件, 但是通常只是非线性差分格式数值稳定的必要条件。

存在问题: 计算效率困扰 (显式格式 $\Delta t \sim \Delta x^2$; 隐式格式需求解大规模的非线性方程组, 需要使用合理的迭代近似)

- 局部线性化处理: 将非线性差分格式近似转化为某些“线形差分格式”

- 时间延迟技术: 用 $b(v_j^n)$ 代替 $b(v_j^{n+1})$

$$(C-N) \Rightarrow v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{1}{2} \mu \left(b(v_j^n) \delta_x^2 v_j^n + b(v_j^n) \delta_x^2 v_j^{n+1} \right)$$

具有 (2,1) 阶局部截断误差。

- 预估-校正方法: 执行两次局部线性化过程

$$(C-N) \Rightarrow \begin{cases} \tilde{v}_j^{n+1} = v_j^n + \frac{1}{2} \mu \left(b(v_j^n) \delta_x^2 v_j^n + b(v_j^n) \delta_x^2 v_j^{n+1} \right) \\ v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{1}{2} \mu \left(b(v_j^n) \delta_x^2 v_j^n + b(\tilde{v}_j^{n+1}) \delta_x^2 v_j^{n+1} \right) \end{cases}$$

具有 (2,2) 阶局部截断误差。

- Richtmyer 方法: 利用时间方向的 Taylor 展开公式, 通过偏微分方程和已知时间层信息, 高阶逼近差分方程的非线形部分

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \mu \delta_x^2 (v_j^n)^m + \frac{1}{2} \mu m \delta_x^2 \left((v_j^n)^{m-1} (v_j^{n+1} - v_j^n) \right)$$

保持了时间上的二阶相容。

- 多层格式

某些类型的多层格式无须进行非线性方程组的求解, 可利用多项式外推, 给出扩散

系数的高阶近似

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{1}{2} \mu b(v_j^{n+1/2}) (\delta_x^2 v_j^n + \delta_x^2 v_j^{n+1})$$

其中, $v_j^{n+1/2} = \frac{3}{2}v_j^n - \frac{1}{2}v_j^{n-1}$, 具有 (2, 2) 阶局部截断误差。

非线性对流方程

本章主要考虑一维标量**双曲守恒律**

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad (1)$$

的纯初值问题 (Cauchy 问题) 或者周期边值问题, 其中, $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ 是待解的未知数, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续可微的已知通量函数。

- 与线形双曲型方程 ($f(u) = au$) 相比, 非线性双曲守恒律方程具有很多不同的性质, 相应的理论研究和数值模拟更具挑战性。
- 即使初值充分光滑, 它也可能演化出激波、稀疏波和接触间断等各种复杂多变的结构。
- 由于局部光滑程度会发成突变, 前面介绍的很多用于线形问题的数值格式不能简单的移动到非线性双曲守恒律问题。

1 特征线方法

- 回顾：常系数线性对流方程

$$u_t + au_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

特征线方程：

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}u(x(t), t) = 0.$$

特征线为平行的直线，解 $u(x, t)$ 沿着特征线保持不变。

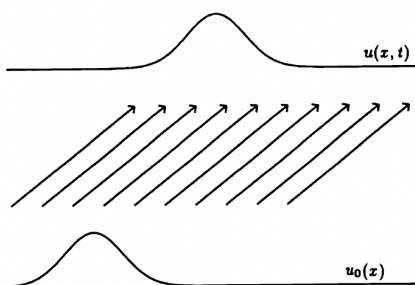


Figure 3.1. Characteristics and solution for the advection equation.

- 回顾：变系数线性对流方程： $a(x, t)$ 为已知的连续函数，

$$u_t + a(x, t) \cdot u_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

特征线方程：

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t), \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}u(x(t), t) = 0.$$

特征线为互不相交的曲线，解 $u(x, t)$ 沿着特征线保持不变。

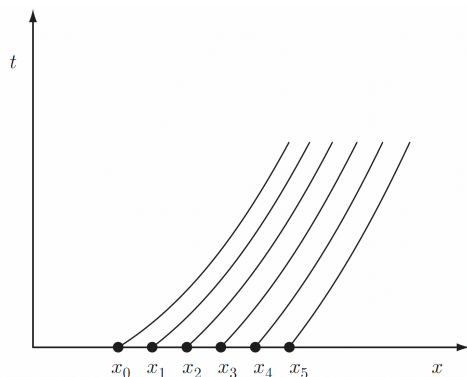


Fig. 4.1. Typical characteristics for $u_t + a(x, t)u_x = 0$.

