代数几何

孙天阳

2022 年 9 月 22 日

目录

Chapter 1

仿射代数集

1 知识准备

- ring, commutative, with identity

  domain: ring without zero divisors

  e.g. $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}[x], \mathbb{C}[x], \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

  field: any nonzero element is invertible

- ideal: R =ring, $I \subset R$

  - $\forall\ a, b \in I \Longrightarrow a \pm b \in I$
  - $\forall r \in R, a \in I \Longrightarrow ra \in I$

  Then we call that I is an ideal of R

  $R/I = \{r + I \mid r \in R\}$

- R, S =ring. A map $f\colon R \to S$ is called a ring homomorphism if f preserves $" + ", " \cdot ", "1"$.

- $R \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} R/I$

  FACT:

  (1)

  $$\{J \lhd R/I\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\mathfrak{a} \lhd R \mid \mathfrak{a} \supset I\}$$

  (2)

  $$Hom_{ring}(R/I, S) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\varphi \in Hom_{ring}(R, S) \mid I \subset \ker \varphi\}$$
  $$R/I \overset{\varphi}{\to} S \quad \psi \circ \pi$$

- An ideal $I \lhd R$ is called prime, if for any $a, b \in R$

  $$a \cdot b \in I \Longrightarrow a \in I \quad \text{or} \quad b \in I.$$

An proper ideal $I \lhd R$ is called maximal, if for any ideal J

$$I \subset J \subset R \Longrightarrow I = J \quad \text{or} \quad J = R.$$

Fact:$I \lhd R$

(1) $I =$prime $\Longleftrightarrow R/I =$domain

(2) $I =$maximal $\Longleftrightarrow R/I =$field

- characteristic $R =$ring

  $\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} R, n \mapsto n1_R$

  $\exists\ n$ s.t. $\ker\varphi = (n)$, $\text{char}(R) := n \geqslant 0$

  $\text{char}(R) = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow R$

  $\text{char}(R) = n \Longleftrightarrow$ $\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & R \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$

  用环映射来定义 char 的好处是容易推广，相比用 1_R 相加为零的最小个数.

- $R =$domain

  $Frac(R) = \{(a,b) \mid a \in R, b \in R\backslash\{0\}\} / \sim$,where $(a,b) \sim (c,d) \Longleftrightarrow ad = bc$.

  - $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$
  - $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{b} = \dfrac{ac}{bd}$

  典范映射 $R \hookrightarrow Frac(R), r \mapsto \dfrac{r}{1}$

  泛性质，$R =$domain, $K =$field

$$\text{Hom}_{ring}(Frac(R), K) \xleftrightarrow{1:1} \{\varphi \in \text{Hom}_{ring}(R, K) \mid \varphi \text{injective}\}$$

- $R =$ ring

$$R[x_1, \cdots, x_n] = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i x^i \mid a_i \neq 0 \text{for finite} i \in \mathbb{N}^n \right\}$$

  其中 $x^i = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}, \deg(X^i) := |i| := \sum_{k=1}^{n} i_k$

  $\forall\ F \in R[x_1, \cdots, x_n]$,

$$F = F_0 + F_1 + \cdots + F_d$$

  $F \in Rx_1, \cdots, x_n$, F is called homogeneous or a form, if $\exists\ d \geqslant 0$ s.t. $a_i = 0$ for i s.t. $|i| \neq d$

  规定 0 的次数为任意次.

  $V_d := \{F = \text{form} \mid \deg F = d\}$

  $\dim V_d = \dbinom{d+n-1}{n-1}$

Fact:$R \to S$ ring homomorphism.

$$\mathrm{Hom}_{R-alg}(R[x_1, \cdots, x_n], S) \xleftrightarrow{1:1} S^n$$

$$\psi \mapsto (\psi(x_1), \psi(x_2), \cdots, \psi(x_n))$$

- A field k is called an algebraically closed field, if for any non constant polynomial $F \in k[x] \setminus \{k\}$, F has zeros.

