复分析

孙天阳

目录

- 复数基础，全纯函数，导数，多值函数
- 复积分，Cauchy 公式，最大模原理
- 级数，孤立奇点，幅角原理，Rouche 定理
- 留数定理，定积分计算
- 全纯开拓，Schwartz 对称
- Riemann 映照，边界对应，Schwartz-Christoffel 公式
- 整函数理论
- Fourier 变换
- Gamma 函数，Zeta 函数

1 球极投影

球 $x^2+y^2+z^2=1$ 从点 $(0,0,1)$ 到平面 $z=0$

$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{1-z}{1}=t\Longrightarrow X=\frac{x}{1-z},Y=\frac{y}{1-z}$$
$$x=Xt,y=Yt,z=1-t\Longrightarrow X^2t^2+Y^2t^2+1+t^2-2t=1\Longrightarrow t=\frac{2}{X^2+Y^2+1}$$
$$(X,Y)\mapsto(\frac{2X}{X^2+Y^2+1},\frac{2Y}{X^2+Y^2+1},\frac{X^2+Y^2-1}{X^2+Y^2+1})$$
$$u\mapsto(\frac{2u}{|u|^2+1},\frac{|u|^2-1}{|u|^2+1})$$

$$\begin{aligned}d(u,v)^2&=\frac{4|u|^2}{(|u|^2+1)^2}+\frac{4|v|^2}{(|v|^2+1)^2}-\frac{8u\cdot v}{(|u|^2+1)(|v|^2+1)}+\frac{(|u|^2-1)^2}{(|u|^2+1)^2}+\frac{(|v|^2-1)^2}{(|v|^2+1)^2}-\frac{2(|u|^2-1)(|v|^2-1)}{(|u|^2+1)(|v|^2+1)}\\&=1+1-\frac{8u\cdot v}{(|u|^2+1)(|v|^2+1)}-2\frac{(|u^2|+1-2)(|v|^2+1-2)}{(|u|^2+1)(|v|^2+1)}\\&=2-\frac{8u\cdot v}{(|u|^2+1)(|v|^2+1)}-2-2\frac{-2(|u|^2+1)-2(|v|^2+1)+4}{(|u|^2+1)(|v|^2+1)}\\&=\frac{4|u-v|^2}{(|u|^2+1)(|v|^2+1)}\end{aligned}$$

$$d(u,v)=\frac{2|u-v|}{\sqrt{(|u|^2+1)(|v|^2+1)}}$$

球 $x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ 从点 $(0,0,1)$ 到平面 $z=0$

$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{1-z}{1}=t\Longrightarrow X=\frac{x}{1-z},Y=\frac{y}{1-z}$$
$$x=Xt,y=Yt,z-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-t\Longrightarrow X^2t^2+Y^2t^2+\frac{1}{4}+t^2-t=\frac{1}{4}\Longrightarrow t=\frac{1}{X^2+Y^2+1}$$
$$(X,Y)\mapsto(\frac{X}{X^2+Y^2+1},\frac{Y}{X^2+Y^2+1},\frac{X^2+Y^2}{X^2+Y^2+1})$$
$$u\mapsto(\frac{u}{|u|^2+1},\frac{|u|^2}{|u|^2+1})$$

$$\begin{aligned}d(u,v)^2&=\frac{|u|^2}{(|u|^2+1)^2}+\frac{|v|^2}{(|v|^2+1)^2}-\frac{2u\cdot v}{(|u|^2+1)(|v|^2+1)}+\frac{|u|^4}{(|u|^2+1)^2}+\frac{|v|^4}{(|v|^2+1)^2}-\frac{2|u|^2|v|^2}{(|u|^2+1)(|v|^2+1)}\\&=\frac{|u|^2}{|u|^2+1}+\frac{|v|^2}{|v|^2+1}-\frac{2u\cdot v-2|u|^2|v|^2}{(|u|^2+1)(|v|^2+1)}\\&=\frac{|u|^2(|v|^2+1)+|v|^2(|u|^2+1)-2u\cdot v-2|u|^2|v|^2}{(|u|^2+1)(|v|^2+1)}\\&=\frac{|u-v|^2}{(|u|^2+1)(|v|^2+1)}\end{aligned}$$

$$d(u,v)=\frac{|u-v|}{\sqrt{(|u|^2+1)(|v|^2+1)}}$$

Chapter 1

全纯函数

1 $\mathbb{R}$-线性映射与 $\mathbb{C}$-线性映射

设 $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{R}$-线性映射，选定基后，它有矩阵表示

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

设 $A\colon (\mathbb{C}, z = x + \mathrm{i}y) \to (\mathbb{C}, w = u + \mathrm{i}v)$ 是 $\mathbb{C}$-线性映射，则 $A(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}Az = \mathrm{i}w$，即

$$\begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

这就迫使

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}.$$

此时

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z.$$

考虑 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. 它在某点 $p = (x_0, y_0)$ 处的切映射为 $f_{*,p}\colon T_p\mathbb{R}^2 \to T_{f(p)}\mathbb{R}^2$. 取 $T_p\mathbb{R}^2$ 的基为 $\left\{ \left.\dfrac{\partial}{\partial x}\right|_p, \left.\dfrac{\partial}{\partial y}\right|_p \right\}$，取 $T_{f(p)}\mathbb{R}^2$ 的基为 $\left\{ \left.\dfrac{\partial}{\partial u}\right|_{f(p)}, \left.\dfrac{\partial}{\partial v}\right|_{f(p)} \right\}$. 则 $f_{*,p}$ 在这组基下的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u \circ f}{\partial x} & \dfrac{\partial u \circ f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v \circ f}{\partial x} & \dfrac{\partial v \circ f}{\partial y} \end{pmatrix} (p) =: \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} (p).$$

$f_{*,p}$ 是 $\mathbb{C}$-线性映射当且仅当

$$\begin{cases} u_x(p) = v_y(p) \\ u_y(p) = -v_x(p) \end{cases}.$$

复数与复变函数

1.0复数的几何表示

- $z = a + b\mathrm{i} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$
  - $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
  - $\theta = \arctan \dfrac{b}{a}$
- 0 的辐角没有意义
- $\operatorname{Arg} z$ 中只有一个 θ 满足 $-\pi < \theta \leqslant \pi$，称这个 θ 为 z 的辐角主值，把它记为 $\arg z$
- $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

1.0共轭

命题 1.1. 对任意 $z, w \in \mathbb{C}$,

(1) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

(2) $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$

(3) $\overline{z} = z$ 当且仅当 $z \in \mathbb{R}$

(4) $\overline{\overline{z}} = z$

从一个稍微不同的观点，共轭能够被视作一个 $\mathbb{C}$ 上的变换，记作 $\bar{\ }$，

$$\bar{\ }: \mathbb{C} \to \mathbb{C}.$$

按这种观点，性质 (1) 到性质 (4) 能够被重新叙述为

(1) $\bar{\ }$保持复数的加法

(2) $\bar{\ }$保持复数的乘法

(3) $\bar{\ }$固定且只固定实数不动

(4) $\bar{\ }$是 $\mathbb{C}$ 上的对合变换

不难证明 $\mathbb{C}$ 上的任何满足上述 4 条性质的变换就是共轭变换.

1.0圆周和直线方程

直线方程

$\mathbb{R}^2$ 中的直线方程为

$$ax+by+c=0,(a,b)\neq(0,0).$$

设 $z=x+y\mathrm{i}$，则 $x=\dfrac{z+\bar z}{2},y=\dfrac{z-\bar z}{2\mathrm{i}}$，代入得

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2\mathrm{i}}\right)z+\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2\mathrm{i}}\right)\bar z+c=0.$$

令 $B=\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{2\mathrm{i}}$，$C=c$，由 $(a,b)\neq(0,0)$ 知 $B\neq 0$，直线方程变为

$$\bar B z+B\bar z+C=0,B\neq 0.$$

圆周方程

$$|z-z_0|^2=R^2$$

$$(z-z_0)(\bar z-\bar z_0)=|z|^2-z\bar z_0-z_0\bar z+|z_0|^2=R^2$$

令 $\dfrac{B}{A}=-z_0,\dfrac{C}{A}=|z_0|^2-R^2,A\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$，上式变为

$$A|z|^2+B\bar z+\bar B z+C=0,$$

$R^2>0$ 在这里体现为 $R^2=|z_0|^2-\dfrac{C}{A}=\dfrac{|B|^2}{A^2}-\dfrac{C}{A}>0$，即 $|B|^2-AC>0$.

综合以上两种情况，我们有

命题 1.2. *设 $A,C\in\mathbb{R}$，$B\in\mathbb{C}$，$|B|^2-AC>0$，则*

$$A|z|^2+B\bar z+\bar B z+C=0$$

表示圆周或直线，

(1) *若 $A\neq 0$，则为圆周；*

(2) *若 $A=0$，则为直线.*

将直线和圆周统称为复平面上广义圆周.

1.0扩充平面和复数的球面表示

设 $\mathbb{S}^2$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面，把 $\mathbb{C}$ 等同于平面 $\{(x_1,x_2,0):x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$. 固定 $\mathbb{S}^2$ 的北极 $N=(0,0,1)$. 对于 $\mathbb{C}$ 上的任意点 z，连接 N 和 z 的直线必定和 $\mathbb{S}^2$ 交于一点 P. 若 $|z|>1$，则 P 在北半球；若 $|z|<1$，则 P 在南半球；若 $|z|=1$，则 P 就是 z. 容易看出，当 $z\to\infty$ 时，球面上对应的点 P 趋向于北极 N，自然地，我们就把 $\mathbb{C}_\infty$ 中的 ∞ 对应于北极 N. 这样一来，$\mathbb{C}_\infty$ 中的所有点包括无穷远点在内都被移植到球面上去了，而在球面上，N 和其他的点是一视同仁的.

设 $z = x + y\mathrm{i}$，则

$$P = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right),$$

或者写成

$$P = \left(\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}, \frac{z-\bar{z}}{\mathrm{i}(1+|z|^2)}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right).$$

设 $P = (x_1, x_2, x_3)$，则

$$z = \frac{x_1 + \mathrm{i}x_2}{1 - x_3}.$$

复变函数的导数

定义 1.3. 设 $D \subset \mathbb{C}$ 是区域，f 是 D 上的函数，如果存在有限极限

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h},$$

则称 f 在 z_0 处可导，称该有限极限为 f 在 z_0 处的导数，记作 $f'(z_0)$.

如果 f 在 D 中每个点处都可导，则称 f 是 D 上的全纯函数或解析函数.

如果 f 在 z_0 的某个邻域上处处可导，则称 f 在 z_0 处全纯.

显然 f 在 z_0 可导当且仅当

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|),$$

即 f 在 z_0 处复可微.

命题 1.4. 若 f 在 z_0 处可导，则 f 在 z_0 处连续.

例 1.5.

(1) $f(z) = z$ 在 $\mathbb{C}$ 上处处可导.

(2) $g(z) = \overline{z}$ 在 $\mathbb{C}$ 上处处不可导.

(3) $h(z) = \arg z$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上处处不可导.

证明.

(1) $f'(z_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{z_0 + h - z_0}{h} = 1.$

(2) 断言极限

$$\lim_{z\to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z}_0}{z - z_0}$$

不存在.

- 当 $z = x + \mathrm{i}y_0$ 时，

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(x - \mathrm{i}y_0) - (x_0 - \mathrm{i}y_0)}{(x + \mathrm{i}y_0) - (x_0 + \mathrm{i}y_0)} = 1$$

- 当 $z = x_0 + \mathrm{i}y$ 时，

□

2 全纯函数

- 当我们对 x 或 y 求偏导数时不将 f 看作是 $\mathbb{C}$ 上函数而是 $\mathbb{R}^2$ 上函数.
- 函数在某点复可微的定义
  - $f'(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$
  - $f(z)-f(z_0) = f'(z_0)(z-z_0) + o(|z-z_0|)$
  - $\dfrac{\partial f}{\partial z} := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\dfrac{\partial f}{\partial y}\right), \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$
  - 当 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 时，$f' = \dfrac{\partial f}{\partial z}$
  - $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)(u+\mathrm{i}v) = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + \mathrm{i}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right]$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+\mathrm{i}v) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]$$

- 判断复可微的方法
  - 按定义判断差商的极限是否存在
  - 将 f 拆成实部和虚部，计算 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ 是否为 0
- 在邻域内处处可导等价于在邻域内处处全纯
- $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial y}\right), \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$

2.0复变函数的导数

定义 2.1 (可微). 设 $f : D \to \mathbb{C}$ 是定义在区域 $D \subset \mathbb{C}$ 上的函数，$z_0 \in D$. 如果极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

存在，就称 f 在 x_0 处复可微或可微，称这个极限为 f 在 z_0 处的导数.

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

如果 f 在 D 中的每点都可微，就称 f 是域 D 中的全纯（*holomorphic*）函数. 用 $H(D)$ 记 D 上全纯函数的全体.

如果 f 在 z_0 的一个邻域内全纯，就称 f 在 z_0 处全纯.

例 2.2. $f(z) = \bar{z}$ 在 $\mathbb{C}$ 中处处不可微.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{z_0 + h} - \bar{z}_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

例 2.3. $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2$ 在 $z = 0$ 处可导但不全纯.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} z_0)(\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0)}{z - z_0}$$

其中 $\dfrac{(\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0)}{z - z_0}$ 是一个有界量，但它不存在极限，这是因为当我们固定 z 的实部为 $\operatorname{Re} z_0$，令虚部变化时，它的极限为 0；当我们固定 z 的虚部为 $\operatorname{Im} z_0$，令实部变化时，它的极限为 1.

因此，只有 $\operatorname{Re} z_0 = 0$ 时，我们才能借助项 $(\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} z_0)$ 在 $z \to z_0$ 时趋于 0 来把整体干成 0.

定理 2.4 (求导的四则运算). 设函数 f 和 g 在点 x 处可导，则 $f \pm g$，fg 也在点 x 处可导；如果 $g(x) \neq 0$，那么函数 $\dfrac{f}{g}$ 也在点 x 处可导. 精确地说，我们有以下公式：

(1) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$；

(2) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$；

(3) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

2.1 Cauchy-Riemann 方程

定义 2.5 (实可微)**.** 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 是定义在域 D 上的函数，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$. 如果 u 和 v 作为 x,y 的二元函数在点 (x_0,y_0) 处可微，则称 f 在点 z_0 处实可微.

引理 2.6. f 在点 z_0 处实可微当且仅当

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\Delta z+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\Delta\bar{z}+o(|\Delta z|).$$

其中

$$\frac{\partial f}{\partial z}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right),\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

证明.

$$u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=u(x_0,y_0)+\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+o(|\Delta z|)$$
$$v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=v(x_0,y_0)+\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+o(|\Delta z|)$$

$$\begin{aligned}f(z_0+\Delta z)&=f(z_0)+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y+o(|\Delta z|)\\&=f(z_0)+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+o(|\Delta x|)\\&=f(z_0)+\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(\Delta z+\Delta\bar{z})+\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta z-\Delta\bar{z})+o(|\Delta z|)\\&=f(z_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta z+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta\bar{z}+o(|\Delta z|)\end{aligned}$$

f 的式子拆开来时小 o 变成两个小 o 的原因是如果一个复数的模长是小 o 那么它的实部和虚部也一定是小 o. □

注记. 如果形式上将 z 与 $\bar{z}$ 视为独立的变量，那么可以借助链式法则从

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2},y=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$$

中得出

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right),\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

其中，如果设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，那么有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

定理 2.7. 下列命题等价:

(1) f 在点 z_0 处复可微;

(2) f 在点 z_0 处实可微且 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)=0$;

(3) f 在 z_0 处实可微且 $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0,\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0$.

例 2.8. $f=z^n$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯.

证明. $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ □

例 2.9. $f = (\operatorname{Re} z)^2$ 在 $z = 0$ 处不全纯.

定义 2.10 (Laplace 算子)**.**

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

若 u 是 C^2 的且 $\Delta u = 0$，则 u 被称为调和函数.

命题 2.11. 设 u 是 C^2 的，则

$$\Delta u = 4\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}$$

命题 2.12. 若 $f = u + \mathrm{i}v$ 在区域 Ω 上全纯，则 u, v 都在 Ω 上调和.

证明.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)} = 0$$

□

定义 2.13. 若 u, v 在 Ω 上调和，并且满足 *Cauchy-Riemann* 方程，则 v 称为 u 的共轭调和函数.

例 2.14. $u(x, y) = \log r, r = \sqrt{x^2 + y^2}, \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$，则 u 在 Ω 调和

导数的几何意义

$$f(x, y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

$$f : (x, y) \to (u(x, y), v(x, y))$$

设 $\gamma(t) \subset \mathbb{R}^2$ 中光滑曲线，$\gamma_0 = z_0$，$\sigma(t) = f(\gamma(t))$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的曲线，假设 $f(z_0) = w_0$，

在 z_0 处，$\gamma_1(t)$ 的切线转动到 $\gamma_2(t)$ 的切线角度为 $\operatorname{Arg} \gamma_2'(0) - \operatorname{Arg} \Gamma_1'(0)$；在 z_0 处，$\sigma_1(t)$ 的切线转动到 $\sigma_2(t)$ 的切线角度为 $\operatorname{Arg} \sigma_2'(0) - \operatorname{Arg} \sigma_1'(0)$.

若 $f'(z_0) \neq 0$，$\sigma(t) = f(\gamma(t))$

$$\sigma'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$$

$$\operatorname{Arg} \sigma'(0) = \operatorname{Arg} f'(\gamma)$$

注记. 在 z_0 处 $f'(z_0) \neq 0$ 当且仅当 f 在 z_0 处共形.

在每一点都共形不意味着在整个上面共形

共形，微分同胚

例 2.15. $f(z) = \mathrm{e}^z$

若 $f'(z_0) = 0$，

例 2.16. $f(z) = z^2$，$z_0 = 0$，选取

$$\gamma_1(t) = (t, 0), t \geqslant 0$$

$$\gamma_2(t) = (0, t), t \geqslant 0$$

$$\gamma_1(t) = t$$

$$\gamma_2(t) = t\mathrm{i}$$

注记. 如果 f 在 Ω 内全纯，$f'(z_0)=0$，$z_0\in\Omega$，则 f 在 z_0 处一定不保角.

$$f(z)=f(z_0)+a_2(z-z_0)^2+a_3$$

设 $f(x,y)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，考虑

$$\begin{aligned} F:\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \qquad \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (u(x,y),v(x,y)) \end{aligned}$$

F 的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

3 复变函数的积分

初等理解

$\mathrm{d}z$ 理解为形式记号，没有具体意义.

计算时，利用曲线的参数表示.

微分形式

$\mathrm{d}z$ 理解为微分形式，积分理解为微分形式的积分，计算时，还是要回归曲线的参数表示.

基本的例子

引理 3.1.

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}w}{w} = \mathrm{i}\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} w.$$

证明.

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}w}{w} &= \int_a^b \frac{\rho'(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)} + \rho(t)\mathrm{i}\theta'(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}}{\rho(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}}\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \theta'(t)\mathrm{d}t \\
&= \log\rho(b) - \log\rho(a) + \mathrm{i}\,(\theta(b) - \theta(a)) \\
&= \mathrm{i}\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} w
\end{aligned}$$

□

$$\begin{tikzcd}
\displaystyle\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z \arrow[r, equal, "\text{留数定理}"] \arrow[d, equal, "\text{积分换元}"] & f\text{在}\Gamma\text{内的零点总数} \arrow[d, equal, dashed] \\
\displaystyle\int_{f(\Gamma)} \frac{1}{w}\mathrm{d}w \arrow[r, equal] & f(\Gamma)\text{绕原点的圈数}
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{i}\Delta_{f(\Gamma)} \operatorname{Arg} w$

定义 3.2. 绕数（环绕指数，圈数），$\dfrac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} w$.

注记. 我想知道，为什么这个定义，和拓扑的定义（基本群意义下的圈数）是一致的.

定理 3.3 (幅角原理). $N(f,\gamma) - P(f,\gamma) = \dfrac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(z)$.

