复几何

孙天阳

2023 年 7 月 23 日

目录

Chapter 1

复流形

1 代数准备

共轭空间

定义 1.1. 设 V, W 是复线性空间, 称映射 $f\colon V \to W$ 是反线性映射如果

$$f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2), \quad f(\lambda v)=\bar{\lambda} f(v).$$

例子 1.2. $\iota\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, (z_1,\cdots,z_n)\mapsto(\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_n)$ 是反线性映射.

命题 1.3. 反线性映射之间的复合是线性映射, 反线性映射与线性映射的复合是反线性映射.

定义 1.4. 设 $f\colon V\to W$ 和 $g\colon W\to V$ 是反线性映射. 如果 $g\circ f=\mathrm{Id}_V$, 则称 W 是 V 的共轭空间.

命题 1.5. 设 $f_i\colon V\to W_i$ 都是 V 的共轭空间, 则存在唯一的线性同构 $h\colon W_1\to W_2$ 使得

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ W_1 \arrow[rr, "h"] & & W_2 \end{tikzcd}$$

例子 1.6. 设 V 是复向量空间. 定义 $\overline{V}$ 如下

(1) $\overline{V}$ 与 V 有相同的 Abel 群

(2) $\lambda * v := \bar{\lambda}\cdot v$. 其中 $*$ 表示 $\overline{V}$ 中的数乘, $\cdot$ 表示 V 中的数乘.

则 $\overline{V}$ 是 V 的共轭空间的一种具体实现.

复结构

定义 1.7. 设 V 是一个实线性空间. V 上的一个复结构是指一个映射 $J\in\mathrm{End}(V)$ 满足 $J^2=-\mathrm{Id}_V$.

给定 V 上的一个复结构 J, 我们可以赋予 V 一个复线性空间结构. 因为 V 已经是一个实线性空间, 因此要想知道 V 如何是一个复线性空间, 我们只需要知道 i 如何乘在 V 中的元素上. 定义

$$\mathrm{i}v := J(v)$$

可以验证 V 成为一个复向量空间, 记作 V^J. 反之, 每个复向量空间都决定其底空间上的一个复结构.

例子 1.8. 设 V 是实线性空间, J 是 V 上的复结构, 则 $-J$ 也是 V 上的复结构, 且 $V_{-J}=\overline{V_J}$.

例子 1.9. 设 V 是实线性空间, J 是 V 上的复结构. 定义 V^* 上的复结构如下, 仍记作 J,

$$J\colon V^*\longrightarrow V^*,\quad \alpha\longmapsto J(\alpha)$$

其中 $J(\alpha)(v):=\alpha(J(v))$.

复化

定义 1.10. 设 V 是实线性空间, 定义 $V_{\mathbb{C}}:=V\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$.

定义 1.11. 设 V 是复线性空间. 称反线性映射 $f\colon V\to V$ 是共轭映射, 如果 $f\circ f=\mathrm{Id}_V$.

例子 1.12. $\iota\colon V_{\mathbb{C}}\to V_{\mathbb{C}}, v\otimes z\mapsto v\otimes\bar{z}$ 是共轭映射.

命题 1.13. 设 V 是复线性空间, f 是其上的共轭映射. 设

$$W=\{v\in V\mid f(v)=v\}.$$

则有 $V\cong W\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$.

命题 1.14. 复化与张量积的交换性

命题 1.15. 复化与外积的交换性

复结构与复化

设 V 是实线性空间,J 是 V 上的复结构, 则 J 自然诱导 $V_{\mathbb{C}}$ 上的一个复结构

$$J\colon V_{\mathbb{C}}\longrightarrow V_{\mathbb{C}},\quad v\otimes z\longmapsto J(v)\otimes z.$$

J 的最小多项式为 x^2+1, 没有重根, 因此 $V_{\mathbb{C}}$ 有直和分解

$$V_{\mathbb{C}}\cong V^{1,0}\oplus V^{0,1}$$

其中 $V^{1,0}$ 和 $V^{0,1}$ 分别代表 J 的以 i 和 $-\mathrm{i}$ 为特征值的特征子空间.