  $\forall a \in k, \forall F \in k[x]$

  $$F = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_d(x-a)^d$$

  $F(a) = 0 \Longleftrightarrow (x-a) \mid F$

  Fact:$k = \bar{k}$ is algebraically closed. Then

  (1) $\forall F \in k[x] \backslash k, F = a \prod_{i=1}^{r} (x-a_i)^{l_i}$

  (2) $\deg(F) = \sum_{i=1}^{r} l_i$

  Fact:$k = \bar{k} \Longrightarrow \#k = \infty$

  证明. Suppose not, $k = \{a_1, \cdots, a_n\}$

  $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) + 1$ has no root. Controdiction. □

- Unique factorization domain

  $R =$ domain. $r \in R$. r is called irreducible if $r \neq 0, r \notin R^\times$ and for any $r = r_1 r_2$, we have $r_1 \in R^\times$ or $r_2 \in R^\times$.

  $r \neq$ is called prime if $r \mid ab \Longrightarrow r \mid a$ or $r \mid b$

  prime$\Longrightarrow$ irr

  R is called a UFD, if for any $r \in R \setminus \{0\}$, there exists $r = \alpha\pi_1\pi_2\cdots\pi_n$, $\alpha \in R^\times, \pi_i =$ irreducible and if $r = \alpha\pi_1\cdots\pi_n = \alpha'\pi_1'\cdots\pi_m'$ then $m = n$ and $\exists \sigma \in S_n$ s.t. $\pi_i \sim \pi'_{\sigma(i)}$.

  Fact:$R =$ UFD

  (1) $\forall r_1, r_2 \in R \setminus \{0\}$, we may define $\gcd(r_1, r_2), \mathrm{lcm}(r_1 r_2)$.

  (2) $R[x] =$ UFD.($\Longrightarrow R[x_1, \cdots, x_n] =$ UFD)

  (3) $f \in R[x], f =$ irreducible $\Longleftrightarrow f \in R$ and f irreducible in R or $f \notin R$.
  $f = r_0 + r_1 x + \cdots + r_d x^d$ and $\gcd(r_0, r_1, \cdots, r_d) = 1$ and f irreducible in $K[x]$ where $K = Frac(R)$.

  (4) $\forall r_1, r_2 \in R[x], \gcd(r_1, r_2) = 1$ in $R[x] \Longrightarrow \gcd(r_1, r_2) = 1$ in $K[x]$

  (5)

2 仿射空间和代数集

affine $n-$space $\mathbb{A}^n := \mathbb{A}^n(k) := k^n = \underbrace{k \times k \times \cdots \times k}_{n}$

$k = \mathbb{R}$

$\forall F \in k[x_1, \cdots, x_n]$

$$V(F) := \{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{A}^n \mid F(a_1, \cdots, a_n) = 0\}$$

hypersurface, $\deg(F) = 1 \Longrightarrow$ hyperplane

$\forall S \subset k[x_1, \cdots, x_n]$

$$V(S) := \{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{A}^n \mid F(a_1, \cdots, a_n) = 0, \forall F \in S\}$$

(affine) algebraic set

Fact:

(1) $V(S) = \cap_{F \in S} V(F)$

(2) $S_1 \subset S_2 \Longrightarrow V(S_1) \supset V(S_2)$

(3) $I = (S) \triangleleft k[x_1, \cdots, x_n], V(I) = V(S)$

(4) $\cap_{j \in J} V(S_j) = V(\cup_j S_j)$

(5) $\cup_i = 1^m V(I_i) = V(I_1 \cdots I_n)$

证明. $\subset I_1 \cdots I_m \subset I_i \Longrightarrow V(I_1 \cdots I_m) \sup V(I_i)$

$\supset$ 任取 $p \in V(I_1 \cdots I_m)$ assume $p \notin \bigcup_{i=1}^{m-1} V(I_i)$