我好奇上图右侧的虚线有没有直接推出来的办法，我猜测可以考虑把包围着所有零点的圈用包围着单个零点的圈们拼出来.

同伦的道路有相同的积分

同伦的道路有相同的积分

4 Cauchy 积分定理

5 全纯函数的原函数

6 Cauchy 积分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

7 Cauchy 积分公式的一些重要推论

8 非齐次的 Cauchy 积分公式

9 Rouché 定理

定理 9.1 (Rouché). 设 $f,g\in H(D)$，γ 是 D 中可求长的简单闭曲线，γ 的内部位于 D 中. 在 γ 上成立 $|g(z)|<|f(z)|$，则 $f(z)$ 与 $(f+g)(z)$ 在 γ 中有相同的零点数（包括重数在内）.

注记. 可以将 g 看作一个扰动.

证明.

- 由不等式 $|g(z)|<|f(z)|$ 容易验证 f 和 $f+g$ 在 γ 上都无零点.
- 由幅角原理，

$$
\begin{aligned}
N(f,\gamma) &= \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(z) \\
N(f+g,\gamma) &= \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(f+g)(z) \\
&= \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(z) + \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(1+\frac{g}{f})(z).
\end{aligned}
$$

  因此只需证 $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(1+\frac{g}{f})(z)=0$.

- 令 $w=(1+\frac{g}{f})(z)$，$\Gamma=w\circ\gamma$，即证 $\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} w=0$.

  由 γ 上成立的不等式 $|g|<|f|$，左右同除 f 得 $|\frac{g}{f}|<1$，即 $|w-1|<1$.

  从而 Γ 不可能绕原点转，得证.

□

推论 9.2. Rouché 定理中的条件可以放松为 $|g|<|f|+|f+g|$.

证明. 论证同上，此时得到不等式 $|w-1|<1+|w|$，从而 Γ 不会绕原点转，得证. □

例 9.3. 求方程 $z^4-6z+3=0$ 在圆 $|z|<1$ 与圆环 $1<|z|<2$ 中根的个数.

解. 设 $f(z)=z^4-6z+3$.

- 当 $|z|=1$ 时，$g(z)=-6z$ 是主项，$f(z)-g(z)=z^4+3$ 视作扰动.

$$|f(z)-g(z)|=|z^4+3|\leqslant 4<6=|G(z)|.$$

  由 Rouché 定理知 $g(z)$ 与 $g(z)+f(z)-g(z)$ 在 $|z|<1$ 中有相同的零点个数.

- 当 $|z|=2$ 时，$h(z)=z^4$ 是主项，$f(z)-h(z)=-6z+3$ 视作扰动.

$$|f(z)-h(z)|=|-6z+3|\leqslant 15<16=|h(z)|.$$

  由 Rouché 定理知 $h(z)$ 与 $h(z)+f(z)-h(z)$ 在 $|z|<2$ 中有相同的零点个数.

  容易验证 $f(z)$ 在 $|z=1|$ 上无零点，因此 $f(z)$ 在 $1<|z|<2$ 中有 3 个零点.

□

例 9.4. 利用 *Rouche* 定理证明代数学基本定理.

证明. 令 $F=(z)=a_n z^n$，在 $|z|=R$ 上，当 R 足够大时

$$|F(z)-p(z)|=|a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0|<|F(z)|$$

故 $P(z)$ 在 $|z|<R$ 上有 n 个根.

令 $R\to\infty$，$P(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有 n 个根. □

例 9.5. 求证：$P(z)=z^4+2z^3-2z+10=0$ 在每一象限中恰有一根.

证明. 容易验证它在坐标轴上无根.

观察到它是实系数多项式，所以根关于 x 轴是对称的.

下证 $P(z)$ 在第一象限只有一根.

做一四分之一圆周，计算 $N=\Delta_\gamma \operatorname{Arg} P(z)$.

$$\Delta_{\gamma_1}\operatorname{Arg}P(z)=0.$$

$$\Delta_{\gamma_2}\operatorname{Arg}P(z)=\Delta_{\gamma_2}\operatorname{Arg}z^4\left(1+\frac{2z^3-2z+10}{z^4}\right)=4\Delta_{\gamma_2}\operatorname{Arg}z+\Delta_{\gamma_2}\operatorname{Arg}(1+\frac{2z^3-2z+10}{z^4})=2\pi+\varepsilon(R),\lim_{R\to+\infty}\varepsilon($$

$$\Delta_{\gamma_3}\operatorname{Arg}P(z)=\operatorname{Arg}P(0)-\operatorname{Arg}P(\mathrm{i}R)=\operatorname{Arg}P(0)-\operatorname{Arg}(R^4+10-2\mathrm{i}R(R^2+1))=-\operatorname{Arg}(1-\frac{2\mathrm{i}R(R^2+1)}{R^4+10})=\varepsilon(R)$$

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma\operatorname{Arg}P(z)=1+\varepsilon(R)=1$$

□

例 9.6. 设 $0<a_0<a_1<\cdots<a_n$，求证 $a_0+a_1\cos\theta+a_2\cos2\theta+\cdots+a_n\cos n\theta$ 在 $(0,2\pi)$ 中有 $2n$ 个不同的零点.

证明.

- 令 $P_n(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$，它的全部零点在 $|z|<1$ 中且无正实根.
  - 设 z_0 是 $P_n(z)$ 的零点，则 z_0 不是非负实数.

    $$0=(1-z_0)P_n(z_0)=a_0+(a_1-a_0)z_0+(a_2-a_1)z_0^2+(a_n-a_{n-1})z_0^n-a_nz_0^{n+1}$$

    $$|a_nz_0^{n+1}|=|a_0+(a_1-a_0)z_0+(a_2-a_1)z_0^2+\cdots+(a_n-a_{n-1})z_0^n|\leqslant|a_0|+(a_1-a_0)|z_0|+\cdots+(a_n-a_{n-1})|z_0|^n.$$

    由于 z_0 不是非负实数，各项幅角不可能相同，所以上面取到严格不等号.

    $$a_n(|z_0|^{n+1}-|z_0|^n)+a_{n-1}(|z_0|^n-|z_0|^{n-1})+\cdots+a_0(|z_0|-1)<0$$

    当 $|z_0|\geqslant1$ 时，矛盾. 因此 $|z_0|<1$.
  - 设 $C:|z|=1$，计算 $N=\dfrac{1}{2\pi}\Delta_C\operatorname{Arg}P_n(z)$.

    由上一条知，$P_n(z)$ 在 C 内部有 n 个零点. 则 $\Gamma=P_n(c)$ 绕零点转 n 圈.

    所以 Γ 与虚轴至少相交 $2n$ 次. 所以至少有 $2n$ 个 θ 使得 $P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 在虚轴上.

    故至少有 $2n$ 个不同的 θ 使得 $\operatorname{Re}P_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=0$.

- 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$z^k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}$，$\cos k\theta=\frac{1}{2}(z^k+z^{-k})$

  所以 $\sum_{k=0}^{n}a_k\cos k\theta=a_0+\frac{1}{2}a_1(z+\frac{1}{z})+\cdots+\frac{1}{2}a_n(z^n+\frac{1}{z^n})=\frac{1}{2}\frac{1}{z^n}\left(a_n+a_nz^{2n}+a_{n-1}z+a_{n-1}z^{2n-1}+\cdots\right.$

  右边是一个 $2n$ 次多项式，所以在 $\mathbb{C}$ 上至多有 $2n$ 个根，故在 $|z|=1$ 上至多 $2n$ 个根.

□

定理 9.7 (开映射定理). 若 $f\in H(D)$ 且 f 不是常值映射，则 f 是开映射.

证明. 设 $f(z_0)=w_0$. 设 z_0 附近有一个邻域 G，映过去 $f(G)$. 存在一个 $B(w_0,\varepsilon)\subset f(G)$.

要找 ε，使得 $w_1\in B_\varepsilon(w_0)$ 时，存在 $z_1\in G$，使得 $f(z_1)=w_1$.

假设 $G:|z-z_0|<\delta$，其中 δ 待定.

只要证 $F(z)=f(z)-w_0$ 与 $G(z)=f(z)-w_1$ 在 $|z-z_0|<\delta$ 中根的个数相同.

当 $|z-z_0|=\delta$ 时，$F-G=w_1-w_0$，$|F|=|f(z)-w_0|$

由于 f 非常值全纯，存在 $\delta_1>0$，对任意 $\delta\in(0,\delta_1)$ 时，$\min\limits_{|z-z_0|=\delta}|f(z)-w_0|>0$.

令 $\varepsilon=\min\limits_{|z-z_0|=\delta}|f(z)-w_0|$，则取 w_1 使得 $|w_1-w_0|<\varepsilon$. 当 $|z-z_0|=\delta$ 时，$|F-G|=|w_1-w-0|<\varepsilon\leqslant|f(z)-w_0|=|F(z)|$.

故 $F(z)$ 与 $G(z)$ 在 $|z-z_0|<\delta$ 中零点个数相同. □

注记. F 的零点 z_0 可以有重数.

定理 9.8 (最大模原理). 设 f 在 Ω 中非常值，则 $|f|$ 在 Ω 中不能达到最大.

证明. 设 $|f|$ 在 $z_0\in\Omega$ 中达到最大，则 $B(z_0\delta)\subset\Omega$，故 $f(B(z_0,\delta))$ 是开集. 容易找到更大的. □

注记. 同时可以看出最小模原理为什么不对，为什么要假定模不能达到零点.

定理 9.9. 设 $f(z)$ 在 D 中全纯，$f(0)=0$，0 是 f 的 m 重零点，则对任意**充分小**的 $\rho>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|w_0|<\delta$ 时，$f(z)-w_0$ 在 $|z|<\rho$ 中有 m 个不同的零点.

注记. 注意 ρ 和 δ 的先后关系.

通过 f' 的零点证明是单重零点.

证明.

(1) 由于 $f(z)$，$f'(z)$ 为非常值的全纯函数，对任意充分小的 ρ，有 $f(z)$ 和 $f'(z)$ 在 $0<|z|<\rho$ 上没有零点.

(2) 令 $F(z)=f(z)$，$G(z)=f(z)-w_0$.

  令 $\delta=\min\limits_{|z|=\rho}|f(z)|>0$. 当 $0<|w_0|<\delta$ 时，

  当 $|z|=\rho$ 时，$|F(z)-G(z)|=|w_0|<|f(z)|=|F(z)|$

  故 $F(z)$ 与 $G(z)$ 在 $|z|<\rho$ 中有相同的零点个数.

(3) 由于 $F(z)$ 在 $|z|<\rho$ 中仅有一个 m 重零点 $z=0$，故 $G(z)$ 在 $|z|<\rho$ 中有 m 个零点（包含重数）

  由于 $f'(z)$ 在 $0<|z|<\rho$ 中没有零点，故 $G(z)=f(z)-w_0$ 在 $0<|z|<\rho$ 中没有重根.

□

推论 9.10. 假设 f 在 D 中全纯，非常值，$f(z_0)=w_0$，则对任意充分小的 $\rho>0$，存在 $\delta=\delta(\rho)>0$，使得 $B(w_0,\delta)\subset f(B(z_0,\rho))$ 中.

定理 9.11 (保域性)**.** 若 f 在 Ω 中全纯，非常值，则 f 将区域映为区域.

定理 9.12 (反函数定理)**.** 如果 $w=f(z)$ 在区域 D 中单叶全纯函数，$G=f(D)$，则反函数 $z=g(w)$ 在 G 上单叶全纯，并且 $g'(w)=\dfrac{1}{f'(z)}$.

证明.

(1) g 在 G 上是连续的. 显然.

(2) g 在 G 上是全纯的.

$$\lim_{w\to w_0}\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0}=\lim_{w\to w_0}\frac{1}{\frac{w-w_0}{g(w)-g(w_0)}}=\lim_{w\to w_0}\frac{1}{\frac{f(g(w))-f(g(w_0))}{g(w)-g(w_0)}}$$

当 $w\to w_0$ 时，由 g 的连续性，有 $g(w)\to g(w_0)$，则

$$=\lim_{z\to z_0}=\frac{1}{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}=\frac{1}{f'(z_0)}$$

□

接下来想研究一下 $f'(z)\neq 0$ 和单叶性的关系.

定理 9.13. 若 $f(z)$ 在 D 中单叶全纯，则 $f'(z)\neq 0$，任意 $z\in D$.

证明. 假设存在 $z_0\in D$ 使得 $f'(z_0)=0$. 则 z_0 是 $f(z)-f(z_0)$ 的 m 重零点，$m\geqslant 2$. 任意 $\rho>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $|w_1-w_0|<\delta$，$f(z)-w_1$ 在 $|z-z_0|<\rho$ 中有 $m\geqslant 2$ 个不同的零点. 与单叶矛盾. □

定理 9.14. 若 $f(z)$ 在 D 中全纯，$f'(z)$ 在 z_0 处不为零，则存在 $\varepsilon>0$，$f(z)$ 在 $B(z_0,\varepsilon)$ 单叶.

证明一. 设 $w_0=f(z_0)$，任意 $\rho>0$，存在 $\delta>0$，则当 $0<|w-w_0|<\delta$ 时，$f(z)-w_1$ 在 $|z-z_0|<\rho$ 上只有一个零点.

先选 z 的一个邻域，能得到 w 的一个邻域，使得 z 邻域中只有一个点能映到 w 的邻域中.

但是目前的 z 的邻域，可能把两个点映到 w 的邻域外的同一个点.

所以由连续，再在 z 的邻域中找一个小邻域，使得像在 w 的那个邻域中. 此时 w 的原像可能不落在小小邻域中，但如果落不会超过两个. □

证明 *2*. 设 $z_0=0$，$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，$|z|<R.a_1=f'(0)\neq 0$.

$$|f(z_1)-f(z_2)|=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz_1^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nz_2^n$$

$$|a_1(z_1-z_2)+a_2(z_1^2-z_2^2)+\cdots|=|z_1-z_2||a_1+\sum_{n=2}^{\infty}a_n(z_1^{n-1}+\cdots z_2^{n-1})|$$

$$\geqslant |z_1 - z_2|(|a_1| - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|\rho^{n-1})$$

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, |z| < R$$

故当 $0 < \rho < R$ 时，$\sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n|\rho^{n-1}$ 收敛，且当 $\rho \to 0$ 时，$\varphi(\rho)$ 也趋于零. $\square$

Chapter 2

解析函数

1 函数项级数

定义 1.1. 称数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 收敛，若部分和 $S_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$ 收敛到 $s \in \mathbb{C}$.

只有一个问题，可不可以定义收敛到 ∞.

定理 1.2. 若

(1) $f_n(z)$ 在区域 D 内全纯；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f(z)$.

则

(1) $f(z)$ 在区域 D 内全纯；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$.

2 幂级数

定理 2.1. $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, \infty]$，

- 当 $|z| < R$ 时，绝对收敛且内闭一致收敛；
- 当 $|z| > R$ 时，发散.

证明.

- 当 $R = 0$ 时，断言 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 收敛 $\Longleftrightarrow z = 0$. 任取 $z_0 \neq 0$，存在子列 $\{a_{n_k}\}$ 使得 $|a_{n_k}|^{1/n_k} > \dfrac{1}{z_0}$，从而 $a_{n_k}|z_0|^{n_k} > 1$，发散.

- 当 $R=\infty$ 时，断言 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\mathbb{C}$ 上收敛. 任取 $z_0 \neq 0$，存在 N，使得任意 $n \geqslant$，$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|z_0|}$，从而 $|a_n z_0^n| < \frac{1}{2^n}$. 从而收敛. 也可看出内闭一致收敛，因为 N 实际上只与 $|z_0|$ 有关，对于有界的区域总可以取到一个一致的 N.
- 当 $0<R<\infty$ 时，任取 z_0 满足 $0<|z_0|<R$. 存在 $\rho>0$，使得 $|z_0|<\rho<R$，存在 N 使得 $|a_n \rho^n| < 1. |a_n z_0^n| < \left(\frac{|z_0|}{\rho}\right)^n$ 绝对且内闭一致收敛.

□

定理 2.2. 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛域为 $|z|<R$，则

(1) $f(z)$ 为 $|z|<R$ 上的全纯函数.

(2) f 在 $|z|<R$ 上可导，且 $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

(3) $f'(z)$ 在 $|z|<R$ 上收敛且全纯.

证明.

(1) Morera 定理

(2) 设 $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$，取 $|z_0|<R$，要证

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=g(z_0).$$

设 $S_n(z)=\sum_{k=0}^{n} f_k(z), r_k(z)=f(z)-S_n(z)$.

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}-g(z_0)\\
=&\frac{S_n(z_0+h)+r_n(z_0+h)-S_n(z_0)-r_n(z_0)}{h}-g(z_0)\\
=&\left(\frac{S_n(z_0+h)-S_n(z_0)}{h}-S_n'(z_0)\right)+\left(\frac{r_n(z_0+h)-r_n(z_0)}{h}\right)+(g(z_0)-S_n'(z_0))
\end{aligned}$$

□

推论 2.3. 幂级数在收敛域中无穷次可导.

定义 2.4. 设 D 是区域，称 $f(z)$ 在 z_0 处解析，若 f 在 z_0 附近可展开为幂级数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$. 若 $f(z)$ 在 D 上任一点解析，则称 f 在 D 上解析.

推论 2.5. 解析 $\Longrightarrow$ 全纯.

例 2.6. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯.

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ 在 $|z|<1$ 上全纯.

定理 2.7 (Abel 定理). 若 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径 $R=1$，且级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $z=1$ 处收敛到 s，则

(1) 级数在区域 A 上一致收敛.

(2) $\lim_{z\in Az\to 1}f(z)=s$.

证明.

(1) 要证级数在 A 上一致收敛，只要说明级数的片段

$$|c_{n+1}|z^{n+1}+c_{n+2}z^{n+2}+\cdots+c_{n+p}z^{n+p}$$

在 A 上可以任意小. 为此令 $\sigma_n=0,\sigma_{n+p}=\sum_{k=n+1}^{n+p}c_k$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+p}c_kz^k&=\sum_{k=n+1}^{n+p}(\sigma_k-\sigma_{k-1})z^k\\&=\sum_{k=n+1}^{n+p}\sigma_kz^k-\sum_{k=n}^{n+p-1}\sigma_kz^{k+1}\\&=\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\sigma_k(z_k-z_{k+1})+\sigma_{n+p}z^{n+p}\\&=z^{n+1}(1-z)\sum_{k=n+1}^{n+p}\sigma_kz^{k-n-1}+\sigma_{n+p}z^{n+p}.\end{aligned}$$

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p}c_kz^k|\leqslant\varepsilon|1-z|(1+|z|+|z|^2+\cdots)+\varepsilon=\varepsilon\left(\frac{|1-z|}{1-|z|}+1\right).$$

□

例 2.8. 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$.

解.

- 收敛半径 $R=1$.
- 当 $z_0=1$ 时，级数发散.
- 当 $z_0=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\theta\in(0,2\pi)$ 时，

  $$\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n},\quad \mathrm{Im}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n},$$

  由 Dirichlet 判别法，级数收敛.
- 当 $|z|<1$ 时，求和函数 $f(z)$.

  $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}=\frac{1}{1-z}$.

□

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$ 的收敛性

首先理解一下 n^z，按定义 $n^z = \mathrm{e}^{z \operatorname{Log} n} = \mathrm{e}^{z(\log n + 2k\pi \mathrm{i})}$，这里我们取 $k=0$，即 $n^z = \mathrm{e}^{z \log n}$.

定理 2.9. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$ 在点 $z_0 = x_0 + \mathrm{i} y_0$ 收敛，则

(1) 它在半平面 $\operatorname{Re} z > x_0$ 内收敛；

(2) 它在以 z_0 为顶点，以水平射线 $[z_0, \infty)$ 为角平分线且张角 $2\theta_0 < \pi$ 的闭角域 A 上一致收敛.

定理 2.10. 若函数 $f(z)$ 在圆 $C : |z-a| < R$ 内解析，则 $f(z)$ 在 C 内可以展为幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

这个幂级数称为 $f(z)$ 在 $z=a$ 点的 *Taylor* 级数.

证明.