• 双曲守恒律方程

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

特征线方程:

$$\frac{dx}{dt} = f'(u) = a(u), \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}u(x(t), t) = 0.$$

特征线为直线, 解 $u(x, t)$ 沿着特征线保持不变。

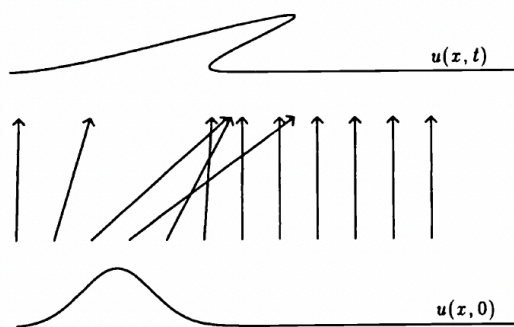
$$u(x, t) = u_0(x - a(u(x, t)) \cdot t)$$

该表达式可以通过求解非线性方程, 得到 $u(x, t)$ 。

在适定条件下, 古典解可以在短时间内存在且唯一。

但是, 可能出现特征线相交的情形, 此时古典解不存在。

- 例: Burgers 方程 $u_t + (u^2/2)_x = 0$, $f'(u) = u$:



- 例: Burgers 方程, $u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 1-x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \geq 1, \end{cases}$

Homework: 考虑 Burgers 方程, 假设给定光滑初值 $u_0(x)$, 其在某些点的导数 $u_0'(x) < 0$ 。

试证明: 在 T_b 时刻特征线首次产生相交

$$T_b = \frac{-1}{\min u_0'(x)}$$

此时, 方程的解产生无穷斜率, 波产生间断 (wave “breaks”)。

2 双曲守恒律方程的弱解和熵解

2.1 弱解

- **定义 1 (弱解):** 函数 $u(x, t)$ 称为双曲守恒律的弱解, 若对于任意区域 $[x_L, x_R] \times [t^1, t^2] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, 均有

$$\int_{x_L}^{x_R} u(x, t_2) dx = \int_{x_L}^{x_R} u(x, t_1) dx + \int_{t^1}^{t^2} f(u(x_L, t)) dt - \int_{t^1}^{t^2} f(u(x_R, t)) dt.$$

- **定义 2 (弱解):** 函数 $u(x, t)$ 称为双曲守恒律的弱解, 若对于任意函数 $\phi(x, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, 均有

$$\int \int_{t \geq 0} [u\phi_t + f(u)\phi_x] dx dt + \int_{t=0} u_0(x)\phi(x, 0) dx = 0.$$

- Rankine-Hugoniot (RH) **跳跃条件:** 考虑分片古典解, 并且任意时刻的间断点个数是有限的, 比如存在一条连续可微的时空界面曲线

$$\Gamma: x = x(t), \quad t \geq 0$$

将上半平面会划分为左右两块区域, 相应的古典解分别记为 $u_1(x, t)$ 和 $u_2(x, t)$:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t), & x < x(t), \\ u_2(x, t), & x > x(t), \end{cases}$$

若它为守恒律方程的一个弱解, 则应满足

$$s(u_+ - u_-) = f(u_+) - f(u_-) \quad (2)$$

其中, $s = x'(t)$ 为界面的移动速度, $u_\pm = \lim_{x \rightarrow x(t) \pm 0} u(x, t)$ 为左右 (空间) 极限。

注: RH 跳跃条件阐述了双曲守恒律的局部守恒性质。

- **例:** Burgers 方程的 Riemann 问题:

$$u_t + (u^2/2)_x = 0, \quad u_0(x) = \begin{cases} u_L, & x < 0, \\ u_R, & x > 0, \end{cases}$$

- $u_L > u_R$: 存在唯一弱解

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x < s \cdot t, \\ u_R, & x > s \cdot t, \end{cases} \quad s = \frac{1}{2}(u_L + u_R).$$