下证 $p \in V(I_m)$

因为 $p \notin V(I_i), i = 1, \cdots, m-1$ 存在 $F_i \in I_i$ 使得 $F_i(P) \neq 0 i = 1, \cdots, m-1$

任取 $F \in I_m$，考虑 $F_1 \cdots F_{m-1} F \in I_1 \cdots I_m$

□

(6) $\varnothing = V(1), \mathbb{A}^n = V(0), \forall (a_1, \cdots, a_n) \{(a_1, \cdots, a_n)\} = V(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \cdots, x_n - a_n)$

第三条告诉我们考虑代数集的时候只需要考虑所有的理想. 分类代数集时 S 的取法简化很多.

第四条告诉我们任意多个代数集交起来仍是代数集

例 2.1. $\mathbb{A}^1 = k$ *affine line*

$\mathbb{A}^2 = k$ *affine plane*

$\mathbb{A}^1$

Fact any proper algebra set in $\mathbb{A}^1$ *is finite.*

证明. $V(S) \subsetneq \mathbb{A}^1$

$\exists F \neq 0, F \in S$

$V(S) \subset V(F)$

$\#V(S) \leqslant \#V(F) \leqslant \deg(F) < \infty$ □

$\mathbb{C}$ 中的圆不是代数子集

$\mathbb{R}^2$ 中的圆是代数子集

例 2.2. $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$

$r = \sin\theta$ 是不是代数子集？

需要把方程转化为 x, y 的方程

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

$r = \sin\theta \Longleftrightarrow r^2 = r\sin\theta \Longleftrightarrow X^2 + Y^2 = Y$

例 2.3. $y = \sin x$ 是不是代数子集？

$X := \left\{(a,b) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \mid b = \sin a\right\} \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$

$X = V(I), \forall F \in I \triangleleft k[x_1, x_2], (k\pi, 0) \in X \Longrightarrow F(k\pi, 0) = 0$

$F = f_0(x_1) + f_1(x)x_2 + \cdots + f_d(x_1)x_2^d$

$\Longrightarrow f_0(x_1)$ *has infinite zeros* $\Longrightarrow f_0 = 0$

$\Longrightarrow x_2 \mid F$

定义 2.4. $\forall X \subset \mathbb{A}^n$

$I(X) := \{F \in k[x_1, \cdots, x_n] \mid F(p) = 0 \text{ for any } p \in X\}$

$X = \{(a,b) \mid b = \sin a\} \Longrightarrow I(X) = 0.$

多项式不够多，三角函数不能用多项式定义出来

复几何可以用解析函数构造.

3 点集的理想

任给 $X \subset \mathbb{A}^n(k)$，我们定义 X 的理想

$$\mathscr{I}(X) := \{F \in k[x_1, \cdots, x_n] \mid F(a) = 0, \forall\, a \in X\} \lhd k[x_1, \cdots, x_n].$$

命题 3.1. $X \subset Y \Longrightarrow \mathscr{I}(X) \supset \mathscr{I}(Y)$.

命题 3.2. $I \subset \mathscr{I}(\mathscr{V}(I))$ 且 $X \subset \mathscr{V}(\mathscr{I}(X))$.

命题 3.3. $\mathscr{V}(\mathscr{I}(\mathscr{V}(I))) = \mathscr{V}(I)$ 且 $\mathscr{I}(\mathscr{V}(\mathscr{I}(X))) = \mathscr{I}(X)$.

定义 3.4. 设 R 是含幺交换环，$I \lhd R$. 定义

$$\sqrt{I} := \{r \in R \mid \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } r^n \in I\}\,.$$

容易验证 $\sqrt{I} \lhd R$，称作 I 的根. 如果 $I = \sqrt{I}$，则称 I 为根理想.