- 设 z 是圆 C 内任意一点，作圆周 $\gamma : |\zeta - a| = r < R$ 使得 z 位于 γ 的内部.
- 由 Cauchy 积分公式得，
$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta.$$
- 为了得到 $f(z)$ 的幂级数展开式，关键在于将 $\frac{1}{\zeta - z}$ 展开为 z 的幂级数.

  当 $\zeta \in \gamma$ 时，$\left| \frac{z-a}{\zeta - a} \right| < 1$，于是有
$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z-a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\zeta - a}} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta - a} \right)^n.$$
- 当 z 固定，上述级数关于 $\zeta \in \gamma$ 是一致收敛的. 由定理 2 得，
$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \cdot (z-a)^n,$$

  即
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

□

定义 2.11. $f(z)$ 在 z_0 处全纯，且 $f(z_0) = 0$.

$$f(z) = f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2!} f''(z_0)(z-z_0)^2 + \cdots$$

(1) 若 $f^{(n)}(z_0) = 0, \forall n \geqslant 0$，则 $f(z)$ 在 $B(z_0, \delta)$ 恒为零.

(2) 若 $f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, f^{(m)}(z_0) \neq 0$，则称 z_0 为 f 的 m 重零点.

此时 $f(z) = (z-z_0)^m [a_m + a_{m+1}(z-z_0) + \cdots] = (z-z_0)^m \varphi(z)$，$f(z)$ 在 $B(z_0, \delta)$ 中只能有零点 z_0.

3 全纯函数的幂级数展开

定理 3.1. 设 $f(z)$ 在区域 D 中全纯，$\overline{B(z_0,R)}\subset D$，则 f 可在 z_0 处展开

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0),\forall\ z\in B(z_0,R),$$

且展式唯一.

定义 3.2. 若 $f(z)$ 在 z_0 处全纯，且 $f(z_0)=0$，则称 z_0 为 $f(z)$ 的零点. 此时 $f(z)$ 可在 z_0 的邻域中展开为

$$f(z)=f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots,\quad \forall\ z\in B(z_0,\delta).$$

只有两种情形：

(1) 若 $f^{(n)}(z_0)=0,\forall\ n\geqslant 1$，则 $f(z)$ 在 $B(z_0,\delta)$ 内恒为零.

(2) 若 $f'(z_0)=f''(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0,f^{(m)}(z_0)\neq 0$，则称 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点，此时 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$

其中 $g(z)$ 在 $B(z_0,\delta)$ 内全纯，$g(z_0)\neq 0$，特别地，我们知道若 z_0 是 m 阶零点，则在它的一个充分小邻域内没有其他的零点.

4 全纯函数的 Laurent 展开

5 Laurent 级数

- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$.
- 若级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 在圆环 $D=\{r<|z-z_0|<R\}$ 上收敛，则内闭一致收敛且和函数在 D 中全纯.

定义 5.1 (Laurent 级数). *称形如*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{2.1}$$

的级数为 Laurent 级数.

称级数(2.1)在 $z=z_0$ 处收敛，如果级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a^n) \tag{2.2}$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} \tag{2.3}$$

在 z_0 处收敛. 称(2.2)为(2.1)的全纯部分，(2.3)为(2.1)的主要部分.

定理 5.2. *Laurent 级数(2.1)若有收敛域，则其收敛域为圆环 $D: r<|z-a|<R$. 级数在 D 内绝对收敛和内闭一致收敛，和函数 $f(z)$ 在 D 内解析.*

下面定理是上一定理的逆定理.

定理 5.3. *若函数 $f(z)$ 在圆环 $D: r<|z-a|<R$ 内解析，则*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a),$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{|\zeta-a|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \quad (r<\rho<R).$$

并且展式是唯一的，我们称它为 $f(z)$ 在 D 内的 Laurent 展开.

6 孤立奇点

若函数 $f(z)$ 在 a 点的空心邻域 $B^*(a,R)$ 内全纯，则称 a 是 $f(z)$ 的一个孤立奇点，这时 $f(z)$ 在 $0<|z-a|<R$ 内可展为 Laurent 级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

定义 6.1. 设 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点，

(1) 若 $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 存在，则称 a 是 $f(z)$ 的可去奇点；

(2) 若 $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$，则称 a 是 $f(z)$ 的极点；

(3) 若 $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 不存在，则称 a 是 $f(z)$ 的本性奇点.

定理 6.2. 设 $a\in\mathbb{C}$，$f(z)$ 在 $B^*(a,R)$ 内解析，则下列三个命题等价：

(1) a 是 $f(z)$ 的可去奇点；

(2) $f(z)$ 在 $B^*(a,\delta)$ 上有界，其中 δ 是某个小于等于 R 的实数；

(3) $f(z)$ 的 *Laurent* 展开的负幂项系数均为零.

证明.

(1) $\Longrightarrow$ (2) 显然.

(2) $\Longrightarrow$ (3) 任取 $\rho<\delta$，

$$|c_{-n}|=\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-a|=\rho}f(z)(z-a)^{n-1}\mathrm{d}z\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}M\rho^{n-1}\cdot 2\pi\rho=M\rho^n.$$

令 $\rho\to 0+$，得到 $c_{-n}=0$，$n=1,2,\cdots$. □

命题 6.3. 设 $z_0\in\mathbb{C}$ 是 f 的孤立奇点，那么

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty\Longleftrightarrow\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=0.$$

定理 6.4. 设 $a\in\mathbb{C}$，$f(z)$ 在 $B^*(a,R)$ 内解析，则下列三个命题等价：

(1) a 是 $f(z)$ 的极点；

(2) $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-a)^m}$，其中 $m\in\mathbb{N}$，$g(z)$ 在 $B(a,\delta)$ 内解析且恒不为零；

(3) $f(z)$ 的 *Laurent* 展式中只有有限多负幂项的系数不为零.

6.1 无穷远奇点

定义 6.5.

(1) 若 $f(z)$ 在 $|z|>R$ 内全纯，则称 $z=\infty$ 是 f 的孤立奇点.

(2) $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点/极点/本性奇点

$\iff w=0$ 是 $f(\frac{1}{w})$ 的可去奇点/极点/本性奇点.

例 6.6. ∞ 不是 $\dfrac{1}{\sin z}$ 的孤立奇点.

例 6.7. ∞ 是 n 次多项式的 n 阶极点.

定义 6.8. 若 f 在 $\mathbb{C}$ 上全纯，则称 f 为整函数，即 f 可表示为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,$$

其中幂级数的收敛半径 $R=+\infty$.

定理 6.9. 设 $f(z)$ 为整函数

(1) ∞ 为 $f(z)$ 的可去奇点 $\iff f(z)$ 为常数.

(2) ∞ 为 $f(z)$ 的极点 $\iff f(z)$ 为非常数多项式.

(3) ∞ 为 $f(z)$ 的本性奇点 $\iff f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 中有无穷多个 $a_n\neq 0$.

定义 6.10. 亚纯函数：没有非孤立奇点，没有本性奇点.

定理 6.11. 若 f 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上亚纯，则 f 为有理函数.

证明.

(1) 由 $\overline{\mathbb{C}}$ 的紧性，$f(z)$ 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上只能有有限个极点.

(2) 设 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 中的极点为 $z_1,\cdots,z_k$，相应的 Laurent 展开的主要部分为

$$\psi_j(z)=\frac{c_{-1}^{(j)}}{z-z_j}+\cdots+\frac{c_{-m_j}^{(j)}}{(z-z_j)^{m_j}},\quad m_j\geqslant 1.$$

设 $f(z)$ 在 ∞ 处的 Laurent 展开的主要部分为

$$\psi(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_mz^m.$$

(3) 有点问题吧

□

定理 6.12. 若 $f(z)$ 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上亚纯，单射，则 $f(z)$ 是分式线性变换.

证明. 设 $f(z)=\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$，$P_n,Q_m$ 无公共根.

若 $n>m$，则 $f(\infty)=\infty$，这迫使 Q_m 在 $\mathbb{C}$ 上无零点，否则 f 不是单射，从而 Q_m 为常数. 故 $f(z)=P_n(z)$ 为多项式. 因为 f 单叶，所以 f 形如 $f(z)=a\cdot(z-z_0)^n$. □

7 留数定理

- 留数定义.
- 留数实际上是 Laurent 展开中负一次幂项的系数.

定义 7.1. 设 f 在 $\hat{B}(a,\delta)$ 中全纯，定义 f 在 a 点的留数为

$$\mathrm{Res}(f,a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-a|=\rho}f(z)\mathrm{d}z,\quad \forall\ \rho\in(0,\delta).$$

由多连通域的柯西积分定理，若有 $0<\rho_1<\rho_2<\delta$，则

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-a|=\rho_1}f(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-a|=\rho_2}f(z)\mathrm{d}z,$$

因此留数是良好定义的.

7.1 留数的计算方法

(1) 设 f 在 a 点处的 Laurent 展开为 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$，则

$$\mathrm{Res}(f,a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-a|=\rho}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n\mathrm{d}z\xlongequal{\text{内闭一致收敛}}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\int_{|z-a|=\rho}(z-a)^n\mathrm{d}z=c_{-1}.$$

(2) 若 a 是 f 的可去奇点，则 $\mathrm{Res}(f,a)=0$.

(3) 若 a 是 f 的一阶极点，则

$$\mathrm{Res}(f,a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

(4) 若 $f=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$，$\varphi(a)\neq 0$，$\psi(a)=0$，$\psi'(a)\neq 0$.

$$\mathrm{Res}(f,a)=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

(5) 若 a 是 f 的 m 阶极点，$f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-a)^m}$，

$$Res(f,a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-a|=\rho}\frac{g(z)}{(z-a)^m}=\frac{1}{(m-1)!}g^{(m-1)}(a)=\frac{1}{(m-1)!}((z-a)^m)f(z)^{(n-1)}\Big|_{z=a}.$$

例 7.2. $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$，求 $\mathrm{Res}(f,0)$.

是本性奇点，$f(z)=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{3!z^3}+\cdots$，$\mathrm{Res}(f,0)=1$.

例 7.3. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^4-1}$，$\mathrm{Res}(f,1)=\dfrac{\sin z}{(z^4-1)'}=\dfrac{\sin 1}{4}$.

7.2 留数定理

定理 7.4 (留数定理)**.** 设 f 在 γ 的内部 D 有有限个孤立奇点 $\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$, 在 $D\backslash\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ 全纯，在 $\bar{D}\backslash\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ 连续，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} Resf(z_i)$$

啥是多连通域的积分定理?

用留数定理的范围，奇点太多不要用.

例 7.5. $I = \displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^7 - 1}\mathrm{d}z.$

无穷远处的 *Cauchy* 公式???

7.3 无穷原点处留数

定理 7.6 (∞ 处留数)**.** 设 f 在 $|z| > R$ 全纯，$Res(f, \infty) = -\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{|z=\rho|} f(z)\mathrm{d}z(\rho > R).$

注意积分方向.

设 f 在 ∞ 展开，$f(z) = \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n, |z| > R.$

$$Res(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=\rho}\sum c_n z^n \mathrm{d}z = -c_{-1}.$$

例 7.7. $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$，求 $Re(f, \infty)$

注意 f 在单位圆内和单位圆外的不同的 *Laurent* 展开.

定理 7.8. 设 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}\backslash\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$，则 f 的所有孤立奇点的留数和为零.

$$\sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k) + Res(f, \infty) = 0$$

证明. 取 $\gamma : |z| = R$，R 充分大.

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=R} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k) = -Res(f, \infty)$$

□

例 7.9. $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z^5}{1+z^6} = -2\pi\mathrm{i}Res(f, \infty)$

$$\frac{z^5}{1+z^6} = \frac{z^5}{z^6}\frac{1}{1+\frac{1}{z^6}} = \frac{1}{z}(1 - \frac{1}{z^6} + \cdots)$$

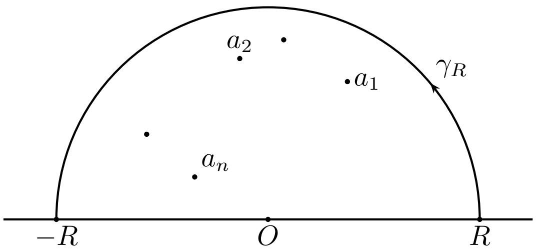
7.4 实积分计算

一： $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$

定理 7.10. 设 $f(z)$ 在 $\mathbb{H}\setminus\{a_1,\cdots,a_n\}$ 全纯，在 $\overline{\mathbb{H}}\setminus\{a_1,\cdots,a_n\}$ 连续，若 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=0$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_k).$$

证明. 取 R 充分大使得 $\{a_1,\cdots,a_n\}\subset\mathbb{H}\cap B(0,R)$.



沿如图所示围道进行积分，得

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_k).$$

其中

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \max_{\gamma_R}|f(z)|\pi R = \max_{\gamma_R}|zf(z)|\pi \to 0.$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_k).$$

□

推论 7.11. 若 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中 P,Q 是多项式且无公因子，Q 无实根，$\deg Q-\deg P\geqslant 2$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(\frac{P(x)}{Q(x)},a_k),$$

其中 a_k 是 $Q(z)$ 在 $\mathbb{H}$ 中的根.

例 7.12. 计算 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n+1}}$.

二：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x\mathrm{d}x, \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\sin\alpha x\mathrm{d}x$

引理 7.13. 若 $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$，$\alpha>0$，则 $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}\mathrm{d}z=0$.

证明. 令 $M_R=\max_{\gamma_R}|f(z)|\to 0$，则

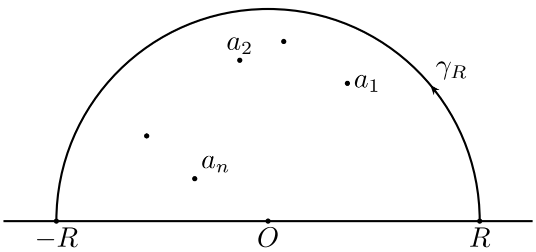
$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}\mathrm{d}z\right| \\
=&\left|\int_0^{\pi} f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha R(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta\right| \\
\leqslant& RM_R\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-\alpha R\sin\theta}\mathrm{d}\theta \\
=&2RM_R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\alpha R\sin\theta}\mathrm{d}\theta \\
\leqslant&2RM_R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\alpha R\frac{2}{\pi}\theta}\mathrm{d}\theta \\
=&2RM_R\frac{\pi}{2\alpha R}(1-\mathrm{e}^{-\alpha R}) \\
=&M_R\frac{\pi}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha R})\to 0.
\end{aligned}$$

□

定理 7.14. 设 $f(z)$ 在 $\mathbb{H}\setminus\{a_1,\cdots,a_n\}$ 全纯，在 $\overline{\mathbb{H}}\setminus\{a_1,\cdots,a_n\}$ 上连续，若 $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Res}(f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z},a_k),\quad \forall\ \alpha>0.$$

证明. 取 R 充分大使得 $\{a_1,\cdots,a_n\}\subset\mathbb{H}\cap B(0,R)$.



沿如图所示围道进行积分，得

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}x+\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^n \mathrm{Res}(f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z},a_k).$$

令 R 趋于 $+\infty$，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}f(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^n \mathrm{Res}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}f(z),a_k).$$

□

对上式取实部和虚部得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x\mathrm{d}x=2\pi\Re\left(\mathrm{i}\sum_{k=1}^n \mathrm{Res}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}f(z),a_k)\right),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin \alpha x \mathrm{d}x = 2\pi \Im\left(\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} f(z), a_k)\right).$$

例 7.15. 计算 $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{b^2+x^2}\mathrm{d}x$，其中 $a, b > 0$.

三：$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，且 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有奇点

例 7.16. 计算 $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$

例 7.17. 计算 $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\mathrm{d}x.$

四： $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\mathrm{d}\theta$

五：多值函数相关积分

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，假设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有奇点.

  例 7.18. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

  在 $z=0$ 是好的，但无穷远积分不趋于零. 转化一下，将困难转化到 $z=0$ 处.

  令 $F(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$，0 是一阶极点.

- $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\mathrm{d}\theta$

  令 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$\sin\theta = \frac{1}{2\pi}(z - \frac{1}{z})$，

- $I = \int_0^{\infty} \frac{0}{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)x^{\alpha}}(0 < \alpha < 1)$

  令 $F(z) = \frac{1}{(1+z)z^{\alpha}}$，支点 $0, \infty$.

- 下求 $Res(f, -1) = \frac{1}{2}\left((z+1)^3 F(z)\right)''\big|_{z=-1}$.

  令 $G(z) = \sqrt[3]{R(z)}$，其中 $R(z) = z^2(1-z)$.

  $G(-1) = |R|^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\operatorname{Arg} R(z)}\Big|_{z=-1}$

  其中 $\operatorname{Arg} R(z)\big|_{z=-1} = \operatorname{Arg} R(z)\big|_{z=\frac{1}{2}\text{上}} + \Delta_C(\operatorname{Arg}(R(z))) = \Delta_C \operatorname{Arg} R(z) = 2\Delta_C \operatorname{Arg} z + \Delta_C \operatorname{Arg}(z-1) = (2\pi + 0) = 2\pi$

  因此 $G(-1) = 2^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}$

  $(z^{\alpha})' = (\mathrm{e}^{\alpha \operatorname{Log} z})' = e^{\alpha \operatorname{Log} z}(\alpha \operatorname{Log} z)' = \frac{\alpha}{z}\mathrm{e}^{\alpha \operatorname{Log} z} = \frac{\alpha}{z}z^{\alpha}$

  因此导数的分支和原来函数的分支是有关系的!

  $G(z)' = (R(z)^{\frac{1}{3}})' = e^{\frac{1}{3}\operatorname{Log} R(z)} = \frac{1}{3}\frac{1}{R(z)}R'(z)\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\operatorname{Log} R(z)} = \frac{1}{3}R(z)^{-\frac{2}{3}}R'(z) = \frac{1}{3}G(z)^{-2}R'(z)$

  $G(z)'' = \frac{1}{3}(-2)G(z)^{-3}G'(z)R'(z) + \frac{1}{3}G(z)^{-2}R''(z)$

  $G(z)'' = -\frac{2}{9}G(z)^{-5}(R'(z))^2 + \frac{1}{3}G(z)^{-2}R''(z)$

  $R(z) = z^2(1-z)$，$R'(z) = 2z - 3z^2, R''(z) = 2 - 6z$，$G(-1) = 2^{\frac{1}{3}}e^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}$

7.5 周五

例 7.19. 计算 $I=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^3}\sqrt[3]{z^2(1-z)}$

例 7.20 (P229,16). 计算 $I=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{(1-x)^3}{x}}\mathrm{d}x$

解. 考虑 $F(z)=\frac{1}{1+z^2}\sqrt{\frac{(1-z)^3}{z}}$

$\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4\cup\gamma_5$

$\int_\gamma F(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}Res(F,-1)$

在 γ_3 上，$|\int_{\gamma_3}F(z)\mathrm{d}z|\leqslant c\varepsilon^{-\frac{1}{2}+1}=C\varepsilon\frac{1}{2}\to 0$

在 γ_4 上，$|\int_{\gamma_4}F(z)\mathrm{d}z|\leqslant C^{\frac{3}{2}+1}\to 0$

在 γ_1 上，$\int_{\gamma_1}F(z)\mathrm{d}z\to\int_0^1F(x)\mathrm{d}x$

求 $\int_{\gamma_2}F(z)\mathrm{d}z$，令 $R(z)=\frac{(1-z)^3}{z}$，求 $\sqrt{R(z)}\big|_{z=x\text{下}\in(0,1)}=|R(z)|^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{Arg}R(z)}\big|_{z=x\text{下}}$

$\operatorname{Arg}R(z)\big|_{z=x\text{下}}=\operatorname{Arg}R(z)\big|_{z=x\text{上}}+\Delta_C\operatorname{Arg}R(z)=0+3\Delta_C\operatorname{Arg}(z-1)-\Delta_C\operatorname{Arg}z=3(-2\pi)+0=-6\pi.$

代入得 $|R(x)|^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-3\pi\mathrm{i}}=-|R(x)|^{\frac{1}{2}}$.