命题 1.16. (V,J) 与 $V^{1,0}$ 自然同构.

命题 1.17. *wedge* 的分解.

注记. 有一些书很讨厌是这样的.

引理 1.18.

$$\bigwedge^n(V\oplus W)\cong\bigoplus_{k=0}^{n}\left(\bigwedge^k V\otimes\bigwedge^{n-k}W\right).$$

https://math.stackexchange.com/questions/822470/exterior-power-commutes-with-direct-sum

2 复流形与全纯向量丛

定义 2.1. 设 M 是 Hausdorff 且第二可数的拓扑空间. 称 M 是复流形, 如果存在同胚

$$\varphi_\alpha \colon U_\alpha \subset M \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n$$

使得 $\{U_\alpha\}$ 构成 M 的开覆盖且对任意 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 有 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ 是全纯映射.

例子 2.2. $\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ 是复流形.

证明. 设 $0 \leqslant i, j \leqslant n$, 不妨设 $i < j$.

$$\varphi_i \colon U_i = \{[z_0, \cdots, z_n] \mid z_i \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{C}^n, \quad [z_0, \cdots, z_n] \longmapsto \left(\frac{z_0}{z_i}, \cdots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \cdots, \frac{z_n}{z_i}\right)$$

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \colon \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j), \quad (\xi_1, \cdots, \xi_n) \mapsto \left(\cdots, \frac{\xi_{i-1}}{\xi_i}, 1, \frac{\xi_{i+1}}{\xi_i}, \cdots, \frac{\xi_{j-1}}{\xi_i}, \frac{1}{\xi_i}, \frac{\xi_{j+1}}{\xi_i}, \cdots\right)$$

□

例子 2.3. $Gr(n,k)$ 是复流形. 该例子是上一个例子的推广, 因为 $\mathbb{CP}^n = Gr(n+1, 1)$.

证明. 任取 $V \in Gr(n,k)$, 任取 $\{v_1, \cdots, v_k\}$ 是 V 的一组基, 该组基在 $\mathbb{C}^n$ 的标准基下可表示为

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ v_{k1} & \cdots & \cdots & v_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} \cdot \Big(e_1, \cdots, e_n\Big)$$

其中 $\cdot$ 表示内积. 设 $\{\tilde{v}_1, \cdots, \tilde{v}_k\}$ 是 V 的另一组基, 则存在唯一的元素 $g \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ 使得

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_k \end{pmatrix} \Longrightarrow A = g\tilde{A}.$$

因为 A 是 k 个线性无关向量 $\{v_1, \cdots, v_k\}$ 的矩阵表示, 所以 A 存在不为零的 k 阶子式. 反之, 每给定一个行满秩的 $k \times n$ 阶矩阵 A, 我们就得到一个 k 维线性空间 V, 其中 V 是由 A 的行向量张成的.A 与 $\tilde{A}$ 决定同一个 V 当且仅当它们相差 $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ 中的一个元素. 一个观察是, 如果 A 的某个 k 阶子式不为零, 那么与它决定同一个 V 的 $\tilde{A}$ 的那个 k 阶子式也不为零. 坐标化 $Gr(n,k)$ 的思路是, 我们挑出矩阵表示的第 I 个 k 阶子式不为零的那些 V, 选取一个典范的矩阵表示, 即第 I 个子矩阵为单位阵的矩阵表示, 我们便可以用该矩阵表示的其他坐标分量来坐标化 $Gr(n,k)$ 中的元素.

设 $I = \{i_1, \cdots, i_k\} \subset \{1, \cdots, n\}$. 设 $V_{I^\circ} = \operatorname{span}\{e_j \mid j \notin I\}$. 记

$$U_I = \{V \in Gr(n,k) \mid V \cap V_{I^\circ} = \{0\}\}.$$

断言 U_I 中的元素就是那些矩阵表示的第 I 个 k 阶子式不为零的 V. 承认断言. 定义

$$\varphi_I \colon U_I \longrightarrow \mathbb{C}^{k(n-k)}.$$

□

引理 2.4. $V \in U_I$ 当且仅当 V 的矩阵表示的第 I 个 k 阶子式不为零.