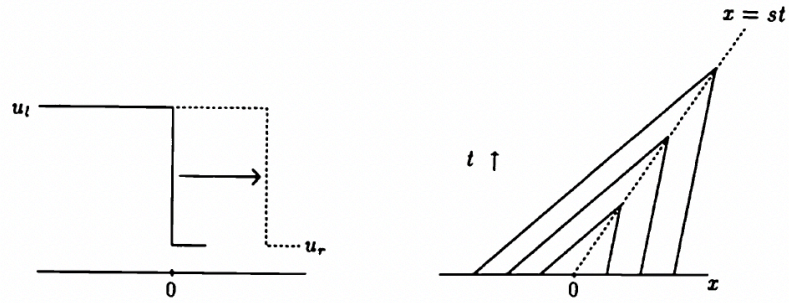


Figure 3.8. Shock wave.

- $u_L < u_R$: 弱解不唯一! 上述间断解满足弱解条件

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x < u_L \cdot t, \\ x/t, & u_L \cdot t \leq x \leq u_R \cdot t, \\ u_R, & x > u_R \cdot t, \end{cases}$$

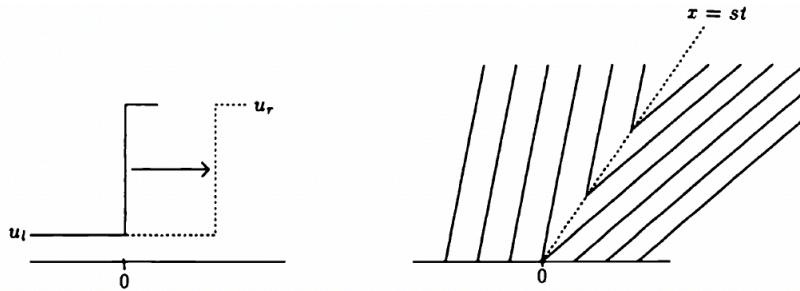


Figure 3.9. Entropy-violating shock.

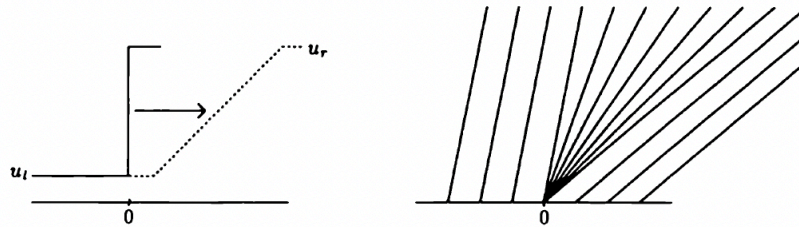


Figure 3.10. Rarefaction wave.

2.2 粘性解

- 设 $u^\epsilon(x, t)$ 为如下问题的解

$$u_t + f(u)_x = \epsilon u_{xx}, \quad \epsilon > 0$$

若存在极限函数 $u(x, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u^\epsilon(x, t)$, 则 $u(x, t)$ 为守恒律方程 $u_t + f(u)_x = 0$ 的解。

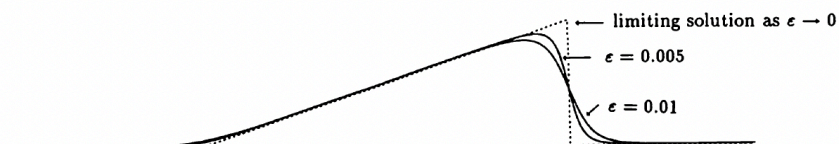


Figure 3.7. Solution to the viscous Burgers' equation for two different values of ϵ .

2.3 熵解

- 标量双曲守恒律方程的熵解存在且唯一。

- Oleinik **熵条件**: 弱解满足

$$\frac{f(u_-) - f(v)}{u_- - v} \geq s \geq \frac{f(u_+) - f(v)}{u_+ - v}, \quad v \in [\min(u_-, u_+), \max(u_-, u_+)]$$

则弱解为熵解。

- Osher **熵条件**: 若函数 $f(u)$ 是凸可微的, 则要求

$$f'(u_-) \geq s \geq f'(u_+)$$

- **间断的熵解**: 设函数 $f(u)$ 是凸可微的, 解在 (x_*, t^*) 点出现间断

– $f'(u_-) \geq f'(u_+)$: 后面时刻的时空区域处处有特征线穿过, 则间断点 (x_*, t^*) 演化成间断面 $x = x(t)$ 。

(1) 若熵条件中不等式严格成立, 则两侧的特征线均交汇到间断界面 $x = x(t)$, 相应的局部间断结构称为**激波** (shock), $s = x'(t)$ 称为**激波速度**;