$\int_{\gamma_2}F(z)\mathrm{d}z=\int_1^0-F(z)\mathrm{d}z=\int_0^1F(x)\mathrm{d}x$

求 $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}F(z)\mathrm{d}z$

$\int_{\gamma_R}F(z)\mathrm{d}z\sim\frac{1}{R^2}RR\sim C.$

$F(z)=\frac{1}{(1+z)^2}\sqrt{R(z)}$，$R(z)=\frac{(1-z)^3}{z}$，当 $z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，

$\operatorname{Arg}(R(z))\big|_{z=Re^{\mathrm{i}\theta}}=\operatorname{Arg}R(z)\big|_{z=\frac{1}{2}\text{上}}+\Delta_C\operatorname{Arg}R(z)=\Delta_C\operatorname{Arg}R(z)=3\Delta_C\operatorname{Arg}(z-1)-\Delta_C\operatorname{Arg}z$

用 θ 表示这些角度变化量，画图！

$=3\alpha(R)-\theta$，$\lim_{R\to\infty}=-(\pi-\theta).$

$=-3(\pi-\theta)-\theta=2\theta-3\pi.$

$F(z)\big|_{z=Re^{\mathrm{i}\theta}}=\frac{1}{(1+Re^{\mathrm{i}\theta})^2}|R(Re^{\mathrm{i}\theta})|^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}}(3\alpha(R)-\theta)$

$\int_{\gamma_R}F(z)\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{1}{(1+Re^{\mathrm{i}\theta})^2}R_{\text{略不严格}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\frac{3}{2}\pi)}R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$

$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{2\mathrm{i}\theta}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\frac{3}{2}\pi)}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\pi\mathrm{i}}\mathrm{d}\theta=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=-2\pi$

结果：$Res(F,-1)=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$

综上，$2\int_0^1F(x)\mathrm{d}x-2\pi=2\pi\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$

$\int_0^1F(x)\mathrm{d}x=\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

□

例 7.21. 求 $I=\int_0^\infty\frac{\log x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$

证明. 支点 0 和 ∞.

取积分 $F(z)=\dfrac{\operatorname{Log} z}{(1+z^2)^2}$

$\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_\varepsilon\cup\gamma_R$

$\displaystyle\int_\gamma F(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}(Res(F,i)+Res(F,-\mathrm{i}))$

$\displaystyle\int_{\gamma_1} F(z)\mathrm{d}z=\int_0^\infty\frac{\log x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$

$\displaystyle\int_{\gamma_2} F(z)\mathrm{d}z=\int_\infty^0\frac{\operatorname{Log} z\big|_{z=x下}}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=-\int_0^\infty\frac{\log x+2\pi\mathrm{i}}{(1+x^2)^2}$

要么换积分曲线，要么换被积函数

取积分 $F(z)=\dfrac{(\operatorname{Log} z)^2}{(1+z^2)^2}$

$\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_\varepsilon\cup\gamma_R$

$\displaystyle\int_\gamma F(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}(Res(F,i)+Res(F,-\mathrm{i}))$

$\displaystyle\int_{\gamma_1} F(z)\mathrm{d}z=\int_0^\infty\frac{\log x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$

$\displaystyle\int_{\gamma_2} F(z)\mathrm{d}z=\int_\infty^0\frac{\operatorname{Log} z\big|_{z=x下}}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=-\int_0^\infty\frac{\log x+2\pi\mathrm{i}}{(1+x^2)^2}$

还没改成平方，

然后取虚部

□

解 *2.* $F(z)=\dfrac{\operatorname{Log} z}{(1+z^2)^2}$，取去心半圆

在 γ_1 上，$\displaystyle\int_{\gamma_1}F(z)\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^0\frac{\operatorname{Log} z\big|_{z=x}}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^0\frac{\log|x|+\pi\mathrm{i}}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\int_\infty^0\frac{\log x+\pi\mathrm{i}}{(1+x^2)^2}(-\mathrm{d}x)=\int_0^\infty\frac{\log x+\pi\mathrm{i}}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$

$\displaystyle 2\int_0^\infty F(x)\mathrm{d}x+\pi\mathrm{i}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=2\pi\mathrm{i}Res(F,i)=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}\mathrm{i}$ □

例 7.22. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+x}\mathrm{d}x(0<a<1)$

证明. $F(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{az}}{1+\mathrm{e}^z}$，奇点 $z=\operatorname{Log}(-1)=\pi\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}=(2k+1)\pi\mathrm{i},k\in\mathbb{Z}$ □

Chapter 3

共形映射

引理 0.1. 设 $f\colon (\mathbb{C}, z = x + \mathrm{i}y) \to (\mathbb{C}, w = u + \mathrm{i}v)$ 是全纯函数，则

$$f^*\left(\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u + \mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}v\right) = \left|f'(z)\right|^2 \left(\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y\right).$$

证明. $f^*\mathrm{d}u = \dfrac{\partial u \circ f}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial u \circ f}{\partial y}\mathrm{d}y, f^*\mathrm{d}v = \dfrac{\partial v \circ f}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial v \circ f}{\partial y}\mathrm{d}y.$ □

Chapter 4

最大模原理和 Schwarz 引理

1 最大模原理

引理 1.1 (全纯函数的平均值公式). 设 $f(z)$ 在 $B(a,R)$ 中全纯，那么

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\ \mathrm{d}\theta,\quad \forall\ 0<r<R.$$

证明. 由 Cauchy 积分公式，

$$f(a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z \xlongequal{z=a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta.$$

□

定理 1.2 (最大模原理). 设 $f(z)$ 在区域 D 中全纯且不为常数，那么 $|f(z)|$ 在 D 中不能达到最大.

证明. 设 $M=\sup\limits_{z\in D}|f(z)|$. 若 $M=+\infty$，定理已经正确，因此不妨设 $M<+\infty$.

记 $D_1=\{z\in D\mid |f(z)|=M\}$.

- 设 $|f(z)|$ 在 D 中某点处达到最大，则 D_1 非空.
- 由连续性，

□

推论 1.3 (最小模原理)**.** 设 $f(z)$ 在区域 D 上全纯且不为常数，并且 $f(z)$ 在 D 中无零点，那么 $|f(z)|$ 在 D 中不能达到最小.

证明. 因为 $f(z)$ 在 D 中无零点，所以函数 $\dfrac{1}{f}$ 在 D 上是全纯的，对它应用最大模原理. □

推论 1.4. 设 D 是有界区域，$f(z)$ 在 D 上全纯，连续到边界，那么

$$|f(z)| \leqslant \max_{z\in\partial D}|f(z)|, \quad \forall z \in D,$$

等号成立当且仅当 f 在 D 中常值.

证明. • 先证若 $(*)$ 成立，则 $(**)$ 成立.

令 $F(z)=f(\frac{1}{z})$，$A_F(r)=\max\limits_{|z|=r}\operatorname{Re}F(z)$

$$A_F(r)=\max_{|z|=r}ReF(z)=\max_{|z|=r}\operatorname{Re}f(\frac{1}{z})=\max_{|w|=\frac{1}{r}}\operatorname{Re}f(w)=A_f(\frac{1}{r})$$

$$\lim_{r\to 0}\frac{\log A_f(r)}{\log\frac{1}{r}}=\lim_{r\to\infty}\frac{\log A_F(\frac{1}{r})}{\log\frac{1}{r}}=\lim_{R\to\infty}\frac{\log A_F(R)}{\log R}=\infty$$

- 只要对 $\mathbb{C}$ 上全纯函数证明 $(*)$ 即可. 若 f 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上全纯，则 f 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上有 Laurent 展开

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}a_nz^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

前者记为 $g(z)$，后者记为 $\varphi(z)$，当 $z\to\infty$ 时，$g(z)$ 是一个有界函数，就不需要考虑

由于 $\lim\limits_{z\to\infty}g(z)=0$，（令 $w=\frac{1}{z}$，$g(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{-n}w^n$，收敛半径为 $+\infty$，在 $w=0$ 处是可去奇点，$\lim\limits_{w\to 0}g(\frac{1}{w})=0$）

故当 $|z|$ 大时，$|g(z)|<\varepsilon$

$$A_f(r)=\max_{|z|=r}\operatorname{Re}(g+\varphi)\geqslant\max_{|z|=r}\operatorname{Re}\varphi-\varepsilon,\lim_{r\to 0}\frac{A(r)}{\log r}\geqslant\frac{\max_{|z|=r}\operatorname{Re}\varphi(z)}{\log r}-\varepsilon$$

- 下对 $\mathbb{C}$ 上全纯 $f(z)$，证 $(*)$.

为了取 log，还要说明下为什么充分大的时候 $A(r)>0$.

令 $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$，则 $M(r)$ 是递增函数. $\lim\limits_{r\to\infty}M(r)=+\infty$. 否则有界全纯是常数. 所以 $A(r)\geqslant\frac{R-r}{2r}\left(M(r)-\frac{R+r}{R-r}|f(0)|\right)>0$（当 $R>r$ 充分大），故存在 $N>0$，对任意 $r>N$，$A(r)>0$.

令 $M_n(r)=\max\limits_{|z|=r}|f^{(n)}(z)|$，由于 ∞ 是 f 的本性奇点，则 ∞ 是 $f^{(n)}$ 的本性奇点. 当 $r\to\infty$ 时，$\lim\limits_{r\to\infty}M_n(r)=+\infty$. 下证存在常数 $c(n)$ 使得 $M_n\left(\frac{R}{2}\right)\leqslant\frac{c(n)}{R^n}(A(R)+|f(0)|)$

假设 z 满足 $|z|=\frac{R}{2}$，

$$f^{(n)}=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c_\delta}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\mathrm{d}w,c_\delta:|w-z|=\frac{R}{2}-\delta$$

$$|f^{(n)}(z)|\leqslant\frac{n!}{2\pi}\frac{2\pi(\frac{R}{2}-\delta)}{(\frac{R}{2}-\delta)^{n+1}}M(R-\delta)=C(n)\frac{1}{(\frac{R}{2}-\delta)^n}M(R-\delta)\leqslant\frac{c(n)}{(\frac{R}{2}-\delta)^n}\left[\frac{2(R-\delta)}{\delta}A(R)+\frac{2R-\delta}{\delta}|f(0)|\right]$$

令 $\delta=\frac{1}{4}R$，得到

$$|f^{(n)}|\leqslant\frac{c(n)}{R^n}\left[A(R)+|f(0)|\right]$$

$$A(R)\geqslant\frac{R^n}{c(n)}\left(M_n(\frac{R}{2})-|f(0)|\right)$$

$$\frac{\log A(r)}{\log R} \geqslant \frac{\log R^n - \log c(n)}{\log R} + \frac{\log(M_n \frac{R}{2} - |f(0)|)}{\log R} = n - \frac{\log c(n)}{\log R}$$

令 $n \to \infty$，$\lim\limits_{R\to\infty} \dfrac{\log A(R)}{\log R} = +\infty$

回顾证明过程，$A(r)$ 的增长速度可以控制 $M(r)$ 的增长速度，所以估计 $M(r)$.

最最关键的是对 $M_n(\dfrac{R}{2})$ 的估计.

- 另证：

  只要证任意 $n > 0$，存在 r_n，任意 $r \geqslant r_n$，我们有 $M(r) \geqslant r^n$.

  证明. 令 $g(z) = \dfrac{f(z)}{z^n}$，仍然假设 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数.

  则 g 在 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 上全纯，∞ 是本性奇点.

  取定 $\varepsilon > 0$，令 $M = \max\limits_{|z|=\varepsilon} |g(z)|$，由于 ∞ 是本性奇点，所以 $\lim\limits_{z\to\infty} g(z) = \infty$，存在 $r_n > 0$，使得 $\max\limits_{|z|=r_n} |g(z)| \geqslant M + 1$

  对于任意 $r > r_n$，在圆环 $\{\varepsilon < |z| < r_n\}$ 上，$|g(z)|$ 的最大值只能在 $|z| = r$ 上达到.

$$\max_{|z|=r} \frac{|z|}{r^n} = \max_{|z|=r} |g(z)| \geqslant \max_{|z|=r_n} |g(z)| \geqslant M + 1$$

  故 $M(r) \geqslant (M+1)r^n \geqslant r^n$.

$$\frac{\log M(r)}{\log r} \geqslant n, \forall r \geqslant r_n$$

  取极限即得. □

□

定义 1.5. (1) 若 $f: U \to V$ 全纯，双射，则称 f 是共形映射，此时，U 与 V 称为共形等价，或双全纯等价.

(2) 区域 $\Omega \to \Omega$ 的共形映射，称为 Ω 的自同构，自同构集合记为 $\mathrm{Aut}(\Omega)$.

定理 1.6. (1) $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \left\{az + b \middle| a \neq 0\right\}$

(2) $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) = \{$分式线性变换$\}$

证明. 若 f 是 $\mathbb{C}$ 上的自同构，则 f 是整函数，

若 ∞ 可去，则 f 为常数

若 ∞ 是极点，则 f 为多项式，因为是单射，则必须是一次多项式.

若 ∞ 是本性奇点，则存在 $z_n \to \infty, f(z_n) \to A \in \mathbb{C}$，$z_n = f^{-1}(f(z_n)) \to f^{-1}(A)$

设 $f \in \mathrm{Aut}(\overline{(\mathbb{C})})$，若 $f(\infty) = \infty$，则 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$，则 f 为一次多项式，则 f 为分式线性映射.

若 $f(\infty) = a \in \mathbb{C}$，作 $\varphi(z) = \dfrac{1}{z-a}$，则 $\varphi \circ f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$，任然是自同构，因此它是一次多项式，所以 f 是分式线性映射.

□

定理 1.7. $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})=\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right\}$

设 f 在 $z=0$ 极点或全纯，

$$f(z)=a_m z^m+\cdots$$

1.1 调和函数的极值原理

2 Schwarz 引理

2.1 Schwarz 引理

定理 2.1 (Schwarz)**.** 设 $f(z):\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 全纯且 $f(0)=0$，则

(1) $|f(z)|\leqslant|z|$，$\forall z\in\mathbb{D}$；$|f'(0)|\leqslant 1$；

(2) 下列三条等价

- 存在 $z_0\neq 0$ 使得第一个等号成立；
- 第二个等号成立；
- $f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$，其中 $\theta\in\mathbb{R}$.

证明.

(1) f 在 $\mathbb{D}$ 上可展开为幂级数

$$f(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots,\quad z\in\mathbb{D}.$$

令

$$\varphi(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)}{z}, & 0<|z|<1\\ a_1, & z=0\end{cases},$$

则 $\varphi(z)=a_1+a_2z+\cdots$ 在 $\mathbb{D}$ 内全纯.

欲用最大模原理，但 φ 在边界 $\partial\mathbb{D}$ 上没有定义，亦不知 φ 能否连续开拓到边界.

假如 φ 能连续开拓到边界，则有

$$|\varphi(z)|\leqslant 1,\quad z\in\partial\mathbb{D},$$

那么由最大模原理，

$$|\varphi(z)|\leqslant 1,\quad z\in\overline{\mathbb{D}},$$

特别地，

$$|f(z)|\leqslant|z|,\quad z\in\mathbb{D}.$$

但不能连续开拓到边界也无妨，我们只需要将我们用最大模原理的范围稍微缩小一点.

在 $\partial B(0,r)$ 上，

$$|\varphi(z)|\leqslant\frac{1}{r},\quad z\in\partial B(0,r),$$

其中 $r<1$. 那么由最大模原理，

$$|\varphi(z)|\leqslant\frac{1}{r},\quad z\in\overline{B(0,r)}.$$

对任意 $z\in\mathbb{D}$，$|\varphi(z)|\leqslant\dfrac{1}{r}$，其中 $|z|\leqslant r<1$. 令 $r\to 1$，即得 $|\varphi(z)|\leqslant 1$.

故任意 $z\in\mathbb{D}$，$|f(z)|\leqslant|z|$，且 $|\varphi(0)|=|f'(0)|\leqslant 1$.

(2) 若存在 $0 \neq z_0 \in \mathbb{D}$，使 $|\varphi(z_0)| = 1$，或 $|f'(0)| = 1$，即 $|\varphi(0)| = 1$，则 $|\varphi|$ 在内部达到最大值，由最大模原理，φ 在 $\mathbb{D}$ 中是常数，则存在 $\theta \in \mathbb{R}$ 使得 $\varphi(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，即 $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$.

□

例 2.2. 设 $f(z) : D \to D$ 全纯，共形变换，使得将单位圆周映到单位圆周，将某一 z_0 点映到 0 点.$\varphi(z_0) = \dfrac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$，另一侧，将 $f(z_0)$ 映到 0. 复合起来便得到一个将圆盘映到圆盘，0 映到 0 的全纯映射，由 *Schwarz* 引理，$|\tilde{f}(w)| \leqslant |w|$，整理一下得到关于 z 的不等式.

2.2 Aut($\mathbb{D}$)

对于一般的域，要确定它的全纯自同构群是很困难的. 但对于单位开圆盘 $\mathbb{D}$，应用 Schwarz 引理不难确定其上的全纯自同构群.

3 Schwarz 引理的应用

定义 3.1. (1) 若 $f: U \to V$ 是全纯双射，则称 f 为共形映射. 此时称 U 与 V 共形等价.

(2) 区域 $\Omega \to \Omega$ 的共形映射，称为 Ω 的全纯自同构，$\mathrm{Aut}(\Omega)$ 表示所有 Ω 的自同构集合.

注记. 由反函数定理知，若 $f: U \to V$ 是全纯双射，则 f^{-1} 也全纯.

此处应类比连续函数，若 f 是连续双射，不能得到 f 是同胚，即不能得到 f^{-1} 也连续.

定理 3.2.

(1) $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \left\{az + b \middle| a \neq 0\right\}$.

(2) $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) = \{$分式线性变换$\}$.

Chapter 5

全纯开拓

我们不加区别地混用“全纯开拓”与“解析延拓”二词.

1 Schwarz 对称原理

定义 1.1. 设 f 在 D 上全纯，存在 G，使得 $D \not\subseteq G$，及 G 上的全纯函数 F，使得 $F\big|_D = f$，则称 F 为 f 在 G 上的全纯开拓.

注记. 在实际语境中“全纯开拓”并不一定严格满足上述定义，如在下面的 *Schwarz* 对称原理中，f 的基础信息定义在 $D \cap \{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ 上，该集合不是开集.

例 1.2. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$，$D = \{|z| < 1\}$，$F(z) = \dfrac{1}{1-z}$，$G = \mathbb{C} \backslash \{1\}$，则由于 $D \not\subseteq G$，$F(z)\big|_D = f(z)$，故 $F(z)$ 为 $f(z)$ 在 G 上的全纯开拓.

定理 1.3 (Painlevé 原理)**.** 若 f 在 D 上连续，在 $D\backslash\gamma$ 上全纯，则 f 在 D 上全纯.

证明. Morera. □

推论 1.4. 设 f_i 在 D_i 上全纯，在 $D_i \cup \gamma$ 上连续，$i = 1, 2$. 若限制在 γ 上有 $f_1 \equiv f_2$,，则

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & \forall z \in D_1 \cup \gamma \\ f_2(z), & \forall z \in D_2 \end{cases}$$

是 $D_1 \cup \gamma \cup D_2$ 上的全纯函数.

注记. 这个推论给我的感觉不太舒服，因为没说清楚 D_1, γ, D_2 是不是无交的.

定理 1.5 (Schwarz 对称原理)**.** 设 D 关于实轴对称，f 定义在 $D \cap \{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ 上. 若

(1) f 在 $D \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$ 上全纯.

(2) f 在 $D \cap \{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ 上连续.

(3) f 在 $D \cap \{\operatorname{Im} z = 0\}$ 上取实值.

则 $F(z) = \begin{cases} f(z), & \forall z \in D \cap \{\operatorname{Im} z \geqslant 0\} \\ \overline{f(\bar{z})}, & \forall z \in D \cap \{\operatorname{Im} z < 0\} \end{cases}$ 是 $f(z)$ 在 D 上的全纯开拓.

证明.

(1) $F(z)$ 在 $D\cap\{\operatorname{Im} z<0\}$ 上全纯.