证明. $V \in U_I \iff V \cap V_{I^\circ} = \{0\} \iff \{v_1, \cdots, v_k, e_j \mid j \notin I\}$ 线性无关. □

定义 2.5. 全纯映射

例子 2.6. $\pi\colon \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n$ 是全纯映射.

定义 2.7. 全纯向量丛

参考文献

- 石亚龙复几何第 1 章
- GTM275 第 7.1 节
- G-H 第 0 章第 5 节
- Hatcher 向量丛和 K 理论
- 陈省身第 3 章第 1 节

例子 2.8. 全纯切丛

例子 2.9. 全纯余切丛

3 Grassmannian

定义 3.1. 定义 Plücker 嵌入如下

$$\begin{aligned} \iota\colon Gr(n,k) \longrightarrow \quad & \bigwedge^p \mathbb{C}^n \quad \longrightarrow \quad \mathbf{P}(\bigwedge^p \mathbb{C}^n) \\ E \quad \longmapsto & \, e_1 \wedge \cdots \wedge e_k \longmapsto [e_1 \wedge \cdots \wedge e_p] \end{aligned}$$

其中 $\{e_1, \cdots, e_k\}$ 是 E 的任意一组基.

引理 3.2. 设 $(\beta_1, \cdots, \beta_k) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)A$, 则

$$\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k = \det(A)\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k.$$

引理 3.3. 设 $\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k = \lambda\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$, 其中 $\lambda \neq 0$. 那么存在 A 满足 $\det(A) = \lambda$ 使得

$$(\beta_1, \cdots, \beta_k) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)A.$$

证明.

$$0 = \alpha_i \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k = \alpha_i \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k \Longrightarrow \operatorname{span}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\} = \operatorname{span}\{\beta_1, \cdots, \beta_k\}.$$

□

引理 3.2 说明 Plücker 嵌入是良定的, 引理 3.3 说明 Plücker 嵌入是单射.

命题 3.4. $Gr(n,k)$ 是紧的.

证明. □

4 近复结构和 (p,q) 型微分形式

定义 4.1. 近复结构

引理 4.2. 复矩阵的实行列式等于它的复行列式的模长的平方

引理 4.3. 有近复结构的流形是可定向的

注记. 偶维数, 可定向, 不一定有近复结构, 比如 S^4.

Chapter 2

层论

1 集合的层

定义 1.1. 设 X 是拓扑空间. X 上的一个集合的层是指到 X 的一个局部同胚 $\pi\colon \mathscr{S} \to X$.

命题 1.2. 设 $\pi\colon \mathscr{S} \to X$ 是局部同胚, 则 π 是开映射.

证明. 任给 $\mathscr{S}$ 中开集 U, 要证 $\pi(U)$ 是 X 中开集. 任取 $q \in \pi(U)$, 能找到一个原像 $p \in U$. 因为 π 是局部同胚, 按定义存在 p 的开邻域 V 满足 $\pi(V)$ 是 X 中开集且 π 限制在 V 上是同胚. 因为 $U \cap V \subset V$ 是开集, 所以 $\pi(U \cap V)$ 是开集. 且 $q = \pi(p) \in \pi(U \cap V) \subset \pi(U)$. $\square$

命题 1.3. 设 $\pi\colon \mathscr{S} \to X$ 是局部同胚, 则茎 $\mathscr{S}_x := \pi^{-1}(x)$ 是闭集, 且其子空间拓扑为离散拓扑.

定义 1.4. 设 $(\mathscr{S}', \pi'), (\mathscr{S}, \pi)$ 是 X 上的层. 称连续映射 $\varphi\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ 是层同态如果下列图表交换.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{S}' \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & \mathscr{S} \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

命题 1.5. 设 $\varphi\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ 是层同态, 则 φ 也是局部同胚.

容易看出恒等映射是层同态, 层同态的复合还是层同态. 因此 X 上的层构成一个范畴.