(2) 若熵条件中不等式局部退化为恒等式, 则两侧的特征线同间断界面平行, 相应的局部间断结构称为**接触间断** (contact discontinuity);

- $f'(u_-) \leq f'(u_+)$: 后面时刻的某个扇形（时空）区域没有特征线穿过，则间断点 (x_*, t^*) 将会消失，对应的熵解具有局部**稀疏波**结构。在扇形区域内，稀疏波满足自相似结构

$$u(x, t) = u\left(\frac{x - x_*}{t - t^*}\right)$$

3 数值格式

- **数值方法的挑战：高精度高分辨率格式**
 - 激波速度的刻画以及间断界面的捕捉要准确；
 - 在真解相对光滑区域，精度和计算效率要高；
 - 在间断界面附近，数值振荡现象要得到控制；
 - 数值解要收敛到熵解，至少是弱解。

激波装配技术：先用特殊算法确定间断界面的位置，在用其他高效高精度格式计算界面之间光滑解。

激波捕捉技术：直接建立统一的数值操作过程，可以同时适用于光滑解和间断解的数值模拟，而不用额外追踪间断界面的位置。

3.1 基于光滑解的格式构造

- **例：**基于非守恒型 $u_t + a(u)u_x = 0$

- 利用冻结系数法，构造迎风格式：

$$v_j^{n+1} = \begin{cases} v_j^n - a(v_j^n) \frac{\Delta t}{\Delta x} (v_j^n - v_{j-1}^n), & \text{if } a(v_j^n) > 0, \\ v_j^n - a(v_j^n) \frac{\Delta t}{\Delta x} (v_{j+1}^n - v_j^n), & \text{if } a(v_j^n) \leq 0, \end{cases}$$

- Lax-Wendroff 格式

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{1}{2} \lambda a_j^n D_0 v_j^n + \frac{1}{2} (\lambda a_j^n)^2 \delta_0^2 v_j^n + \frac{1}{4} \lambda^2 b_j^n (D_0 v_j^n)^2$$

其中， $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, $a_j^n = a(v_j^n)$, $b_j^n = a(v_j^n) a'(v_j^n)$

- 利用 CFL 方法或者冻结系数法，最大模或 L^2 模稳定的模糊条件为

$$\max_{j,n} |a(v_j^n)| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

- **例：**基于守恒型 $u_t + f(u)_x = 0$

- 构造迎风格式：

$$v_j^{n+1} = \begin{cases} v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f(v_j^n) - f(v_{j-1}^n) \right), & \text{if } a(v_j^n) > 0, \\ v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f(v_{j+1}^n) - f(v_j^n) \right), & \text{if } a(v_j^n) \leq 0, \end{cases}$$

- Lax-Wendroff 格式

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{1}{2}\lambda(f(v_{j+1}^n) - f(v_{j-1}^n)) + \frac{1}{2}\lambda^2 \left(A_{j+1/2}^n (f(v_{j+1}^n) - f(v_j^n)) - A_{j-1/2}^n (f(v_j^n) - f(v_{j-1}^n)) \right)$$

其中, $A_{j+1/2}^n = a\left(\frac{1}{2}(v_j^n + v_{j+1}^n)\right)$

- 利用 CFL 方法或者冻结系数法, 最大模或 L^2 模稳定的模糊条件为

$$\max_{\forall j,n} |a(v_j^n)| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

- 例: Burgers 方程 $u_t + (u^2/2)_x = 0$ 的 Riemann 问题 $u(x,0) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$

基于非守恒形式的迎风格式

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} v_j^n (v_j^n - v_{j-1}^n), \quad \Rightarrow \quad v_j^n = v_j^0$$

不收敛到弱解 (激波传播速度不满足 RH 跳跃条件)!

基于守恒形式的迎风格式

$$v_j^{n+1} = \begin{cases} v_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left((v_j^n)^2 - (v_{j-1}^n)^2 \right), & \text{if } v_j^n > 0, \\ v_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left((v_{j+1}^n)^2 - (v_j^n)^2 \right), & \text{if } v_j^n \leq 0, \end{cases}$$

间断附近错误数值解: 基于非守恒形式或不具备整体一致性, 数值解不满足局部守恒性质!