任取 $z\in D\cap\{\operatorname{Im} z<0\}$，记 $w=\bar z\in D\cap\{\operatorname{Im} z>0\}$，则

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}F(z)=\frac{\partial}{\partial\bar z}\overline{f(\bar z)}=\overline{\frac{\partial}{\partial z}f(\bar z)}=\overline{\frac{\partial}{\partial\bar w}f(w)}=0.$$

(2) $F(z)$ 在 D 上连续，即证 $F(z)$ 在 $D\cap\{\operatorname{Im} z=0\}$ 连续.

取 $x_0\in D\cap\{\operatorname{Im} z=0\}$，设 $z\in D\cap\{\operatorname{Im} z<0\}$，$w=\bar z$，

$$\lim_{z\to x_0}F(z)=\lim_{z\to x_0}\overline{f(\bar z)}=\lim_{w\to x_0}\overline{f(w)}=\overline{f(x_0)}=f(x_0)=F(x_0).$$

故 F 在 x_0 点连续.

□

注记. 由 D 是连通开集，$D\cap\mathbb{R}$ 是开区间！

注记. 一般地，如果 f 将直线映为直线，便可以对称.

定理 1.6. 设 D 关于圆周 $\partial B(z_0,r)$ 对称，f 定义在 $D\cap\overline{B(z_0,r)}$ 上. 若

(1) f 在 $D\cap B(z_0,r)$ 上全纯.

(2) f 在 $D\cap\overline{B(z_0,r)}$ 上连续.

(3) $f(D\cap\partial B(z_0,r))\subset\partial B(w_0,\rho)$.

(4) $w_0\notin f(D\cap B(z_0,r))$.

则 $F(z)=\begin{cases} f(z), & \forall z\in D\cap\partial\overline{B(z_0,r)} \\ f(z^*)^*, & \forall z\in D\backslash\overline{B(z_0,r)}\end{cases}$ 是 $f(z)$ 在 D 上的全纯开拓.

证明. 设 $z\in\Omega'$，则 $z^*\in\Omega$，定义 $F(z)=(f(z^*))^*$. 验证 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的全纯开拓.

$$F(z)=b+\frac{R^2}{\overline{f(z^*)}-\bar b}=b+\frac{R^2}{\overline{f\left(a+\dfrac{r^2}{\bar z-\bar a}\right)}-\bar z},z\in\Omega'$$

下证

(1) $F(z)$ 在 S 附近连续.

若 $z'\in\Omega'$，$z_0\in S$，且 $z'\to z_0$，$(z')^*=a+\dfrac{r^2}{\bar z-\bar z}\to a+\dfrac{r^2}{\bar z_0-\bar a}=z_0$，从而 $(z')^*\to z_0$，

$$\lim_{z'\to z_0}F(z')=\lim_{z'\to z_0}(f(z'^*))^*=f(z_0)^*=f(z_0)=F(z_0)$$

(2) $F(z)$ 在 Ω' 中全纯.

若 $z\in\Omega'$，

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}F(z)=R^2\frac{\partial}{\partial\bar z}\left(\frac{1}{\overline{f(z^*)}-\bar b}\right)=R^2\left(-\frac{1}{(\bar f-\bar b)^2}\frac{\partial}{\partial\bar z}\overline{f(z^*)}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}f(z^*)=f'(z^*)\frac{\partial}{\partial z}z^*=f'(z^*)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{r^2}{\bar z-\bar a}\right)=0.$$

□

总结：

(1) 直线映到直线.

(2) 圆映到圆.

(3) 直线映到圆.

(4) 圆周映到直线.

例 1.7. 设 f 在角状区域全纯，在 S 上取值为零，求证 $f \equiv 0$.

证明. 开拓后用零点的孤立性. □

2 幂级数的全纯开拓

设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$，收敛半径为 $R>0$，则 f 在 $B(0,R)$ 上全纯.

定义 2.1. 设 $z_0\in\partial B(0,R)$，

(1) 若存在 z_0 的邻域 $B(z_0,\delta)$ 及其上的全纯函数 $g(z)$，使得 g 是 $(f,B(0,R))$ 在 $B(z_0,\delta)$ 上的直接解析延拓，则称 z_0 为正则点.

(2) 否则，称 z_0 为奇异点.

定理 2.2. 幂级数的收敛圆周上必有奇异点.

2.1 奇异点的判别法

$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n$ 在 $z_0\in\partial B(0,R)$ 处收敛发散与正则奇异之间无必然关系.
一般来说，

$$\lim_{z\to z_0}\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n\neq\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{z\to z_0}c_nz^n=\sum_{n=1}^{\infty}c_nz_0^n.$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n$ 在 z_0 处发散，说的是上式右侧的极限不存在，但这并不妨碍左侧的极限，甚至该点处的全纯开拓的存在，比如 $\sum_{n=1}^{\infty}z^n$ 在 $z=-1$ 处发散，但 $z=-1$ 是正则点.

若上式右侧的极限存在，也就是级数在 $\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n$ 在 z_0 处收敛，Abel 第二定理告诉我们，上式左侧的极限也存在并且二者相等. 但这并不能保证该点处全纯开拓的存在（即使此时确实可以连续延拓到该边界点），比如 $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{z^n}{n(n-1)}$ 在 $z=1$ 处收敛，但 $z=1$ 是奇异点.

但聊以自慰的是，上式左侧极限的存在是该点处可以全纯开拓的必要条件.

(1) 若 $\lim_{z\to z_0}f(z)$ 不存在，则 z_0 是奇异点.

- 特别地，若 $\lim_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty$，则 z_0 是奇异点.
- 再特别地，若 $f(z)$ 的幂级数展开 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的各项系数均非负，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n=+\infty\Longleftrightarrow\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=+\infty.$$

(2) 将 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 z_0' 处展开，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0')}{n!}(z-z_0')^n,$$

则收敛半径 $\rho\geqslant R-|z_0'|$.

- 若 $\rho > R - |z_0'|$，则 $f(z)$ 在 z_0 处可全纯开拓.
- 若 $\rho = R - |z_0'|$，则 z_0 是 $f(z)$ 的奇异点.

  反证，若 z_0 是 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的正则点，则存在 $B(z_0, \delta)$ 及其上的全纯函数 g，使得

$$(f(z), B(0,R)) \sim (g(z), B(z_0, \delta))$$

(3) $f(z)$ 与 $f'(z)$ 在收敛圆周上有相同的正则点和奇异点.

(4) $f(z)$ 在收敛圆周上收敛发散与正则奇异没有必然关系.

- $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$，在 $z=-1$ 点发散. 在 $z=-1$ 点正则. 因为有一个全纯开拓 $\frac{1}{1-z}$.
- $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$ 在 $z=1$ 点发散，也奇异.
- $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ 在 $z=1$ 收敛，在 $z=1$ 正则.
- $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n(n-1)}$ 处处收敛，但奇异.
  - 也可以求一下导数 $f'(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n-1}$.

2.2 例题

例 2.3. 证明：$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$ 在 $|z|=1$ 上每一点都是奇异点.

证明.

(1) $z=1$ 是奇异点. 为证此，要找一列点 $x_m \to 1$ 使得 $\lim_{m\to\infty} f(x_m) = \infty$.

对任意的 $M \in \mathbb{N}$，存在 $N \in \mathbb{N}$，只要 $n > N$，便有 $\left. \sum_{k=1}^{n} z^{2^k} \right|_{z=1} > 2M$.

由于 $\sum_{k=1}^{n} z^{2^k}$ 是连续函数，所以存在 x_m，使得 $\left. \sum_{n=1}^{N} z^{2^n} \right|_{z=x_m} > M$.

(2) $f(z) = z^2 + f(z^2)$，因此 $z^2 = 1$ 的根都是奇异点.

(3) $z^{2^n} = 1$ 的根都是奇异点.

(4) 故 f 的奇异点集合在 $|z|=1$ 稠密.

□

例 2.4. 设 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n z^n$ 的收敛半径为 R，其中 $0<R<+\infty$，若对任意 n 都有 $a_n\geqslant 0$，证明 $z=R$ 是奇异点.

证明.

(1) 设 $z=R$ 不是奇异点，则 f 在 $\dfrac{R}{2}$ 处展开的收敛半径 $\rho>\dfrac{R}{2}$，即若

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(\frac{R}{2}\right)}{n!}\left(z-\frac{R}{2}\right)^n,$$

则

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left|f^{(n)}\left(\frac{R}{2}\right)\right|}{n!}}=\frac{1}{\rho}<\frac{2}{R}.$$

其中

$$f^{(n)}\left(\frac{R}{2}\right)=\sum_{m\geqslant n}a_m m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)\left(\frac{R}{2}\right)^{m-n}\geqslant 0.$$

(2)

$$\left|f^{(n)}\left(\frac{R}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|=\left|\sum_{m\geqslant n}m(m-1)\cdots(m-n+1)a_m\left(\frac{R}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^{m-1}\right|\leqslant f^{(n)}\left(\frac{R}{2}\right).$$

故 f 在 $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}R$ 处的展开

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(\frac{R}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{n!}\left(z-\frac{R}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n$$

的收敛半径

$$\rho'=\left(\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left|f^{(n)}\left(\frac{R}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|}{n!}}\right)^{-1}\geqslant\left(\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left|f^{(n)}\left(\frac{R}{2}\right)\right|}{n!}}\right)^{-1}$$

□

例 2.5. 设 $f(z)$ 在 $\Omega\setminus\{z_0\}$ 全纯，其中 $\Omega\supset\{|z|\leqslant 1\}$，$|z_0|=1$. 设 z_0 是 f 的 m 阶极点. 求证，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 是 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 中的展式，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=z_0$.

证明.

(1) z_0 是 f 的 m 阶极点. 那么 $(z-z_0)^m f(z)$ 在 Ω 上全纯，记为 $g(z)$.

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m},\forall z\in\Omega$$

将 $g(z)$ 在 z_0 处展开成幂级数.$f(z)=\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{A_k}{(z-z_0)^k}+h(z)$.

- 用 Laurent 展开只能说明在一个小邻域成立，但用上面的论证则可以说明在 Ω 上是对的. 其实也可以把主要部分减掉.

$h(z)$ 在 Ω 上全纯，设 $h(z)$ 在 $z=0$ 处的展式为

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,\quad \forall\ |z|<1.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz=\sum_{k=1}^{m}\frac{A_k}{(z-z_0)^k}+\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,\forall z\in D$$

(2) 将 $\dfrac{1}{(z-z_0)^k}$ 在 $z=0$ 处展开，已知有

$$\frac{1}{z-z_0}=-\frac{1}{z_0}\frac{1}{1-\dfrac{z}{z_0}}=-\frac{1}{z_0}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_0}\right)^l.$$

对上式两侧求 $k-1$ 次导数，得

$$(-1)(-2)\cdots(-k+1)\frac{1}{(z-z_0)^k}=-\frac{1}{z_0}\sum_{l=k-1}^{\infty}\frac{l}{z_0}\frac{l-1}{z_0}\cdots\frac{l-(k-2)}{z_0}\left(\frac{z}{z_0}\right)^{l-(k-1)}.$$

记 z^n 的系数为 c_{kn}，令 $l-(k-1)=n$，则 $l=n+k-1$，

$$\begin{aligned}c_{kn}&=\frac{1}{(-1)(-2)\cdots(-k+1)}\left(-\frac{1}{z_0}\right)(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+k-1-k+2)\frac{1}{z_0^{n+k-1}}\\&=\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{z_0^{n+k}}.\end{aligned}$$

(3) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{m}A_kc_{kn}+b_n$.

$\square$

3 全纯函数连续延拓到边界

我自己有点好奇这个问题,可以参见 https://math.stackexchange.com/questions/58723/continuous-extension-of-a-bounded-holomorphic-function-on-the-unit-disk

Chapter 6

黎曼映照定理

1　共形映射

2 正规族

定理 2.1 (Arzela-Ascoli)**.** 设 $K \subset \mathbb{C}$ 是紧集，若连续函数列 $\{f_n\}$ 等度连续且在 K 上一致有界，则存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 一致收敛到连续函数 $f(z)$.

定理 2.2 (Montel 定理)**.** 设 $\{f_n\}$ 是域 D 上的全纯函数列，且 $\{f_n\}$ 在 $\mathbb{D}$ 中内闭一致有界，则存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 在 D 中内闭一致收敛.

证明.

(1) 断言，在上述条件下，$\{f_n\}$ 在 D 中等度连续.

任取 $z_0 \in D$，取 r 使得 $B(z_0, r) \subset D$，任取 $z \in B(z_0, r)$，则

$$\begin{aligned}
|f_n(z) - f_n(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-z_0|=r} f_n(w) \left(\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-z_0} \right) \mathrm{d}w \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-z_0|=r} \frac{(z-z_0) f_n(w)}{(w-z)(w-z_0)} \mathrm{d}w \right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} 2\pi r |z-z_0| M \frac{1}{r^2} = \frac{M}{r} |z-z_0|
\end{aligned}$$

(2) 对任意紧集 $K \subset D$，由条件知 $\{f_n\}$ 在 K 上一致有界，由 (1) 知 $\{f_n\}$ 等度连续.

由 Arzela-Ascoli 定理知，存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 在 K 上一致收敛.

(3) 存在一列紧集 $\{K_s\}_{s=1}^{\infty}$，使得 $K_s \subset K_{s+1}$ 且 $D = \bigcup_{s=1}^{\infty} K_s$. 任意固定 $z_0 \in D$，则

$$K_s = \left\{ z \in D \middle| d(z, \partial D) \geqslant \frac{1}{s} \right\} \cap \overline{B(z_0, s)}$$

符合要求.

(4) 应用康托对角线论证.

□

3 黎曼映照定理

本节我们讨论复平面中单连通区域在双全纯同构下的分类.

定理 3.1 (Riemann 映照定理)**.** 设 Ω 为 $\mathbb{C}$ 中的单连通区域. 如果 $\Omega \neq \mathbb{C}$，则 Ω 双全纯同构于单位圆盘 $\mathbb{D}$. 事实上，任给 $z_0 \in \Omega$，存在唯一的双全纯同构 $F : \Omega \to \mathbb{D}$，使得 $F(z_0) = 0$，$F'(z_0) > 0$.

首先我们可以把任何不是 $\mathbb{C}$ 的单连通区域双全纯地变为一个有界域.

引理 3.2. 设 Ω 为 $\mathbb{C}$ 中的单连通区域，且 $\Omega \neq \mathbb{C}$，则存在单的全纯映照 $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$.

证明.

- 如果存在 $z_0 \in \Omega^c$ 及 $r_0 > 0$，使得 $B(z_0, r_0) \subset \Omega^c$，令 $\varphi = \dfrac{r_0}{z - z_0}$ 即可.
- 不符合的例子：挖掉连接原点和无穷远点的任意一条简单曲线后的复平面.
- 一般地，由于 $\Omega \neq \mathbb{C}$，不妨设 $0 \neq \Omega$.

□

(1) 考虑 $\mathcal{F} = \left\{\text{全纯} f : \Omega \to \mathbb{D} \middle| f(z_0) = 0, f \text{单叶}\right\}$，$\mathcal{F}$ 非空（非平凡）、一致有界.

(2) 存在 $\mathcal{F}$ 中元素 $\tilde{f}$，使 $|f'(z_0)|$ 达到最大. 则 $\tilde{f}$ 是 Ω 到 D 的全纯同构.

证明.

(1) 要证：设 $\Omega \not\subseteq \mathbb{C}$，单连通，$z_0 \in \Omega$，存在 $G \subset \mathbb{D}$，$0 \in G$，使 G 与 Ω 全纯同构

(2) 只要考虑 $\Omega \subset \mathbb{D}, 0 \in \Omega$，定义 $\mathcal{F} = \left\{\text{全纯单叶 f} : \Omega \to D \middle| f(0) = 0\right\}$，$\mathcal{F} \neq \varnothing$，$\mathcal{F}$ 一致有界.

- 任意 $f \in \mathcal{F}$，$|f'(0)|$ 有一致上界.
  由于 $0 \in \Omega$，存在 $\delta > 0$ 使得 $B(0, \delta) \subset \Omega$，
  $f(B(0, \delta)) \subset \mathbb{D}$，由 Cauchy 不等式，$|f'(0)| < \dfrac{1}{\delta}$，$\forall f \in \Omega$.
- 设 $\lambda = \sup\limits_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)|$，则存在 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n'(0)| = \lambda < +\infty$，由 Motel 定理，$\{f_n\}$ 有子列在 $\mathbb{D}$ 中内闭一致收敛到 f_∞，f_∞ 全纯，下证 $f_\infty \in \mathcal{F}$.
  - f_∞ 不是常数.
  - $|f_\infty(z)| < 1$. 如果存在 $z_1 \in \Omega$，$|f_\infty(z)| = 1$，由最大模原理，它是常数.
  - f_∞ 是单射，Hurwitz 定理.

  故 $f_\infty \in \mathcal{F}$.
- $f_\infty(\Omega) = D$.
  若 $f_\infty(\Omega) \subsetneq D$，构造 $F \in \mathcal{F}$，使得 $|F'(0)| > |f_\infty'(0)|$.
  若 $f_\infty(\Omega) \subsetneq D$，存在 $\alpha \in D$，使得 $\alpha \neq f_\infty(\Omega)$，定义 $\psi_\alpha = \dfrac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} z}$，$\mathbb{D} \to \mathbb{D}.\alpha \mapsto 0$，$\psi_\alpha \circ f_\infty : \Omega \to \psi_\alpha \circ f_\infty(\Omega)$ 是全纯同构，且满足

  (*a*) $\psi_\alpha \circ f_\infty(\Omega)$ 单连通.

  (*b*) $\psi_\alpha \circ f_\infty(G)$ 不包含 0.

定义 $R(z)=\sqrt{\psi_\alpha\circ f_\infty(z)},\forall z\in\Omega.R(z)$ 在 Ω 上有单值分支，且 Ω 上全纯单叶函数.

单叶 $R(z_1)=R(z_2)$，$\psi_\alpha\circ\infty(z_1)=\psi_\alpha\circ\infty(z_2)$，$f_\infty(z_1)=f_\infty(z_2)$，$z_1=z_2$.

$\Omega\xrightarrow{\Omega}\mathbb{D}\xrightarrow{\psi_\beta},0\mapsto\beta:=\sqrt{\alpha}\mapsto 0.$

定义 $F(z)=\psi_\beta\circ R(z)$，$\mathbb{D}\to\mathbb{D}$，$0\mapsto 0$. 全纯，单叶，

下证 $|F'(0)|>|f'_\infty(0)|$.

定义 $S(w)=\sqrt{w}$，$F(z)=\psi_\beta\circ S\circ\psi_\alpha\circ f_\infty(z)$.

$f_\infty(z)=\psi_\alpha^{-1}\circ S^{-1}\circ\psi_\beta^{-1}\circ F(z)=:T\circ F(z)$.

$T:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 全纯.S^{-1} 在 $\mathbb{D}$ 不单叶.$T(0)=0$，

由 Shcwarz 引理，$|T'(0)|\leqslant 1$，由 T 不单叶，故 T 不是旋转，故 $|T'(0)|<1$

$f_\infty(z)=T\circ F(z)$，$|f'_\infty(0)|=|T'(0)F'(0)|<|F'(0)$，与 λ 定义矛盾.

(3) 设 $\Omega'\subsetneq$

□

注记. *若 U 是单连通区域，f 全纯，则 $f(U)$ 不一定单连通.*

$H=\{\operatorname{Im}z>0\}$，$f(z)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}$，$f(z)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}=\mathrm{e}^{2\pi y}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}$，

4 边界对应

定理 4.1. 设 $F : \mathbb{D} \to P$，其中 P 为闭多边形的内部，是一个共形映射，则

(1) F 可连续延拓到边界，成为 $\overline{\mathbb{D}} \to \overline{P}$ 的双射.

(2) 若

Chapter 7

整函数

1 Poisson-Jensen 公式

定理 1.1 (Jensen 公式). 设

(1) $\Omega \supset \overline{B(0,R)}$，$f$ 在 Ω 全纯，$f(0) \neq 0$，f 在 $\{|z| = R\}$ 上无零点；

(2) f 在 $B(0,R)$ 内有零点 $z_1, z_2, \cdots z_N$，计入重数.