例子 1.6. 设 M 是一个赋予离散拓扑的集合, 那么 $\pi\colon X \times M \to X$ 是 X 上的层.

例子 1.7. 设 $Y \subset X$. 则 $\pi\colon \pi^{-1}(Y) \to Y$ 是 Y 上的层. 其中 Y 和 $\pi^{-1}(Y)$ 都赋予子空间拓扑.

定义 1.8. 称 $\mathscr{T} \subset \mathscr{S}$ 是 $\mathscr{S}$ 的子层, 如果 $\pi\colon \mathscr{T} \to X$ 是 X 上的层.

命题 1.9. $\mathscr{T} \subset \mathscr{S}$ 是 $\mathscr{S}$ 的子层当且仅当 $\mathscr{T}$ 是 $\mathscr{S}$ 中的开集.

例子 1.10. 设 $(\mathscr{S}', \pi'), (\mathscr{S}, \pi)$ 是 X 上的层. 我们定义

$$\mathscr{S} \oplus \mathscr{S}' := \bigcup_{x \in X} \mathscr{S}_x \times \mathscr{S}'_x$$

在其上赋予 $\mathscr{S} \times \mathscr{S}'$ 的子空间拓扑, 则 $\tilde{\pi}\colon \mathscr{S} \oplus \mathscr{S}' \to X$ 是 X 上的层.

例子 1.11.

2 Čech 上同调

Chapter 3

Kähler 流形

1 代数准备

我们在本节中厘清一些初学者容易困惑的问题.

设 M 是 n 维复流形, 则它也是 $2n$ 维实流形. 取 $p \in M$ 的全纯坐标卡

$$(U, z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, \cdots, z_n = x_n + \mathrm{i}y_n).$$

- M 在 p 处的全纯切空间 $T_p^h M = \mathrm{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \dfrac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial z^n} \right\}$.
- M 在 p 处的实切空间 $T_p^{\mathbb{R}} M = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \dfrac{\partial}{\partial x^1}, \dfrac{\partial}{\partial y^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}, \dfrac{\partial}{\partial y^n} \right\}$
- M 的复流形结构自然诱导了 $T_p^{\mathbb{R}} M$ 上的一个复结构 J: $\dfrac{\partial}{\partial x^i} \mapsto \dfrac{\partial}{\partial y^i}, \dfrac{\partial}{\partial y^i} \mapsto -\dfrac{\partial}{\partial x^i}$
- $T_p^h M \cong (T_p^{\mathbb{R}} M, J)$, $\dfrac{\partial}{\partial z^i} \mapsto \dfrac{\partial}{\partial x^i}$. 这个同构很重要, 是理解很多混淆之处的关键.

接下来我们讨论三样东西：黎曼度量 g、厄米度量 h 和基本 2-形式 ω. 我们对于实线性空间上的内积很熟悉, 它是空间上的对称、正定、双线性函数. 我们对于复线性空间上的内积也很熟悉，它是空间上关于第一分量线性、共轭对称、正定的二元函数. 关于线性空间上的 g, h, ω 之间的关系, 我推荐阅读 Huybrechts 的复几何导论的第 1.2 节. 在此我做一个简述

- 设我们给定了一个复线性空间及其上的内积 h, 忘记空间本身的复线性空间结构, 考虑其下的实线性空间结构, 取 g 为 h 的实部, 取 ω 为 h 的负虚部. 则 g 成为实线性空间上的内积, 并且 g 与复结构相容.
- 设我们有一个实线性空间, 有其上的复结构 J, 有其上的内积 g 并且 g 与 J 是相容的. 那么我们定义 $\omega(u, v) = g(Ju, v)$, 定义 $h = g - \mathrm{i}\omega$, 则 h 成为复线性空间上的内积.
- 设我们有一个实线性空间, 有其上的复结构 J, 有其上的内积 g 并且 g 与 J 是相容的. 考虑实线性空间的复化，考虑 g 的复化 $g^{\mathbb{C}}$，g 的复化方式是对第一分量按线性延拓，对第二分量按共轭线性延拓. 这样我们就得到了 $T_p^{\mathbb{C}} M \times T_p^{\mathbb{C}} M$ 上的内积，它可以限制到 $T_p^h M$ 上. 这种方式得到的内积是上一种方式得到的内积的 $\dfrac{1}{2}$.