命题 3.5. $\mathscr{I}(X)$ 是根理想.

$$\begin{tikzcd}
\{\text{子集}\} \arrow[dr, "\mathscr{I}"] & \{\text{理想}\} \arrow[dl, "\mathscr{V}"'] \\
\operatorname{Im}\mathscr{V} \arrow[r, leftrightarrow, "\mathscr{I}", "\mathscr{V}"'] \arrow[d, equal] & \operatorname{Im}\mathscr{I} \arrow[d, hook] \\
\{\text{代数集}\} & \{\text{根理想}\}
\end{tikzcd}$$

4 Hilbert 基定理

我们关心代数集的分类问题.（虽然我们现在还不知道什么样的两个代数集应该被视为相同的.）

代数集的定义是 $\mathscr{V}(S)$，前面的简单论证告诉我们，不必考虑任意的子集 $S \subset k[x_1, \cdots, x_n]$，只需考虑所有的理想 $I \triangleleft k[x_1, \cdots, x_n]$，因为 $\mathscr{V}(S) = \mathscr{V}(I_S)$，其中 I_S 是由 S 生成的理想.

本节的定理告诉我们，任意理想 $I \triangleleft k[x_1, \cdots, x_n]$ 是有限生成的. 也就是说，对任意的代数集，我们都可以用有限多个多项式来表达.

定理 4.1 (Hilbert 基定理). *设 R 是 Noether 环，则 $R[x]$ 也是 Noether 环.*

证明. 任取 $I \triangleleft R[x]$，对任意的 $m \geqslant 0$，定义

$$J_m := \{I\text{中次数为}m\text{的多项式的首项系数}\} \cup \{0\} \subset R.$$

容易看出

- $J_m \triangleleft R$.
- $J_m \subset J_n$，如果 $m \leqslant n$.
- J_m 有可能真包含于 J_{m+1}. 让我们稍微体会一下这件事情为什么有可能发生.

  首先看 J_0 是什么，J_0 是 $I \cap R \triangleleft R$. $I \cap R$ 是 R 吗？不一定. 这就给机会了. 设 $b \in R$ 但 $b \in I \cap R$，如果有 $bx \in I$——这完全可以——那么 J_1 就严格比 J_0 大了.

  但我们说这样的过程会一直进行下去吗？不会，因为 R 是 Noether 的.

我们说这样就能找到 I 的生成元了，为什么呢？回忆我们证明域的一元多项式环是 PID 的过程，我们找到了一个次数最低的多项式，然后开始拿它去除其他的多项式，为什么除完次数一定能变得更低？因为域中非零元都可逆，一定可以把次数最高的项消掉.

这套方法可以直接搬过来吗？我们说可以，因为 R 是 Noether 的保证了

$$J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \cdots$$

不是无限升链，从而可以被有限多个元素生成. 我们稍微退一点，考虑生成 J_0 的有限多个元素，生成 J_1 的有限多个元素，一直到生成某个 J_N 的有限多个元素，使得这些元素并起来是能够生成所有 J_i 的. 这里面有一些细微的区别，比如假设你 I 中有一个 x^3，但没有任何首一的低次多项式，那么虽然你的 1 能够生成所有 J_i，但单就 J_1 来讲可能需要更多的元素来生成. 我们这样取是为了防止出现 ax 不被生成的情况. 我们对每个上面取出来的生成元都取定一个它在 I 中对应的多项式.

任取 I 中的一个多项式 f，设它是 m 次的. 我们考虑所有 J_i，其中 $0 \leqslant i \leqslant \min\{m, N\}$. 考虑每个 J_i 的生成元对应的多项式. 在这些多项式中，一定可以找到一个多项式，它的首项系数可以整除 f 的首项系数，拿它去除 f，这样我们就把 f 的次数降下来了. 反复去做，我们就把 f 生成出来了. 从而 I 是有限生成的. □

5 代数集的不可约分支

Chapter 2

另一条脉络

1 对域的要求

如果域是有限域，空间太小，有些非零多项式作为函数为零.

当域是无限域时，有 $\mathscr{I}(\mathbb{A}^n(k)) = \{0\}$.