则

$$\log|f(0)| = \sum_{k=1}^{N} \log \frac{|z_k|}{R} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| \mathrm{d}\theta.$$

证一.

(1) 观察到若定理对 f_1, f_2 成立，则对 $f_1 f_2$ 也成立.

(2) 令 $g(z) = \dfrac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_N)}$，则 g 在 $\overline{B(0,R)}$ 上无零点，全纯.
由 (1) 只需要对 $g(z)$ 和 $z - z_i$ 证明结论成立即可.

(3) 故 $\log||$

(4) 固定 $|w| < R$，考虑 $h(z) = z - w$，只要证

$$\log|w| = \log \frac{|w|}{R} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - w| \mathrm{d}\theta$$

$$\iff \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(\log|R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - w| - \log R\big) \,\mathrm{d}\theta = 0$$

$$\iff \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \frac{w}{R}| \mathrm{d}\theta = 0$$

令 $a = \dfrac{w}{R}$，则即证对于 $|a| < 1$，有

$$\int_0^{2\pi} \log|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - a| \mathrm{d}\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi}\log|1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}|\mathrm{d}\theta=0$$

$$\theta=-\theta,\int_0^{-2\pi}\log|1-a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\mathrm{d}\theta$$

$$\theta\to\theta+2\pi,\int_0^{2\pi}\log|1-a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\mathrm{d}\theta=0$$

令 $F(z)=1-az$，它是全纯函数，且在 $\overline{B(0,1)}$ 上无零点. 用上一条，

$$\log|F(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|F(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\mathrm{d}\theta$$

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|1-a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\mathrm{d}\theta$$

□

证二. 设 $a\in\mathbb{D}$，定义 $\varphi_a(z)=\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$

令 $g(z)=\dfrac{f(z)}{\prod_{j=1}^{N}\varphi_{\frac{z_j}{R}}\left(\frac{z}{R}\right)}$，则 $g(z)$ 在 $\overline{B(0,R)}$ 上没有零点，且在 Ω' 上是全纯函数，代入

$$\log|g(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|$$

$$\log\frac{|f(0)|}{\prod_{j=1}^{N}|\frac{z_j}{R}|}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|}{\prod_{j=1}^{N}|\varphi_{\frac{z_j}{R}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|}\mathrm{d}\theta$$

$$\log|f(0)|=\sum_{j=1}^{N}\log|\frac{z_j}{R}|+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\mathrm{d}\theta$$

□

注记.

(1) $f(0)=0$ 不本质，可除掉 z^m.

(2) 若 $|a|=1$，设 $a=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$，则

$$\int_0^{2\pi}\log|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\theta)}|\mathrm{d}\theta=0$$

$$\int_0^{2\pi}\log|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\mathrm{d}\theta=0$$

令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}z\mathrm{d}\theta$.

$$\operatorname{Re}\int_{|z|=1}\log(1-z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=0$$

当 $\operatorname{Re}z<1$ 时，$\log(1-z)$ 有全纯单值分支，γ_ε，γ_1，令 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_\varepsilon$

$$\int_\gamma\frac{\log(1-z)}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z=0.$$

$$\lim_{\varepsilon\to -}\int_{\gamma_1}\frac{\log(1-z)}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z=-\lim_{\varepsilon}$$

令 $\gamma_\varepsilon : z=1+\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$\theta:\dfrac{3}{2}\pi\to\dfrac{\pi}{2}$

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{\log(1-z)}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z\right|\leqslant\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\log(-\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{\mathrm{i}(1+\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\varepsilon\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta\right|\leqslant C\varepsilon(|\log\varepsilon|+C)\to 0$$

因此 f 在 $\{|z|=R\}$ 无零点这个条件也可以去掉.

定义 1.2. $\mathfrak{n}(r)$：全纯函数 $f(z)$ 在 $B(0,r)$ 中的零点个数，计入重数.

引理 1.3.

$$\int_0^R\mathfrak{n}(r)\frac{\mathrm{d}r}{r}=\sum_{k=1}^N\log\frac{R}{|z_k|}.$$

证明. 只需注意到 $n(r)$ 是关于 r 的阶梯函数. 定义

$$\eta_k(r)=\begin{cases}1 & r>|z_k|,\\ 0 & r\leqslant|z_k|.\end{cases}$$

则

$$\int_{|z_k|}^R\frac{\mathrm{d}r}{r}=\int_0^R\eta_k(r)\frac{\mathrm{d}r}{r},$$

两侧对 k 求和即得所证. □

推论 1.4. 在 *Jensen* 定理的条件下，我们有

$$\log|f(0)|=-\int_0^R n(r)\frac{\mathrm{d}r}{r}+\frac{1}{2\pi}\log|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\mathrm{d}\theta$$

2 有限阶函数

定义 2.1. 设 f 是整函数，若存在 $\rho, A, B > 0$ 使得

$$|f(z)| \leqslant A\mathrm{e}^{B|z|^\rho}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

则称 F 的增长次数 $\leqslant \rho$，定义 $\rho_f = \inf \rho$.

例 2.2. 若 f 是多项式，则 $\rho_f = 0$.

若 $f(z) = \mathrm{e}^{z^m}$，则 $\rho_f = m$.

若 $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^z}$，则 $\rho_f = \infty$.

注记. ρ_f 不一定是整数.

$$\cos(z^{\frac{1}{2}}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n)!}$$

$$|\cos(z^{\frac{1}{2}})| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{(2n)!} \leqslant \mathrm{e}^{|z|^{\frac{1}{2}}}$$

要选一个方向，做一些另外的工作，得到 $\rho_f = \dfrac{1}{2}$.

定理 2.3. 设 f 为整函数，增长次数 $\leqslant \rho$，则

(1) $n(r) \leqslant Cr^\rho$

(2) 若 f 的零点为 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$，所有 $z_k \neq 0$，则任意 $s > \rho$，有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^s} < +\infty$$

证明.

(1) 设 $f(0) \neq 0$，否则设 0 为 f 的 N 零点，记 $g(z) = \dfrac{f(z)}{z^N}$，则 $n_g = n_f - N$.

$$\int_0^R n(r) \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| \mathrm{d}\theta - \log|f(0)|.$$

令 $R = 2r$，则

$$\int_r^{2r} n(x) \frac{\mathrm{d}x}{x} \geqslant n(r) \int_r^{2r} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log 2n(r)$$

$$\begin{aligned}\int_r^{2r} n(x) \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \int_0^{2r} n(x) \frac{\mathrm{d}x}{x} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(2r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| \mathrm{d}\theta - \log|f(0)| \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|A\mathrm{e}^{B(2r)^\rho}| \mathrm{d}\theta - \log|f(0)| \\ &\leqslant Cr^\rho - C\end{aligned}$$

则 $n(r) \leqslant Cr^\rho$.

(2) 有限个扔掉

$$\sum_{|z_k|\geqslant}|z_k|^{-s}=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{2^j\leqslant|z_k|\leqslant 2^{j+1}}\right)$$
$$\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}2^{-js}n(2^{j+1})\leqslant$$

□

定理 2.4. 设 f 是 $\mathbb{D}=\{|z|<1\}$ 中非常值的有界全纯函数，假设 f 在 $\mathbb{D}$ 中零点为 $a_1,a_2,\cdots$，则 $\sum_{j=1}^{\infty}(1-|a_j|)<\infty$.

证明. 设 $f(0)\neq 0$，取 $r<1$ 且 r 充分靠近 1，且 $r\neq|a_k|$，任意 $k.f$ 在 $B(0,r)$ 上用 Jensen 公式，

$$\log|f(0)|+\sum_{j=1}^{n(r)}\log\frac{r}{|a_j|}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta$$

令 $r\to 1^-$，则

$$\log|f(0)|+\sum_{j=1}^{\infty}\log\frac{1}{|a_j|}\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log M d\theta=\log M$$

对任何 $N>0$，

$$\sum_{j=1}^{N}\log\frac{r}{|a_j|}\leqslant\log M-\log|f(0)|$$

令 $r\to 1^-$，

$$\sum_{j=1}^{N}\log\frac{1}{|a_j|}\leqslant\log M-\log|f(0)|$$

令 $N\to\infty$，

$$\sum_{j=1}^{\infty}\log\frac{1}{|a_j|}\leqslant\log M-\log|f(0)|$$

当 $\alpha\in(0,1)$

$$\log\frac{1}{\alpha}=-\log\alpha=-\log(1-1-\alpha)=(1-\alpha)+\frac{1}{2}(1-\alpha)^2+\frac{1}{3}(1-\alpha)^3>1-\alpha$$

故 $\sum_{j=1}^{\infty}(1-|a_j|)<+\infty$. □

3 无穷乘积

4 Weierstrass 无穷乘积

对于每个 $k \geqslant 0$ 我们定义典范因子

$$E_0(z) = 1 - z \quad \text{和} \quad E_k(z) = (1-z)\mathrm{e}^{z+z^2/2+\cdots+z^k/k}, \quad k \geqslant 1.$$

称整数 k 为典范因子的次数.

引理 4.1. *如果 $|z| \leqslant \dfrac{1}{2}$，那么 $|1 - E_k(z)| \leqslant c|z|^{k+1}$ 对于某个 $c > 0$ 成立.*

证明. 对于 $|z| \leqslant \dfrac{1}{2}$，

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\ B(0,\frac{1}{2}) \arrow[ur, dashed, "\log(1-z)"] \arrow[r, "1-z"] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

其中当 $z=0$ 时 $\log(1-0)=0$，此时在 $|z| < \dfrac{1}{2}$（实际上是 $|z|<1$ 上，此处的幂级数展开和上面的提升的存在性都不完全是 $|z| < \dfrac{1}{2}$ 的目的）上有幂级数展开

$$\log(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \cdots.$$

因此

$$E_k(z) = \mathrm{e}^{\log(1-z)+z+z^2/2+\cdots+z^k/k} = \mathrm{e}^w,$$

其中 $w = -\displaystyle\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. 注意到因为 $|z| \leqslant \dfrac{1}{2}$ 我们有

$$\begin{aligned} |w| &= \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \right| \\ &\leqslant |z|^{k+1} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|z|^{n-k-1}}{n} \\ &= |z|^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n+k+1} \\ &\leqslant |z|^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n \\ &\leqslant |z|^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2|z|^{k+1}. \end{aligned}$$

特别地，我们得到 $|w| \leqslant 1$，因此有

$$\begin{aligned} |1 - E_k(z)| &= |1 - \mathrm{e}^w| \\ &= \left| -\omega - \frac{\omega^2}{2!} - \frac{\omega^3}{3!} - \cdots \right| \\ &= |\omega| \left| 1 + \frac{\omega}{2!} + \frac{\omega^3}{3!} + \cdots \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant |\omega| \left(1 + \frac{|\omega|}{2!} + \frac{|\omega|^2}{3!} + \cdots\right) \\
&\leqslant |\omega| \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\right) \\
&= \mathrm{e}\omega \leqslant 2\mathrm{e}|z|^{k+1}.
\end{aligned}$$

□

技术上一个关键点是引理中的常数 c 的选取可以不依赖于 k. 事实上，正如上面所示，我们能够取 $c = 2\mathrm{e}$.

假设在原点处给定了 m 阶零点，$a_1, a_2, \cdots$ 是所有的非原点零点. 那么我们定义 Weierstrass 乘积

$$f(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

我们断言这个函数有我们想要的性质，即，f 是在原点处有 m 阶零点，在序列 $\{a_n\}$ 上有零点，在其他地方不取 0 的整函数.

固定 $R > 0$，设 $|z| < R$. 我们将证明 f 在圆盘上具有全部想要的性质，然后因为 R 是任意的，这样就证明了定理.

我们可以考虑定义 f 的公式中的两种因子，分类的标准是 $|a_n| \leqslant 2R$ 还是 $|a_n| > 2R$. 对于第一类只有有限项，我们注意到这有限项在所有满足 $|a_n| \leqslant 2R$ 处的 a_n 取零值. 如果 $|a_n| \geqslant 2R$，我们有 $\left|\dfrac{z}{a_n}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$，因此由前面的引理得

$$\left|1 - E_n\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \leqslant 2\mathrm{e}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{n+1}$$

5 Hadamard 分解定理

引理 5.1. 若 $|z| \leqslant \dfrac{1}{2}$，则 $|E_k(z)| \geqslant \mathrm{e}^{-C|z|^{k+1}}$

回忆：若 f 是整函数，增长次数 $\rho_f < +\infty$，则

(1) $n(r) \leqslant Cr^{\rho_f}$

(2) $\forall s > \rho_f$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^s} < +\infty$

引理 5.2. 对任何 s，$\rho_f < s < k+1$，若 $|z - a_n| \geqslant \dfrac{1}{|a_n|^{k+1}}$，则

$$\left|\prod_{k=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \geqslant \mathrm{e}^{-C|z|^s}.$$

证明.

(1)

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \prod_{|a_n| \leqslant 2|z|} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \prod_{|a_n| > 2|z|} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

$$\left|\prod_{|a_n|>2|z|} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \geqslant \prod_{|a_n|>2|z|} \mathrm{e}^{-C\left|\frac{z}{a_n}\right|^{k+1}} \geqslant \mathrm{e}^{-C|z|^{k+1}\sum_{|a_n>2|z||}\frac{1}{|a_n|^{k+1}}}$$

(2)

$$\begin{aligned}\left|\prod_{|a_n|\leqslant 2|z|} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| &\geqslant \prod_{|a_n|\leqslant 2|z|}\left|1-\frac{z}{a_n}\right| \prod_{|a_n|\leqslant 2|z|} \mathrm{e}^{-C'\left|\frac{z}{a_n}\right|^k} \\ &= \prod_{|a_n|\leqslant 2|z|}\left|1-\frac{z}{a_n}\right| \mathrm{e}^{-C'|z|^k\sum_{|a_n|\leqslant 2|z|}\frac{1}{|a_n|^k}}\end{aligned}$$

注意

$$\frac{1}{|a_n|^k} = \frac{1}{|a_n|^s}\frac{1}{|a_n|^{k-s}} \leqslant C\frac{1}{|a_n|^s}|z|^{s-k}, \quad (s > k)$$

故

$$\left|\prod_{|a_n|\leqslant 2|z|} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \geqslant \prod_{|a_n|\leqslant 2|z|}\left|1-\frac{z}{a_n}\right| \mathrm{e}^{-C'|z|^k|z|^{s-k}\sum_{|a_n|\leqslant}\frac{1}{|a_n|^s}}$$

注意：

$$\prod_{|a_n|\leqslant 2|z|}\left|1-\frac{z}{a_n}\right| = \prod_{|a_n|\leqslant 2|z|}$$

(3)

$$\log A = -(k+2)\sum_{|a_n|\leqslant 2|z|}\log|a_n|$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant -(k+2)\sum_{|a_n|\leqslant 2|z|}\log(2|z|)\\
&\geqslant -(k+2)\log(2|z|)\mathfrak{n}(2|z|)\\
&\geqslant -(k+2)\log(2|z|)(2|z|)^s\\
&\geqslant -C|z|^{s'}
\end{aligned}
$$

故

$$A \geqslant \mathrm{e}^{-C'|z|^{s'}}.$$

(4) 综上

$$\left|\prod_{n=1}^{\infty}E_k\left(\frac{z}{|a_n|}\right)\right| \geqslant \mathrm{e}^{-C|z|^s-C'|z|s'} \geqslant \mathrm{e}^{-C'|z|^{S'}}$$

□

引理 5.3. 存在半径 $r_1, r_2, \cdots, r_m \to \infty$，使得

$$\left|\prod_{n=1}^{\infty}E_k\left(\frac{E}{a_n}\right)\right| \geqslant \mathrm{e}^{-C|z|^s}, \quad |z| = r_m.$$

证明. 由于 $\sum |a_n|^{-k-1} < \infty$，故存在 N，
令

$$I_n = [|a_n| - \frac{1}{|a_n|^{k+1}}, |a_n| + \frac{1}{|a_n|^{k+1}}],$$

则 I_n 的长度为 $\dfrac{2}{|a_n|^{k+1}}$. □

Chapter 8

椭圆函数

1　双周期函数

嗯我目前还看不清双周期函数是从哪里出现的，反正他就是研究了.

定义 1.1. 设 f 定义在 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上，

(1) 称 f 以 $\omega \in \mathbb{C}^*$ 为周期，如果对于任意 $z \in \Omega$，成立 $z+\omega \in \Omega$ 且 $f(z)=f(z+\omega)$；

(2) 称 f 是双周期函数，如果 f 以 ω_1, ω_2 为周期且二者之比 $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{R}$.

- 第 (1) 条中强调 $f(z)=f(z+\omega)$ 对 $z \in \Omega$ 成立是因为我们接下来要研究的椭圆函数，即亚纯双周期函数，只在 $\mathbb{C}$ 挖掉可列点上有定义，对于没有定义的点你不能说它 $f(z)=f(z+\omega)$.
- $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} \in \mathbb{R}$ 时双周期函数会退化单周期函数或常值函数.
  - 设 $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} = \dfrac{a}{b}$，其中 a, b 互素，那么存在整数 m, n 使得 $mb+na=1$. 令 $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$，那么 ω 是 f 的周期且

    $$\omega = \omega_1\left(m+n\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = \omega_1\left(m+n\frac{a}{b}\right) = \frac{\omega}{b}(mb+na) = \frac{\omega_1}{b},$$

    所以 $\omega_1 = b\omega$，同理 $\omega_2 = a\omega$.
  - 当 $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} \in \mathbb{Q}^c$ 且 f 是连续函数时，f 是常值函数. 要证明这一点，我们先证明一个引理：

    引理 1.2. $(\mathbb{R}, +)$ 的子群要么是循环群要么在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

    证明. 设 $H \leqslant \mathbb{R}$. 我们有 $H \cap \mathbb{R}^+ \neq \varnothing$.
    设 $\eta = \inf\left\{h \in H \cap \mathbb{R}^+\right\}$.

    * $\eta > 0$.
      任取 $h \in H$ 和 $k \in Z$ 使得 $k\eta \leqslant |h| < (k+1)\eta$.
      我们有 $|h| - k\eta \in H$，且 $0 \leqslant |h| - k\eta < (k+1)\eta - k\eta = \eta$.
      所以由 η 的定义，$|h| - k\eta = 0$，所以 $h = \pm k\eta$.

* $\eta = 0$.

  任取 $r \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. 不妨设 $r \geqslant 0$，其余情形可类似讨论.
  因为 $\eta = 0$，所以存在 $h \in (0, \varepsilon] \cap H$. 设 $k \in \mathbb{N}$ 使得

  $$kh \leqslant r < (k+1)h.$$

  我们有 $kh \in H$，且

  $$0 \leqslant r - kh < h \leqslant \varepsilon.$$

  所以 $|r - kh| < \varepsilon$，这证明 H 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

$\square$

有了该引理，我们只需要证明 $\Lambda = \{m\omega_1 + n\omega_2\}$ 不是循环群. 若不然，存在 $m_0\omega_1 + n_0\omega_2 \in \Lambda$ 使得对于任意 $m\omega_1 + n\omega_2 \in \Lambda$，存在 $p \in \mathbb{Z}$ 使得

$$m\omega_1 + n\omega_2 = p(m_0\omega_1 + n_0\omega_2),$$

整理得

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n - pn_0}{pm_0 - m} \in \mathbb{Q}.$$

2 周期的基本对

为了简便，约定此后出现的 ω_1, ω_2 之比均不为实数.

定义 2.1. 设 f 有周期 ω, ω_2 且二者之比 $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{R}$. 称周期对 (ω_1, ω_2) 为基本对如果 f 的每个周期都可以表达为 $m\omega_1 + n\omega_2$ 的形式，其中 m 和 n 是整数.

- 此时还不知道基本对的存在性. 但将要看到对我们的椭圆函数来说基本对是存在的.