1. 当熵解含有间断 (或者激波) 时, 非守恒形式 ($u_t + a(u)u_x = 0$) 和守恒形式 ($u_t + f(u)_x = 0$) 不再等价; 前者无法刻画局部守恒性质, 相应的差分格式无法满足局部守恒性质。
2. 由于流动方向发生变化, 基于守恒形式构造的差分格式丧失了整体结构的统一性, 在包含间断点的局部区域, 数值解不再满足局部守恒性质。

- 例: 利用冻结系数法, 构造蛙跳格式:

$$v_j^{n+1} = v_j^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} v_j^n (v_{j+1}^n - v_{j-1}^n),$$

可以验证数值解满足蛙跳格式:

$$v_j^n = c^n r_j, \quad \begin{cases} \{r_{jj}\} = (\dots, 0, \epsilon, -\epsilon, 0, \epsilon, -\epsilon, 0, \epsilon, -\epsilon, 0, \dots), \\ c^{n+1} - c^{n-1} = \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x} (c^n)^2. \end{cases}$$

令 $c^0 = 1, c^1 = \alpha > 1$

$$\Rightarrow c^{2n} \geq (1 + \gamma)^n, \quad c^{2n+1} \geq (1 + \gamma)^n, \quad n \geq 0, \quad \gamma = \varepsilon \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

随着 n 增大, c^n 趋于无穷。换言之, 对任意的网格比, 蛙跳格式不稳定。

非线性问题的差分格式存在非线性不稳定现象。

Homework: 分别基于守恒律方程的非守恒形式和守恒形式, 构造 Lax 格式, 并分析其精度和稳定性条件。

3.2 守恒型差分格式

- **定义 (守恒型):** 称差分格式是守恒型格式, 若它可以统一表述为

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\hat{f}_{j+1/2}^n - \hat{f}_{j-1/2}^n \right), \quad \forall j \quad (3)$$

其中, $\hat{f}_{j+1/2}$ 称为数值流通量, 具有表达式

$$\hat{f}_{j+1/2} = \hat{f}(v_{j-r}, \dots, v_{j+s})$$

满足性质

- 连续性: \hat{f} 关于每个变量都满足局部 Lipschitz 连续性;
 - 相容性: $\hat{f}(v, \dots, v) = f(v)$ 。
- **注:** 守恒格式必然满足局部守恒性质, 对任意整数 p, q ,

$$\sum_{j=p}^q v_j^{n+1} = \sum_{j=p}^q v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\hat{f}_{q+1/2}^n - \hat{f}_{p-1/2}^n \right)$$

- **定理 (Lax-Wendroff 定理):** 设守恒型差分格式同双曲守恒律相容。当网格尺度趋于零时, 若数值解几乎处处有界且收敛到某个函数, 则极限必定是问题的弱解。
- **例:** Lax 格式

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{2} (v_{j+1}^n + v_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [f(v_{j+1}^n) - f(v_{j-1}^n)].$$

- 例: Lax-Wendroff 格式

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [f(v_{j+1}^n) - f(v_{j-1}^n)] \\ + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} \left\{ A_{j+1/2}^n [f(v_{j+1}^n) - f(v_j^n)] - A_{j-1/2}^n [f(v_j^n) - f(v_{j-1}^n)] \right\},$$

其中, $A_{j+1/2}^n = f' \left(\frac{1}{2}(u_j^n + u_{j+1}^n) \right)$ 。

- 例: Richtmyer 格式

$$v_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (v_j^n + v_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [f(v_{j+1}^n) - f(v_j^n)] \\ v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f(v_{j+1/2}^{n+1/2}) - f(v_{j-1/2}^{n+1/2})]$$

- 例: MacCormack 格式

$$\tilde{v}_j^n = v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f(v_{j+1}^n) - f(v_j^n)] \\ v_j^{n+1} = \frac{1}{2} (v_j^n + \tilde{v}_j^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [f(\tilde{v}_j^n) - f(\tilde{v}_{j-1}^n)]$$

- 例: Roe 型迎风格式

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left\{ [1 - \text{sgn}(a_{j+1/2}^n)] \Delta_+ f(v_j^n) + [1 + \text{sgn}(a_{j-1/2}^n)] \Delta_- f(v_j^n) \right\}$$