在上面的讨论中, g,h,ω 作为映射该如何理解已经非常清楚. 我主要想讨论的是 g,h,ω 的具体表达式的理解与计算问题. 首先是 h, 我们知道张量积可以用来描述双线性，但是复内积关于第一分量线性，关于第二分量共轭线性，我们该如何描述它呢？一种似乎通用的方式是，利用复线性空间 V 与其共轭空间 $\overline{V}$ 之间的共轭线性的双射，将关于第一分量线性第二分量共轭线性的映射

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

等同于双线性映射

$$V \times \overline{V} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

而后者可以用张量积的方式来描述. 具体到我们的情况，因为 $\overline{T_p^h M}$ 可自然视为 $T_p^h M$ 的共轭空间，因此我们在一个坐标邻域内将 h 写为

$$h = h_{\alpha\bar{\beta}} \mathrm{d}z^\alpha \otimes \mathrm{d}\bar{z}^\beta.$$

其中 $h_{\alpha\bar{\beta}}$ 在每一点处都是厄米矩阵. 我们必须小心地来理解 $\mathrm{d}\bar{z}^\beta$. 在这里，它不再是它的本意，而是被用来标志共轭线性，具体来说，在点 p 处, h_p 可视作

$$\begin{aligned} h_p\colon T_p^h M \times T_p^h M &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial z^\beta} &\longmapsto h_{\alpha\bar{\beta}} \end{aligned}$$

再关于第一个分量线性，关于第二个分量共轭线性作延拓. 如果你用 $\mathrm{d}\bar{z}^\beta$ 的本意来理解，它吞进一个 $T_p^h M$ 里的元素只能是零，上面的映射是荒谬的. 上面实际发生的事情是，将第二分量先变为它的共轭，比如 $\dfrac{\partial}{\partial z^\beta}$ 先变为 $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta}$，再被 $h_{\alpha\bar{\beta}} \mathrm{d}z^\alpha \otimes \mathrm{d}z^\beta$ 作用. 这时或许有人会问，那我们干脆就把内积考虑成 $V \times \overline{V}$ 上的函数不行吗？好问题，我暂时还回答不好. 想清再写.

如果事情到此为止了，那我就不会混乱了，悲剧的是，$h = h_{\alpha\bar{\beta}} \mathrm{d}z^\alpha \otimes \mathrm{d}\bar{z}^\beta$ 字面上的意义，也值得关注. 这是因为，有人会对 h 作一些形式计算，但当你写下 $\mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}y$ 的时候，你就已经在使用 $\mathrm{d}\bar{z}$ 本身的意义了！更令人匪夷所思的是，这样的形式计算还没有得出错误的结论. 我希望仔细检查这个过程中发生了什么.

之前我们提到过，T_p^M 自然同构于 $(T_p^{\mathbb{R}} M, J)$. 在下面我们将灵活地将 h 视为 T_p^M 上的内积或 $(T_p^{\mathbb{R}} M, J)$ 上的内积. 首先，设

$$h = h_{\alpha\bar{\beta}} \mathrm{d}z^\alpha \otimes \mathrm{d}\bar{z}^\beta.$$

我们希望计算 h 的实部 g 的局部表达. 因为是算 g，所以用 $T_p^{\mathbb{R}} M$ 的基会方便一些.

$$g(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}) = \Re h(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial z^\beta}) = \Re h_{\alpha\bar{\beta}}$$

$$g(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}) = \Re h(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial z^\beta}) = \Re h_{\alpha\bar{\beta}}$$

因此

$$g = \Re h_{\alpha\bar{\beta}} (\mathrm{d}x^\alpha \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x^\beta + \mathrm{d}y^\alpha \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y^\beta) + \Im h_{\alpha\bar{\beta}} (\mathrm{d}x^\alpha \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y^\beta - \mathrm{d}y^\alpha \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x^\beta)$$

形式计算，哪怕你能算出来看起来差不多的东西，tensor 也不是在 R 上 tensor，也是在 C 上 tensor，这里面的差别，我也是刚刚才意识到，还没想清楚.