定义 2.2. 设 $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ 且二者之比 $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{R}$，将所有线性组合 $m\omega_1 + n\omega_2$ 记作 $\Lambda(\omega_1, \omega_2)$ 或简记作 Λ，称作由 ω_1 和 ω_2 生成的格. 称

$$P_0 = \{z \in \mathbb{C} : z = a\omega_1 + b\omega_2, 0 \leqslant a, b < 1\}$$

为格 $\Lambda(\omega_1, \omega_2)$ 的基本平行四边形. 称基本平行四边形的平移 $P = P_0 + h$ 为周期平行四边形.

定理 2.3. 周期对 (ω_1, ω_2) 是基本对当且仅当以 $0, \omega_1, \omega$ 为顶点的三角形的内部和边界上不包含其他周期.

定义 2.4. 称 (ω_1, ω_2) 和 (ω_1', ω_2') 等价如果它们生成的格相同，即 $\Lambda(\omega_1, \omega_2) = \Lambda(\omega_1', \omega_2')$.

定理 2.5. (ω, ω_2) 和 (ω_1', ω_2') 等价当且仅当存在矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ 满足 $ad - bc = \pm 1$，使得

$$\begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix}.$$

3 椭圆函数

为了简便起见，下面提到零点个数和极点个数时，均计入重数.

定义 3.1. 称双周期亚纯函数为椭圆函数.

在给出椭圆函数的具体的例子之前，让我们先导出椭圆函数的一些基本性质.

注记. 当周期平行四边形的边界上出现零点或极点时不太方便，注意到亚纯函数在有界闭集上只有有限个零点和极点，因此我们可以通过将周期平行四边形稍微平移一下来得到一个边界上没有零点和极点的的周期平行四边形. 称这样的周期平行四边形为一个胞腔.

定理 3.2. 非常值椭圆函数有基本对.

定理 3.3. 如果椭圆函数 f 在某个周期平行四边形 P 中没有极点，那么 f 是常数.

证明. 由周期性，f 可完全由它在某个平行四边形 P 上的值决定. 因为 f 是连续的，P 的闭包是紧的，所以 $|f|$ 在 P 上是有界的，从而 $|f|$ 在 $\mathbb{C}$ 上是有界的. 由 Liouville 定理，f 是常值函数. □

定理 3.4. 如果椭圆函数 f 在某个周期平行四边形 P 中没有零点，那么 f 是常数.

证明. 注意到若 f 是椭圆函数，则 $\dfrac{1}{f}$ 也是椭圆函数，对 $\dfrac{1}{f}$ 用上一条定理. □

定理 3.5. 椭圆函数沿任意胞腔的边界的围道积分为 0.

证明. 由周期性，对边的积分互相抵消. □

定理 3.6. 椭圆函数在任意周期平行四边形中的留数和为 0.

证明. 如果周期平行四边形的边界上有极点，平移一下得到一个胞腔，显然留数和不变且极点都移到了平行四边形的内部，结合上条定理与留数定理易证. □

定义 3.7. 称椭圆函数在基本平行四边形中的极点的总阶数为该椭圆函数的阶数.

注记. 上一条定理告诉我们，非常值椭圆函数的阶数至少为 2，这包含两种情况，一种是一个二阶极点，一种是两个单极点.

定理 3.8. 椭圆函数在任意周期平行四边形中的零点个数等于极点个数.

证明. 注意到 $\dfrac{f'}{f}$ 也是椭圆函数，用幅角原理. □

4 椭圆函数的构造

现在转到具体构造非常值椭圆函数的问题，我们的思路是，预先指定椭圆函数的周期 ω_1,ω_2，然后尝试找到以 ω_1,ω_2 为周期的最简单的椭圆函数.

因为非常值椭圆函数的阶数至少为 2，因此在每个周期平行四边形中我们至少需要一个二阶极点或两个单极点. 这两种可能性就引出了椭圆函数的两套理论，前者由 Weierstrass 发展，后者由 Jacobi 发展. 我们将追随 Weierstrass 的路线，他的出发点是构造一个在 $z=0$ 处从而在每个周期处有一个二阶极点椭圆函数. 因此在每个周期 ω 附近 Laurent 展开的主要部分必定形如

$$\frac{A}{(z-\omega)^2}+\frac{B}{z-\omega}.$$

为了简便我们取 $A=1,B=0$. 因此自然会考虑

$$\sum_{\omega\in\Lambda}\frac{1}{(z-\omega)^2}.$$

对于固定的 $z\notin\Lambda$，这是一个关于 m 和 n 求和的二重（双边）级数. 下面两个引理将处理这种形式的二重级数的收敛性，在此之前我们回顾下二重级数的收敛的定义.

定义 4.1. 称二重级数 $\displaystyle\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}a_{mn}$ 收敛是指存在 $S\in\mathbb{R}$，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得只要 $m_1,m_2,n_1,n_2>N$，便成立

$$\left|\sum_{\substack{-m_1\leqslant m\leqslant m_2\\-n_1\leqslant n\leqslant n_2}}a_{mn}-S\right|<\varepsilon.$$

引理 4.2. 设 $\alpha\in\mathbb{R}$，那么无穷级数 $\displaystyle\sum_{\substack{\omega\in\Lambda\\\omega\neq0}}\frac{1}{\omega^\alpha}$ 绝对收敛当且仅当 $\alpha>2$.

引理 4.3. 如果 $\alpha>2$，$R>0$，那么级数

$$\sum_{|\omega>R|}\frac{1}{(z-\omega)^\alpha}$$

在圆盘 $|z|\leqslant R$ 上绝对收敛且一致收敛.

证明. 我们将证明存在依赖于 α 和 R 的常数 M 使得

$$\frac{1}{|z-\alpha|^\alpha}\leqslant\frac{M}{|\omega|^\alpha}$$

对所有满足 $|\omega|>R$ 的 ω 和满足 $|z|\leqslant R$ 的 z 成立，之后便可以援引上一条引理来得到该引理.

上面的不等式等价于

$$\left|\frac{z-\omega}{\omega}\right|^\alpha\geqslant\frac{1}{M}.$$

为了找到 M，我们考虑所有满足 $|\omega|>R$ 的 ω. 选择其中模长最小的一个 ω_{min}，记 $d=R-|\omega_{\min}|$，则 $d>0$. 那么对于 $|z|\leqslant R$ 有

$$\left|\frac{z-\omega}{\omega}\right|=\left|1-\frac{z}{w}\right|\geqslant1-\left|\frac{z}{\omega}\right|\geqslant1-\frac{R}{R+d},$$

由于 $\alpha > 2$，所以

$$\left|\frac{z-\omega}{\omega}\right|^{\alpha} \geqslant \left(1-\frac{R}{R+d}\right)^{\alpha} =: \frac{1}{M}.$$

□

正如之前提到的，我们希望通过

$$\sum_{\omega\in\Lambda}\frac{1}{(z-\omega)^2}$$

来构造最简单的椭圆函数. 它在周期点附近有我们想要的主要部分. 但是，该级数并不绝对收敛（我们希望借助绝对收敛时的级数重排来证明周期性!），因此，我们将上面的级数的指数 2 修改为 3，这给出了一个 3 阶椭圆函数.

定理 4.4. *定义*

$$f(z) = \sum_{\omega\in\Lambda}\frac{1}{(z-\omega)^3}.$$

那么 f 是以 ω_1, ω_2 为周期的椭圆函数，并且在每个 $\omega \in \Lambda$ 处有一个三阶极点.

证明. 由引理 2，$\sum\limits_{|\omega|>R}$ 在圆盘 $|z| \leqslant R$ 中一致收敛，因此它在圆盘上全纯. 其他的有限项，除去圆盘中的周期点，也全纯.

由该级数绝对收敛，易知 f 以 ω_1 和 ω_2 为周期. □

5 Weierstrass$\wp$ 函数

定义 5.1.

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right).$$

定理 5.2. $\wp$ 以 ω_1 和 ω_2 为周期. 除去周期点处的二阶奇点，$\wp$ 全纯. 此外，$\wp(z)$ 是偶函数.

证明. 我们的思路还是证明

$$\sum_{|\omega|>R}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$$

在圆盘 $|z| \leqslant R$ 上绝对收敛且一致收敛. 为此我们估计

$$\left|\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right| = \left|\frac{z(2\omega - z)}{\omega^2(z-\omega)^2}\right|.$$

由上一节的引理 2，我们有

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} \leqslant \frac{M}{|\omega|^2},$$

其中 M 只依赖于 R. 因此

$$\left|\frac{z(2\omega - z)}{\omega^2(z-\omega)^2}\right| \leqslant \frac{M|z(2\omega - z)|}{|\omega|^4} \leqslant \frac{MR(2|\omega| + R)}{|\omega|^4} \leqslant \frac{MR(2 + R/|\omega|)}{|\omega|^3} < \frac{3MR}{|\omega|^3}.$$

因此 $\wp(z)$ 确实是在周期点处有二阶极点的亚纯函数.

下面证明 $\wp$ 是偶函数，注意到

$$(-z-\omega)^2 = (z+\omega)^2 = (z-(-\omega))^2.$$

当 ω 跑遍非零周期时 $-\omega$ 也跑遍非零周期，因此由 $\wp$ 绝对收敛知级数可以重排知 $\wp(-z) = \wp(z)$.

最后我们建立周期性. 由于项 $\dfrac{1}{\omega^2}$ 的引入，已经不能够由级数重排来得到周期性. 但注意到

$$\wp'(z) = -2\sum_{\omega \in \Lambda}\frac{1}{(z-\omega)^3},$$

我们已经证明了这个函数以 ω_1 和 ω_2 为周期，那么 $\wp(z+\omega) - \wp(z)$ 是常数. 代入 $z = -\dfrac{\omega}{2}$ 得 $\wp(\dfrac{\omega}{2}) - \wp(-\dfrac{\omega}{2}) = 0$，这是因为 $\wp$ 是偶函数. 因此 $\wp(z+\omega) = \wp(z)$ 对任意 $\omega \in \Lambda$ 成立. □

6 $\wp$ 在原点附近的 Laurent 展开

定理 6.1. 设 $r = \min\{|\omega| : \omega \neq 0\}$. 那么对于 $0 < |z| < r$，我们有

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)G_{2n+2}z^{2n},$$

其中

$$G_n = \sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^n}, \quad n \geqslant 3.$$

证明. 如果 $0 < |z| < r$，那么对于 $\omega \neq 0$ 有 $\left|\dfrac{z}{\omega}\right| < 1$.

因此我们有

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} = \frac{1}{\omega^2\left(1-\dfrac{z}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{\omega^2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z}{\omega}\right)^n\right),$$

因此

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\omega^{n+2}}z^n.$$

对所有 $\omega \neq 0$ 求和得

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^{n+2}}z^n = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)G_{n+2}z^n.$$

因为 $\wp(z)$ 是偶函数，所以系数 G_{2n+1} 必须为零，得证. $\square$

7 $\wp$ 满足的微分方程

定理 7.1. $\wp$ 满足非线性微分方程

$$[\wp'(z)]^2 = 4\wp^3(z) - 60G_4\wp(z) - 140G_6.$$

证明. 找到 $\wp$ 所满足的微分方程的思路是通过 $\wp$ 和 $\wp'$ 的幂次的线性组合来得到一个在 $z=0$ 处没有极点的椭圆函数，从而它必须是常数.

在 $z=0$ 附近我们有一个三阶椭圆函数

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + \cdots,$$

它的平方是 6 阶椭圆函数

$$[\wp'(z)]^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{24G_4}{z^2} - 80G_6 + \cdots,$$

其中 $+\cdots$ 代表 z 的幂级数，当 $z=0$ 时它的值也为零.

而

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \cdots,$$

它的三次方是

$$\wp^3(z) = \frac{1}{z^6} + 9G_4\frac{1}{z^2} + 15G_6 + \cdots,$$

从而

$$[\wp'(z)]^2 - 4\wp^3(z) = -\frac{60G_4}{z^2} - 140G_6 + \cdots$$

那么

$$[\wp'(z)]^2 - 4\wp^3(z) + 60G_4\wp(z) = -140G_6 + \cdots.$$

因为式子的左侧在 $z=0$ 处没有极点，所以它是一个常数，代入 $z=0$ 知这个常数必须是 $-140G_6$，定理得证. □

8 e_1, e_2, e_3

定义 8.1. 记 e_1, e_2, e_3 是 $\wp$ 在半周期处的值，即

$$e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \quad e_3 = \wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right).$$

下一个定理说明它们是多项式 $4x^3 - g_2 x - g_3$ 的根，其中 $g_2 = 60G_4, g_3 = 140G_6$.

定理 8.2.

$$4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3).$$

此外，e_1, e_2, e_3 是互异的.

证明. 因为 $\wp$ 是偶函数，所以 $\wp'$ 是奇函数. 容易证明 $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ 是 $\wp'$ 的零点.

但 $\wp'$ 是三阶椭圆函数，所以它们是 $\wp'$ 的单零点.$\wp$ 满足的微分方程告诉我们这三个点也是 $4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$ 的零点.

下证 e_1, e_2, e_3 互异. 考虑椭圆函数 $\wp(z) - e_1$，$z = \frac{1}{\omega_1}$ 是它的零点. 由 $\wp'\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = 0$ 知这是一个二阶零点.

如果 $e_1 = e_2$，那么 $\wp(z) - e_1$ 既在 $\frac{\omega_1}{2}$ 有一个二阶零点，又在 $\frac{\omega_2}{2}$ 有一个二阶零点，从而它的阶数 $\geqslant 4$，矛盾. 所以 $e_1 \neq e_2$，同理可得 $e_1 \neq e_3$，$e_2 \neq e_3$. □

9 椭圆函数是 $\wp$ 和 $\wp'$ 的有理函数

定理 9.1. 设非常值椭圆函数 f 以 ω_1, ω_2 为周期，那么 f 是 $\wp$ 和 $\wp'$ 的有理函数.

引理 9.2. 设非常值偶椭圆函数 f 以 ω_1, ω_2 为周期，那么 f 是 $\wp$ 的有理函数.

证明. 不妨设 F 在原点处既无零点又无极点，否则 F 在原点处有偶数阶零点或极点，存在 $m \in Z$ 使得 $F\wp^m$ 在原点处既无零点又无极点，用 $F\wp^m$ 替换 F.

我们的思路是利用 $\wp$ 来构造一个双周期函数 G，它的零点和极点与 F 完全相同.

考虑 $\wp(z) - \wp(a)$，

- 当 a 不是半周期时，$\wp(z) - \wp(a)$ 在 a 和 $-a$ 处各有 1 阶零点.
- 当 a 是半周期时，a 与 $-a+\omega$ 重合，$-a$ 与 $a-\omega$ 重合，因此 $\wp(z) - \wp(a)$ 在 a 和 $-a$ 处各有 2 阶零点.

如果 a 是 F 的零点，那么 $-a$ 也是，因为 F 是偶函数. 设 $a_1, -a_1, \cdots, a_m, -a_m$ 是 F 的全部零点，计入重数. 此处比较微妙，若 a 不是半周期点，那么 a 的阶数是几就计入几次，若 a 是半周期点且阶数为 $2n$，就将 a 计入 n 次.

那么

$$[\wp(z) - \wp(a_1)] \cdots [\wp(z) - \wp(a_m)]$$

有和 F 相同的零点.

若 $b_1, -1, \cdots, b_m, -b_m$ 是 F 的所有极点，那么

$$G = \frac{[\wp(z) - \wp(a_1)] \cdots [\wp(z) - \wp(a_m)]}{[\wp(z) - \wp(b_1)] \cdots [\wp(z) - \wp(b_m)]}$$

是双周期的并且有和 F 相同的零点和极点. 那么 F/G 是常值，引理得证. □

证明. 为了证明定理，我们回忆 $\wp$ 是偶的而 $\wp'$ 是奇的.

将任意非常值椭圆函数 f 分解为

$$f(z) = f_{even}(z) + f_{odd}(z),$$

其中

$$f_{even} = \frac{f(z) + f(-z)}{2}, \quad f_{odd} = \frac{f(z) - f(-z)}{2}.$$

因为 $f_{odd}/\wp'$ 是偶的，对 f_{even} 和 $f_{odd}/\wp'$ 用上面的引理，得证！ □

Chapter 9

模群和模函数

1　Möbius 变换

Chapter 10

Nevanlinna 理论

1 Poisson-Jensen 公式

Chapter 11

作业

1 第一周

1.3.5 证明：在复数的球面表示下，球面上的圆周对应于复平面上的圆周或直线，反之亦然.

证明. 复平面上圆周或直线的方程为

$$A|z|^2 + B\bar{z} + \bar{B}z + C = 0,$$

其中 $A, C \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{C}$，并且 $|B|^2 - AC > 0$. 代入 $z = \dfrac{x_1 + \mathrm{i}x_2}{1 - x_3}$，得到

$$A\left(\frac{x_1^2}{(1-x_3)^2} + \frac{x_2^2}{(1-x_3)^2}\right) + 2\operatorname{Re} B\frac{x_1}{1-x_3} + 2\operatorname{Im}\frac{x_2}{1-x_3} + C = 0$$

$$A(x_1^2 + x_2^2) + 2\operatorname{Re} Bx_1(1-x_3) + 2\operatorname{Im} Bx_2(1-x_3) + C(1-x_3)^2 = 0$$

$$A(1 - x_3^2) + 2\operatorname{Re} Bx_1(1-x_3) + 2\operatorname{Im} Bx_2(1-x_3) + C(1-x_3)^2 = 0$$

$$A(1 + x_3) + 2\operatorname{Re} Bx_1 + 2\operatorname{Im} Bx_2 + C(1-x_3) = 0$$

$$2\operatorname{Re} Bx_1 + 2\operatorname{Im} Bx_2 + (A - C)x_3 + A + C = 0$$

这是空间中平面的方程，原点到该平面的距离为

$$d = \frac{|A + C|}{\sqrt{4|B|^2 + (A - C)^2}}$$

□

2.1.1 研究下列函数的可微性：

(ii) $f(z) = |z|^2$；

(iv) $f(z) = \arg z$.

解.

(ii) $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}, \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z$.
因此 $f(z)$ 在 $z = 0$ 处可微，在 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 上不可微.

(iv) $f(z)$ 的可微问题等价于极限 $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{\arg z - \arg z_0}{z - z_0}$ 的存在问题.
考虑 $z = kz_0, k \in \mathbb{R}$，$\lim\limits_{k\to 1} \dfrac{\arg kz_0 - \arg z_0}{z - z_0} = 0$.
将 z_0 写成 $r_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$，考虑 $z = r_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \theta \in \mathbb{R}$，

$$\lim_{\theta\to\theta_0} \frac{\arg(r_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) - \arg(r_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0})}{r_0(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0})} = \frac{1}{r_0}\lim_{\theta\to\theta_0} \frac{\theta - \theta_0}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}} = \frac{1}{r_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}} \neq 0$$

因此 $f(z)$ 不可微.

□

2.2.1 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的域，$f \in H(D)$. 如果对每一个 $z \in D$，都有 $f'(z) = 0$，证明 f 是一常数.

证明. 此时有
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$
因此 u,v 都是 D 上的常值函数，故 f 也是 D 上的常值函数. □

2.2.2 设 $f\in H(D)$，并且满足下列条件之一：

(i) $\operatorname{Re} f(z)$ 是常数；

(ii) $\operatorname{Im} f(z)$ 是常数；

(iii) $|f(z)|$ 是常数；

(iv) $\arg f(z)$ 是常数；

(v) $\operatorname{Re} f(z)=(\operatorname{Im} f(z))^2, z\in D$,

那么 f 是一常数.

证明. 因为 $f\in H(D)$，所以此时有
$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0,\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

(i) $\operatorname{Re} f(z)$ 是常数，即 $u(x,y)$ 是常数，因此 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$. 因此 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$. 因此 f 是常值函数.

(ii) 同第 (i) 问.

(iii)

注记.

$|f(z)|$ 是常数，因此有 u^2+v^2 是常数. 因此有
$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}=0,u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

将 Cauchy-Riemann 方程代入得
$$u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial x}=0,-u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

第一式乘 u 后加上第二式乘 v 得
$$\frac{\partial v}{\partial y}(u^2+v^2)=0\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

同理可得
$$\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

(iv) $\arg f(z)$ 是常数；

- $u(x,y)\equiv 0$. 同第 (i) 问.