其中, $a_{j+1/2}^n (v_{j+1}^n - v_j^n) = f(v_{j+1}^n) - f(v_j^n)$ (Roe 平均)。

$$\hat{f}_{j+1/2}^n = \begin{cases} f(v_j^n), & a_{j+1/2}^n \geq 0 \\ f(v_{j+1}^n), & a_{j+1/2}^n < 0 \end{cases} \\ = \frac{1}{2} [f(v_j^n) + f(v_{j+1}^n)] - \frac{1}{2} \text{sgn}(a_{j+1/2}^n) [f(v_{j+1}^n) - f(v_j^n)]$$

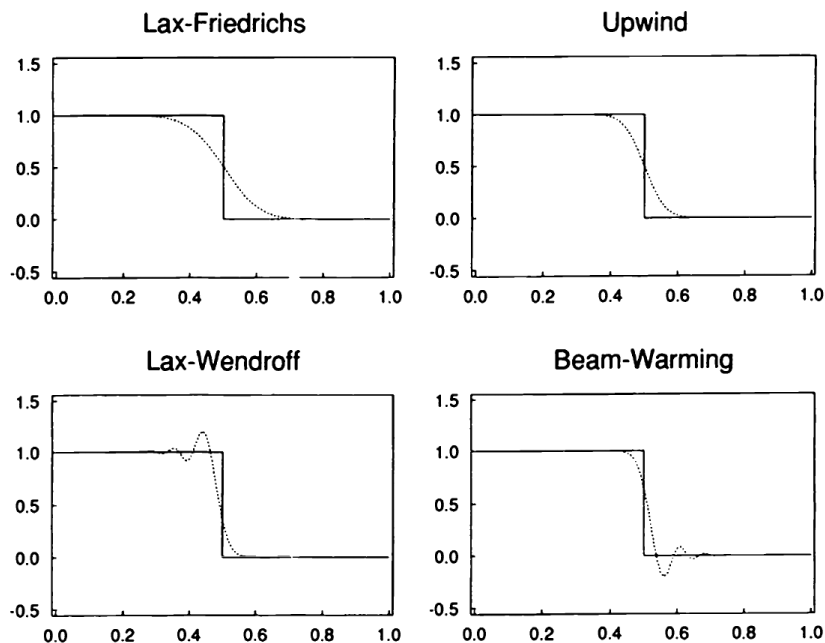
- 例: Burgers 方程的 Riemann 问题: $u_- = -1, u_+ = 1$

使用 Roe 型迎风格式。

$$v_j^0 = \begin{cases} -1, & j \leq 0 \\ 1, & j > 0 \end{cases} \Rightarrow v_j^n = \begin{cases} -1, & j \leq 0 \\ 1, & j > 0 \end{cases} \quad \text{shock wave}$$

守恒型格式的解收敛到某个弱解, 但不是熵解!

- 例：线性方程 $u_t + u_x = 0$ 的 Riemann 问题： $u_- = 1, u_+ = 0$
守恒型格式的解可能产生数值震荡！



Homework: (Lax-Friedrichs 格式) 针对非线性方程 $u_t + f(u)_x = 0$, 利用“流通分裂技术”构造数值算法:

$$u_t + f^+(u)_x + f^-(u)_x = 0, \quad f^\pm(u) = \frac{1}{2}(f(u) \pm \alpha u)$$

其中, $\alpha = \max_u |f'(u)|$ 。对 $f^\pm(u)$ 分别使用迎风格式

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f^+(v_j^n) - f^+(v_{j-1}^n)) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f^-(v_{j+1}^n) - f^-(v_j^n))$$

试判断格式是否为守恒型格式。

3.3 单调格式

- 方程满足单调保持性质：若初值是单增或单减函数，则任意时刻的熵解保持相同的单调性。
- 定义 (单调保持格式)：若初值是单调函数，则任意时刻的数值解均具有相同的单调性。
通常难以验证！

- **定义 (单调格式):** 守恒型格式称为数值格式, 若它可以统一表述为

$$v_j^{n+1} = H(v_{j-r-1}^n, \dots, v_{j+s}^n), \quad \forall j \quad (4)$$

是单调格式, 如果函数 H 关于每个变元是非减的。

$$v(x, 0) \leq u(x, 0), \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad v(x, t) \leq u(x, t), \quad \forall x, \forall t > 0$$