考虑 $\bar{h}$, 它将 h 的结果取个共轭. 首先, 容易看出 $\bar{h}$ 关于第一个分量共轭线性，关于第二个分量线性. 其次，它作用在 $(\dfrac{\partial}{\partial z^\alpha}, \dfrac{\partial}{\partial z^\beta})$ 上的值为 $\bar{h}_{\alpha\bar{\beta}} = h_{\beta\bar{\alpha}}$. 因此

$$\bar{h} = h_{\beta\bar{\alpha}} \mathrm{d}\bar{z}^\alpha \otimes \mathrm{d}z^\beta = h_{\alpha\bar{\beta}} \mathrm{d}\bar{z}^\beta \otimes \mathrm{d}z^\alpha$$

$$\omega = \frac{\mathrm{i}}{2}(h - \bar{h}) = \frac{\mathrm{i}}{2} h_{\alpha\bar{\beta}}(\mathrm{d}z^\alpha \otimes \mathrm{d}\bar{z}^\beta - \mathrm{d}\bar{z}^\beta \otimes \mathrm{d}z^\alpha) = \frac{\mathrm{i}}{2} h_{\alpha\bar{\beta}} \mathrm{d}z^\alpha \wedge \mathrm{d}\bar{z}^\beta$$

我们考虑

$$h + \bar{h} \colon T_p^h M \times T_p^h M \longrightarrow \mathbb{R}$$

因为 h 与 $\bar{h}$ 的取值互为共轭，因此最终结果实际上是实值的. 回忆 $(T_p^{\mathbb{R}} M, J)$ 同构于 $T_p^h M$.

- $h + \bar{h}$ 当然关于两个分量都是实线性的.
- $h + \bar{h}$ 是对称的.
- 正定吗?

定义 1.1. *Kahler 流形*

2 代数准备

定义 2.1. 设 V 是复线性空间, 称 $h\colon V \times V \to \mathbb{C}$ 是其上的内积, 如果

(1) $h(\lambda v_1 + v_2, \mu v_3 + v_4) = \lambda\bar{\mu}h(v_1, v_3) + \lambda h(v_1, v_4) + \bar{\mu}h(v_2, v_3) + h(v_2, v_4)$.

(2) $h(v_1, v_2) = \overline{h(v_2, v_1)}$.

(3) $h(v, v) \geqslant 0$, 除非 $v = 0$.

命题 2.2. 设 V 是复线性空间, h 是其上的内积, 则 $g = \operatorname{Re} h$ 是 V 作为实线性空间上的内积.

证明.

(1) 因为只考虑 V 的实线性空间结构, 所以 λ, μ 均为实数.

$$g(\lambda v_1 + v_2, \mu v_3 + v_4) = \lambda\mu g(v_1, v_3) + \lambda g(v_1, v_4) + \mu g(v_2, v_3) + g(v_2, v_4).$$

(2) $h(v_1, v_2) = \overline{h(v_2, v_1)} \Longrightarrow g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1)$.

(3) $h(v, v) \in \mathbb{R} \Longrightarrow g(v, v) = h(v, v) \geqslant 0$, 除非 $v = 0$.

□

命题 2.3. 设 J 是由 V 的复线性空间结构诱导的 V 上的复结构, 则 $g(Jv_1, Jv_2) = g(v_1, v_2)$.

证明. $g(Jv_1, Jv_2) = \overline{h(Jv_1, Jv_2)} = \overline{\mathrm{i}(-\mathrm{i})h(v_1, v_2)} = g(v_1, v_2)$. □

命题 2.4. 设 V 是复线性空间, h 是其上的内积, 则 $\omega = -\operatorname{Im} h$ 是 V 上的反对称双 $\mathbb{R}$-线性函数.