- $\arctan\dfrac{v}{u}\equiv C$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{v}{u}=\frac{1}{1+\frac{v^2}{u^2}}\frac{\frac{\partial v}{\partial x}u-v\frac{\partial u}{\partial x}}{u^2}=0\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial x}u-v\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

同理可得

$$\frac{\partial v}{\partial y}u-v\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

将 Cauchy-Riemann 方程代入得

$$\frac{\partial v}{\partial x}u-\frac{\partial v}{\partial y}v=0,\frac{\partial v}{\partial y}u+\frac{\partial v}{\partial x}v=0$$

将第一式乘 u 后与第二式乘 v 相加得

$$\frac{\partial v}{\partial x}(u^2+v^2)=0\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

同理可得

$$\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

(v) $\operatorname{Re}f(z)=(\operatorname{Im}f(z))^2,z\in D$

□

2.2.3 设 $z=x+\mathrm{i}y$，证明 $f(z)=\sqrt{xy}$ 在 $z=0$ 处满足 Cauchy-Riemann 方程，但 f 在 $z=0$ 处不可微

证明.

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(0,0)}=0=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(0,0)}=0=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

Cauchy-Riemann 方程成立

$$\lim_{\Delta z\to0}\frac{f(\Delta z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to0}\frac{\sqrt{\Delta x\Delta y}}{\Delta z}$$

当 $\Delta z=\Delta x$ 时，上式极限为 0.
当 $\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\Delta x$ 时，上式极限为 $\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}\neq0$
从而不可微. □

2.2.11 设 D 是域，$f:D\to\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ 是非常数的全纯函数，则 $\log|f(z)|$ 和 $\arg f(z)$ 是 D 上的调和函数，而 $|f(z)|$ 不是 D 上的调和函数.

证明.

-

$$\log|f(z)|=\frac{1}{2}\log|f(z)|^2=\frac{1}{2}\log f(z)\overline{f(z)}$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}\log f(z)\overline{f(z)}=\frac{1}{f(z)\overline{f(z)}}\left(\frac{\partial f(z)}{\partial\bar z}\overline{f(z)}+f(z)\frac{\partial\overline{f(z)}}{\partial\bar z}\right)=\frac{1}{\overline{f(z)}}\frac{\partial\overline{f(z)}}{\partial\bar z}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\overline{f(z)}}\frac{\partial\overline{f(z)}}{\partial\bar z}\right)&=\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\overline{f(z)}}\right)\frac{\partial\overline{f(z)}}{\partial\bar z}+\frac{1}{\overline{f(z)}}\frac{\partial^2\overline{f(z)}}{\partial z\partial\bar z}\\&=-\frac{1}{\left(\overline{f(z)}\right)^2}\frac{\partial\overline{f(z)}}{\partial z}\frac{\partial\overline{f(z)}}{\partial\bar z}+\frac{1}{\overline{f(z)}}\frac{\partial^2\overline{f(z)}}{\partial z\partial\bar z}\end{aligned}$$

由于 $\dfrac{\partial\overline{f(z)}}{\partial z}=\dfrac{\overline{\partial f}}{\partial\bar z}=0$，所以上式为 0，所以它调和.

-

$$\frac{f(z)}{\overline{f(z)}}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\arg f(z)}$$

$$\log\left(\frac{f(z)}{\overline{f(z)}}\right)=2\mathrm{i}\arg f(z)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\arg(f(z))}{\partial z\partial\bar z}&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{\overline{f(z)}}\frac{\partial\overline{f(z)}}{\partial\bar z}\right)\\&=-\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{\frac{\partial^2\bar f}{\partial z\partial\bar z}\bar f-\frac{\partial\bar f}{\partial\bar z}\frac{\partial\bar f}{\partial z}}{|\bar f|^2}=0\end{aligned}$$

- 算不完了，有机会补上

□

2.2.12 设 D,G 是域，$\varphi:D\to G$ 是全纯函数. 证明：若 u 是 G 上的调和函数，则 $u\circ f$ 是 D 上的调和函数.

证明.

$$\frac{\partial}{\partial z}u(\varphi(z))=\frac{\partial u}{\partial z}(\varphi(z))\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z)+\frac{\partial u}{\partial\bar z}(\varphi(z))\frac{\partial\bar\varphi}{\partial z}(z)=\frac{\partial u}{\partial z}(\varphi(z))\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\bar z\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\bar z\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z}+\frac{\partial^2 u}{\partial\bar z\partial z}\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\bar z}\right)+\frac{\partial u}{\partial z}(\varphi(z))\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar z}=0$$

□

2.2.15 举例说明：存在 $B(0,1)\setminus\{0\}$ 上的调和函数，它不是 $B(0,1)\setminus\{0\}$ 上全纯函数的实部.

证明. 设 $u=\log(x^2+y^2)$，若 u 为全纯函数 $u+\mathrm{i}v$ 的实部，则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{2x}{x^2+y^2}\\-\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{2y}{x^2+y^2}\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{4xy}{x^2+y^2}$$

矛盾，所以不存在这样的 v. □

最后两道题不太会写. 随便写写这次作业的体会.

- 之前听人说过复分析可能是这学期最简单的数学课，我现在感觉根本不是，反而是学得最懵圈的一门课
- 我现在差不多知道了对于没有具体形式的函数和函数的复合该怎么算 $\dfrac{\partial}{\partial z}$ 和 $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$，但是我不知道将 z 与 $\bar{z}$ 看作独立变量求导时多元微积分的哪些东西可以直接照搬过来，为什么可以搬过来，这令我感到不安
- 大概知道了共形是什么感觉，但是对于如何把它应用到最后两道题
- 希望随着复分析的框架搭的越来越完善、对计算越来越熟悉，情况会慢慢好转起来的
- 本次作业还是先不死磕了

2 第二周

2.4.15 称 $\varphi(z)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ 为 Rokovsky 函数. 证明下面四个域都是 φ 的单叶性域：

(1) 上半平面 $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z>0\}$

(2) 下半平面 $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z<0\}$

(3) 无心单位圆盘 $\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<1\}$

(4) 单位圆盘的外部 $\{z\in\mathbb{C}:|z|>1\}$

2.4.23 证明：$f(z)=\operatorname{Log}\left(\dfrac{z^2-1}{z}\right)$ 能在域

$$D=\mathbb{C}\backslash\left((-\infty,-1]\cup[0,1]\right)$$

上选出单值的全纯分支.

2.4.26

2.4.11

2.4.27 证明函数 $\sqrt[4]{(1-z)^3(1+z)}$ 能在 $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ 上选出一个单值全纯分支 f，满足 $f(\mathrm{i})=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{8}\mathrm{i}}$，试计算 $f(-\mathrm{i})$ 的值.

证明. $F(z)=\sqrt[4]{(1-z)^3(1+z)}=|(1-z)^3(1+z)|^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{4}\operatorname{Arg}(1-z)^3(1+z)}$

在 $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ 上只有两种简单闭曲线，一种是平凡的，一种绕 -1 和 1 一周，只对后一种计算幅角的改变量. 设 C 是绕 -1 和 1 的简单闭曲线，逆时针绕行.

$$\Delta_C F(z)$$

□

例 2.4.9

3 第三周

习题 2.5 第 2，4，9，14，16，17，18，19 题

4 第四周

习题 2.5 第 21 题；习题 3.1 第 2，5，12 题习题 3.2 第 1 题；习题 3.3 第 4，5 题

5 第五周

6 第六周

4.1.14 若 $\{\lambda_n\}$ 是严格单调增加，并且以 ∞ 为极限的正数列，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n z}$ 为 Dirichlet 级数. 证明：

(i) 若该级数在 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 处收敛，则它在半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > x_0\}$ 上内闭一致收敛.

(ii) 若该级数在 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 处绝对收敛，则它在闭半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geqslant x_0\}$ 上绝对一致收敛.

证明.

(i)

(ii)

□

7 第七周

8 第八周

9 第九周

10 第十周

11 第十一周

12 第十二周

6.1.2 设域 D 关于圆周 $\partial B(a,r)$ 对称，f 在 D 上亚纯，$f(D\cap\partial B(a,r))\subset\partial B(A,R)$. 证明：若 $z_0,w_0\in D$ 关于 $\partial B(a,r)$ 对称，z_0 是 $f(z)-A$ 的一阶零点，则 ω_0 是 f 的一阶极点，并且

$$\mathrm{Res}(f,\omega_0)=-\frac{R^2(\omega_0-a)^2}{r^2\overline{f'(z_0)}}.$$

6.1.3 设 $0<r<R<\infty$，f 在 $B(0,R)\backslash\overline{B(0,r)}$ 上全纯，在 $B(0,R)\backslash B(0,r)$ 上连续. 证明：若 f 在 $\partial B(0,r)$ 上恒为零，则在 $B(0,R)\backslash\overline{B(0,r)}$ 上也恒为零.

6.1.4 设 γ 是圆周 $\partial B(a,R)$ 上的一段开圆弧. 证明：若 f 在 $B(a,R)$ 上全纯，在 $B(a,R)\cup\gamma$ 上连续，并且在 γ 上恒为零，则 f 在 $B(a,R)$ 上也恒为零.

Chapter 12

刘太顺

1 习题 3.2 Cauchy 积分定理

1. 计算积分

(1) $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|^2}, |a| \neq r;$

(2) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{2z-1}{z(z-1)}\mathrm{d}z;$

(3) $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{z\mathrm{d}z}{z^4-1};$

(4) $\displaystyle\int_{|z|=2a} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+a^2}\mathrm{d}z, a > 0.$

2 习题 4.1 Weierstrass 定理

12. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 是区域 D 上的全纯函数项级数. 证明：若 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} f_n(z)$ 在 D 上内闭一致收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} f_n(z)$ 或者在 D 上内闭一致收敛，或者在 D 上处处发散.

3 习题 4.4 幅角原理和 Rouche 定理

2. 利用幅角原理证明代数学的基本定理.

证明. □

4. 设 $0 < a_0 < a_1 < \cdots < a_n$. 证明：三角多项式

$$a_0 + a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \cdots + a_n \cos n\theta$$

在 $(0, 2\pi)$ 中有 $2n$ 个不同的零点.

证明.

- 设 $P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$，断言它的全部零点在 $B(0,1)$ 中.
  设 z_0 是 $P_n(z)$ 的零点，则有
  $$0 = (1 - z_0)P_n(z_0) = a_0 + (a_1 - a_0)z_0 + (a_2 - a_1)z_0^2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z_0^n - a_n z_0^{n+1}.$$
  $a_n|z_0^{n+1}| = |a_0+(a_1-a_0)z_0+(a_2-a_1)z_0^2+\cdots+(a_n-a_{n-1})z_0^n| \leqslant a_0+(a_1-a_0)|z_0|+\cdots+(a_n-a_{n-1})|z_0|^n.$
  容易验证 z_0 不是非负实数，各项幅角不可能相同，所以上面实际上取到严格不等号，移项得
  $$a_n(|z_0|^{n+1} - |z_0|^n) + a_{n-1}(|z_0|^n - |z_0|^{n-1}) + \cdots + a_0(|z_0| - 1) < 0.$$
  当 $|z_0| \geqslant 1$ 时，上式不可能成立. 因此 $|z_0| < 1$.
- 设 $C : |z| = 1$，计算 $N = \dfrac{1}{2\pi}\Delta_C \operatorname{Arg} P_n(z)$.
  由上一条知，$P_n(z)$ 在 C 内部有 n 个零点. 则 $\Gamma = P_n(C)$ 绕零点转 n 圈.
  所以 Γ 与虚轴至少相交 $2n$ 次. 所以至少有 $2n$ 个 θ 使得 $P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 在虚轴上.
  故至少有 $2n$ 个不同的 θ 使得 $\operatorname{Re} P_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = 0$.
- 右边是一个 $2n$ 次多项式，所以在 $\mathbb{C}$ 上至多有 $2n$ 个根，故在 $|z| = 1$ 上至多 $2n$ 个根.

□

5. 利用 Rouché 定理证明代数学的基本定理.
8. 设 $f(z)$ 在 $\overline{B(0,1)}$ 上全纯，并且 $f'(z)$ 在 $\partial B(0,1)$ 上无零点. 证明：当 n 充分大时，

$$F_n(z) = \frac{f\left(z + \dfrac{1}{n}\right) - f(z)}{\dfrac{1}{n}}$$

与 $f'(z)$ 在 $B(0,1)$ 中的零点个数相等.

证明. □

13. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in B(0,1)$，$f(z) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z}$. 证明：

(i) 若 $b \in B(0,1)$，则 $f(z)=b$ 在 $B(0,1)$ 中恰有 n 个根；

(ii) 若 $b \in B(\infty,1)$，则 $f(z)=b$ 在 $B(\infty,1)$ 中恰有 n 个根.

证明. □

14. 设 $f \in H(\overline{B(0,R)})$，$f$ 在 $\partial B(0,R)$ 上没有零点，在 $B(0,R)$ 中的零点个数为 N. 证明：

$$\max_{|z|=R} \mathrm{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geqslant N.$$

4 习题 4.5 最大模原理和 Schwarz 引理

1. 设 f_n 在 D 上全纯，连续到边界. 证明：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 ∂D 上一致收敛，则必在 $\bar{D}$ 上一致收敛.

8. 设 $f \in H(B(0,1))$，$f(0)=0$. 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ 在 $B(0,1)$ 上绝对且内闭一致收敛.

证明. □

10. 设 $f \in H(B(0,R))$，$f(B(0,R)) \subset B(0,M)$，$f(0)=0$. 证明：

(i) $|f(z)| \leqslant \dfrac{M}{R}|z|$，$|f'(0)| \leqslant \dfrac{M}{R}$，$\forall z \in B(0,R)\setminus\{0\}$；

(ii) 等号成立当且仅当 $f(z)=\dfrac{M}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$，$\theta \in \mathbb{R}$.

证明. 令 $g(z)=\dfrac{f(Rz)}{M}$，对 $g(z)$ 用 Schwarz 引理. □

11. 设 $f \in H(B(0,1))$，$f(0)=0$，并且存在 $A>0$，使得 $\operatorname{Re} f(z) \leqslant A$，$\forall z \in B(0,1)$. 证明：

$$|f(z)| \leqslant \frac{2A|z|}{1-|z|}, \quad \forall z \in B(0,1).$$

证明. □

12.(Borel-Carathéodory theorem) 设 $f \in H(B(0,R)) \cap C(\overline{B(0,R)})$，$M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(x)|$，$A(r)=\max\limits_{|z|=r}\operatorname{Re} f(z)$，$0 \leqslant r \leqslant R$. 证明：

$$M(r) \leqslant \frac{2r}{R-r}A(R)+\frac{R+r}{R-r}|f(0)|, \quad \forall r \in [0,R).$$

注记. 它表明解析函数有一个用实部表示的上界.

证明一.

(1) $f(z)=z_0$ 为常值映射. 此时

$$RHS=\frac{2r}{R-r}\operatorname{Re} z_0+\frac{R+r}{R-r}|z_0| \geqslant |z_0|\left(\frac{R+r}{R-r}-\frac{2r}{R-r}\right)=|z_0|=LHS$$

(2) 设 $f(z)$ 不为常值映射，且 $f(0) \neq 0$.

(3)

□

证明二. □

18. 设 $f \in H(B(0,1))$，$f(B(0,1)) \subset B(0,1)$. 证明：

$$\frac{||f(0)|-z|}{1-|f(0)||z|} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{|f(0)|+|z|}{1+|f(0)||z|}.$$

5 习题 5.1 全纯函数的 Laurent 展开

2. 将下列初等函数在指定的域 D 上展开为 Laurent 级数：

(i)

(ii)

(iii) $\operatorname{Log}\dfrac{z-1}{z-2}$，$D=B(\infty,2)$；

解. 容易看出 $\dfrac{z-1}{z-2}$ 在单连通区域 $B(\infty,2)$ 上全纯且不为零，因此可以定义 $\operatorname{Log}\dfrac{z-1}{z-2}$.

$$\begin{aligned}\left(\operatorname{Log}\frac{z-1}{z-2}\right)' &= \frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-2}\\ &= \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)-\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right)\\ &= \frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2^n}{z^{n+1}}\end{aligned}$$

设 $f_0(z)=\log\dfrac{z-1}{z-2}$ 是 $\operatorname{Log}\dfrac{z-1}{z-2}$ 在 $B(\infty,2)$ 上的一个单值分支，其中 $\arg\dfrac{z-1}{z-2}\in[-\pi,\pi)$，则 $\operatorname{Log}\dfrac{z-1}{z-2}$ 的全部单值分支为 $f_k(z)=\log\dfrac{z-1}{z-2}+2k\pi\mathrm{i}$.

由 $f_0'(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2^n}{z^{n+1}}$，$f_0(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{n}\frac{1}{z^n}+c$，其中 c 为待确定的常数. □

6 习题 5.2 孤立奇点

2. 下列初等全纯函数有哪些奇点？指出其类别：

(1) $\dfrac{1}{\sin z - \cos z}$;

(2) $\dfrac{e^{\frac{1}{1-z}}}{e^z - 1}$;

(3) $\sin\dfrac{1}{1-z}$;

- $z = 1$.$\sin\dfrac{1}{1-z}$ 在 $z = 1$ 附近有 Laurent 展开

$$\sin\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3} - \frac{1}{5!}\frac{1}{(z-1)^5} + \cdots,$$

  有无穷多个负幂次项，因此是本性奇点.

- $z = \infty$. 用 $\dfrac{1}{z}$ 替换 z 得 $\sin\dfrac{z}{z-1}$，而 $\lim\limits_{z\to 0}\sin\dfrac{z}{z-1} = 0$. 因此是可去奇点.

(4) $\tan z$;

(5) $\dfrac{e^z}{z(1-e^z)}$;

(6) $e^{\cot\frac{1}{z}}$;

(7) $\sin\left(\dfrac{1}{\cos\dfrac{1}{z}}\right)$;

(8) $e^{\tan z}$.

- $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.
  - 当 z 从 x 轴左侧趋近 $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$，$e^{\tan z}$ 趋近 ∞.
  - 当 z 从 x 轴右侧趋近 $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$，$e^{\tan z}$ 趋近 0.

  因此是本性奇点.

- $z = \infty$. 非孤立奇点.

7 习题 6.1 Schwarz 对称原理

8 习题 6.2 幂级数的全纯开拓

2. 证明：若幂级数的收敛圆周上有其和函数的极点，则该幂级数在其收敛圆周上处处发散.

证明. □

3. 证明：若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的和函数在其收敛圆周上有 1 阶极点，此外再无其他奇异点，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0.$$

证明. □

7. 证明：$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{2^n}$ 的收敛圆周上的每个点皆为其和函数的奇异点.

证明. 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{2^n}$，

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n-1}$$

的奇异点与 f 相同. 假设收敛圆周上某点是 $f'(z)$ 的正则点，则它也是

$$g(z) = zf'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

的正则点，矛盾. □

9 习题 7.1 正规族

1. 设 $\{f_n\}$ 是域 D 上的全纯函数列，并且在 D 上内闭一致有界. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$ 在 D 上处处存在，则 $\{f_n\}$ 在 D 上内闭一致收敛.

Chapter 13

Stein

1 Chapter5 Entire Functions

1.

证二. 设 $a \in \mathbb{D}$，定义 $\varphi_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$

令 $g(z) = \dfrac{f(z)}{\prod_{j=1}^{N} \varphi_{\frac{z_j}{R}}\left(\frac{z}{R}\right)}$，则 $g(z)$ 在 $\overline{B(0,R)}$ 上没有零点，且在 Ω' 上是全纯函数，代入

$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(Re^{i\theta})|$$

$$\log\frac{|f(0)|}{\prod_{j=1}^{N}|\frac{z_j}{R}|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\frac{|f(Re^{i\theta})|}{\prod_{j=1}^{N}|\varphi_{\frac{z_j}{R}}(e^{i\theta})|}d\theta$$

$$\log|f(0)| = \sum_{j=1}^{N}\log|\frac{z_j}{R}| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\theta})|d\theta$$

□

2.Find the order of growth of the following entire functions:

(a) $p(z)$.

(b) e^{bz^n} for $b \neq 0$.

(c) e^{e^z}.