- **定理:** 单调格式必然是单调保持格式; 但是反之未必成立。对于线性格式, 两者等价。
- **定理:** 单调格式的数值解一致有界, 必然收敛到双曲守恒律的熵解。
- **例:** 在相应的 CFL 条件下, Roe 型迎风格式不是单调格式。
- **定理:** 考虑三点格式

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\hat{f}_{j+1/2}^n - \hat{f}_{j-1/2}^n \right), \quad \hat{f}_{j+1/2}^n = \hat{f}(u_j^n, u_{j+1}^n),$$

若导数满足关系

$$\hat{f}_1 \geq 0, \quad \hat{f}_2 \leq 0, \quad \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\hat{f}_1 - \hat{f}_2 \right) \leq 1$$

则该三点格式是单调格式的。

- **例:** 在相应的 CFL 条件下, Lax-Friedrichs 格式是单调格式; 但是 Lax-Wendroff 格式不是单调格式。
Lax-Friedrichs 格式的解在激波附近产生过渡点, 但是 Lax-Wendroff 格式产生数值震荡!
- **定理 (Godunov 定理):** 单调格式最多只有一阶局部截断误差。

3.4 TVD 格式

- **定义 (全变差, total variation):**

– 连续函数: $TV(v) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup \frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |v(x) - v(x - \epsilon)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |v'(x)| dx$

– 网格函数: $TV(w) = \sum_j |w_{j+1} - w_j|$

- 方程满足性质: 全变差不增

$$TV(u(x, t_2)) \leq TV(u(x, t_1)), \quad \forall t_2 > t_1$$

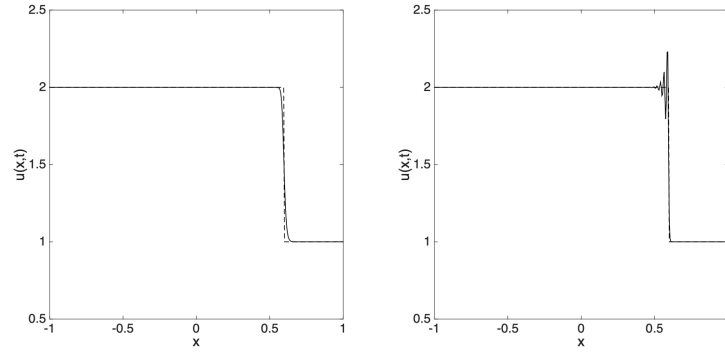


Figure 4.2. The solution at $T = 0.2$ of Burgers' equation, solved using a scheme in conservation form with a Lax-Friedrichs numerical flux (left) and a Lax-Wendroff numerical flux (right). In both cases, the computed solution (solid line) and the exact solution (dashed line) is shown.

- **定义 (TVD 格式):** 称数值格式是全变差不增的, 若它的数值解恒满足

$$TV(v^{n+1}) \leq TV(v^n), \quad \forall n$$

- Harten **定理:** 设数值格式具有增量形式

$$v_j^{n+1} = v_j^n - C_{j-1/2} (v_j^n - v_{j-1}^n) + D_{j+1/2} (v_{j+1}^n - v_j^n),$$

且处处成立

$$C_{j+1/2} \geq 0, \quad D_{j+1/2} \geq 0, \quad C_{j+1/2} + D_{j+1/2} \leq 1$$

则它是 TVD 的。

- **例:** 在相应的 CFL 条件下, Roe 型迎风格式是 TVD 的。
注: TVD 格式可以避免剧烈的数值震荡, 但数值解有可能收敛到非熵解的弱解, 可以引入“熵修正”技术。
- **定理:** 单调格式是 TVD 的, TVD 格式是单调保持格式。
注: 逆命题不成立!
- **定理:** 局限于线性差分格式的范畴, 单调格式、TVD 格式和单调保持格式是彼此等价的。进而, 线性 TVD 格式至多有一阶局部截断误差。
- **定理:** 高阶 TVD 格式必然是非线性的, 即使离散对象是线性双曲守恒律。

Homework: 分析 Lax-Friedrichs 格式的单调性质和 TVD 性质。