傅里叶分析

孙天阳

中国科学技术大学数学科学学院

tysun@mail.ustc.edu.cn

2024 年 11 月 9 日

目录

Chapter 1

Fourier 级数的基本性质

1 Fourier 级数的唯一性

Stein 给这小节起名为“Fourier 级数的唯一性”，不过我怎么品都觉得这个名字起反了，但是我也想不出一个合适的名字.

Stein 的原话是这样说的：

> If we were to assume that the Fourier series of function f converge to f in an appropriate sense, then we could infer that a function is uniquely determined by its Fourier coefficients.

要论“Fourier 级数的唯一性”那应该是说同一个函数 f 不可能有两个不同的 Fourier 级数吧，不过这里讨论的是如果两个函数的 Fourier 级数相同，那么它们两个就是同一个函数. 也就是说从函数全体映射到 Fourier 级数全体的这个映射是一个单射.

但是在不对函数空间提任何要求的情况下上面这句话显然是错的.Fourier 系数的计算是积分运算，因此如果我们仅仅是修改函数在有限点处的值，是不会影响到 Fourier 系数的结果的. 但是，我们有如下积级的结果.

定理 1.1. 设 f 是圆周上的可积函数，并且 $\hat{f}(n)=0$ 对任意 $n\in\mathbb{Z}$ 成立，那么在 f 的任一连续点 θ_0 处有 $f(\theta_0)=0$.

证明. 我们首先假设 f 是实值的.

不失一般性，设 f 定义在 $[-\pi,\pi]$ 上，$\theta_0=0$，并且 $f(0)>0$.

现在的想法是构造一族三角多项式 $\{p_k\}$ 在 0 处 peak，使得

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_k(\theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta\to\infty,\ \text{as k}\to\infty.$$

这样就得到了我们想要的矛盾因为根据定理的假设这些积分应该为 0.

因为 f 在 0 处连续，我们能够选择 $\delta\in(0,\frac{\pi}{2}]$ 使得当 $|\theta|<\delta$ 时就有 $f(\theta)>\dfrac{f(0)}{2}$.（这里可以暂且理解为要选取 $\delta>0$，至于 $\delta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 的作用会在之后看到.）

设

$$p(\theta)=\varepsilon+\cos\theta,$$

其中 ε 要选取得足够小使得 $|p(\theta)| < 1-\dfrac{\varepsilon}{2}$ 对 $\delta \leqslant |\theta| \leqslant \pi$ 成立.（看一下为什么我们能选出这样的 ε. 首先 $p(\theta)$ 在 $[0,\pi]$ 上是单调递减的，因此我们只需要检查一下 $p(\theta)$ 在 δ 处和 π 处的值.$|p(\pi)| = |\varepsilon-1| = 1-\varepsilon < 1-\dfrac{\varepsilon}{2}$ 恒成立.$|p(\delta)| = |\varepsilon+\cos\delta| = \varepsilon+\cos\delta < 1-\dfrac{\varepsilon}{2}$，即 $\cos\delta < 1-\dfrac{3}{2}\varepsilon$，因为 $\cos\delta < 1$ 总是成立的，所以我们可以塞进去足够小的 ε. 要注意到我们这里面虽然享受了 $\delta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ 带来的 $\cos\delta \geqslant 0$ 的在去绝对值时的方便，但这并不是本质的.）

接着，选取 $\eta \in (0,\delta)$ 使得当 $|\theta| < \eta$ 时有 $p(\theta) \geqslant 1+\dfrac{\varepsilon}{2}$.

这样，$[-\pi,\pi]$ 就被分成了三部分，$|\theta| < \eta, \eta < |\theta| < \delta$ 和 $\delta < |\theta| < \pi.\varepsilon,\delta,\eta$ 的选取使得 $p(\theta)$ 在第一部分比 1 稍大一点，在第三部分比 1 稍小一点，虽然这个值差得不多，但是通过构造

$$p_k(\theta) = [p(\theta)]^k,$$

就可以把这个很小的差异放大到很大.

接下来我们分别估计积分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)p_k(\theta)\mathrm{d}\theta$ 在三部分上的值.

首先，在第三部分上，由于 $p(\theta)$ 比 1 稍小一点，$p_k(\theta)$ 就随着 k 的增大趋向于 0 了，

$$\left|\int_{\delta\leqslant|\theta|\leqslant\pi} f(\theta)p_k(\theta)\mathrm{d}\theta\right| \leqslant 2\pi B\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^k.$$

其中 B 是 $f(\theta)$ 的一个上界.

其次，在第一部分上，由于 $p(\theta)$ 比 1 稍大一点，$p_k(\theta)$ 就随着 k 的增大趋向于 $+\infty$ 了，

$$\int_{|\theta|<\eta} f(\theta)p_k(\theta)\mathrm{d}\theta \geqslant 2\eta\frac{f(0)}{2}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^k.$$

第一部分和第三部分是我们构造中的主角，但是我们也不能扔下第二部分不管. 而这里才是 $\delta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ 这个要求真正发挥作用的地方，它使得 $p(\theta)$ 在 $|\theta| < \delta$ 是恒正的，而 δ 的选取自然也保证了 $f(\theta)$ 在 $|\theta| < \delta$ 是恒正的，因此

$$\int_{\eta\leqslant|\theta|<\delta} f(\theta)p_k(\theta)\mathrm{d}\theta \geqslant 0,$$

我们不期待这部分承担趋向于 $+\infty$ 的责任，只希望它不要扯后腿就好.

因此，

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_k(\theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta \to \infty,\ \text{as k} \to \infty,$$

这样就完成了 f 是实值函数时的证明.

一般地，将 f 写作 $f(\theta) = u(\theta)+\mathrm{i}v(\theta)$，其中 u 和 v 是实值函数. 如果我们定义 $\overline{f}(\theta) = \overline{f(\theta)}$，那么

$$u(\theta) = \frac{f(\theta)+\overline{f}(\theta)}{2}, v(\theta) = \frac{f(\theta)-\overline{f}(\theta)}{2\mathrm{i}}.$$

而

$$\begin{aligned}
\hat{\overline{f}}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(n)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(n)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx}}\mathrm{d}x \\
&= \overline{\hat{f}(-n)} = 0,
\end{aligned}$$

由此我们推出 u 和 v 的 Fourier 系数也都为零，这样就完成了证明. □

2 卷积

给定两个 2π-周期可积函数 f, g, 我们定义它们的卷积

$$(f * g)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

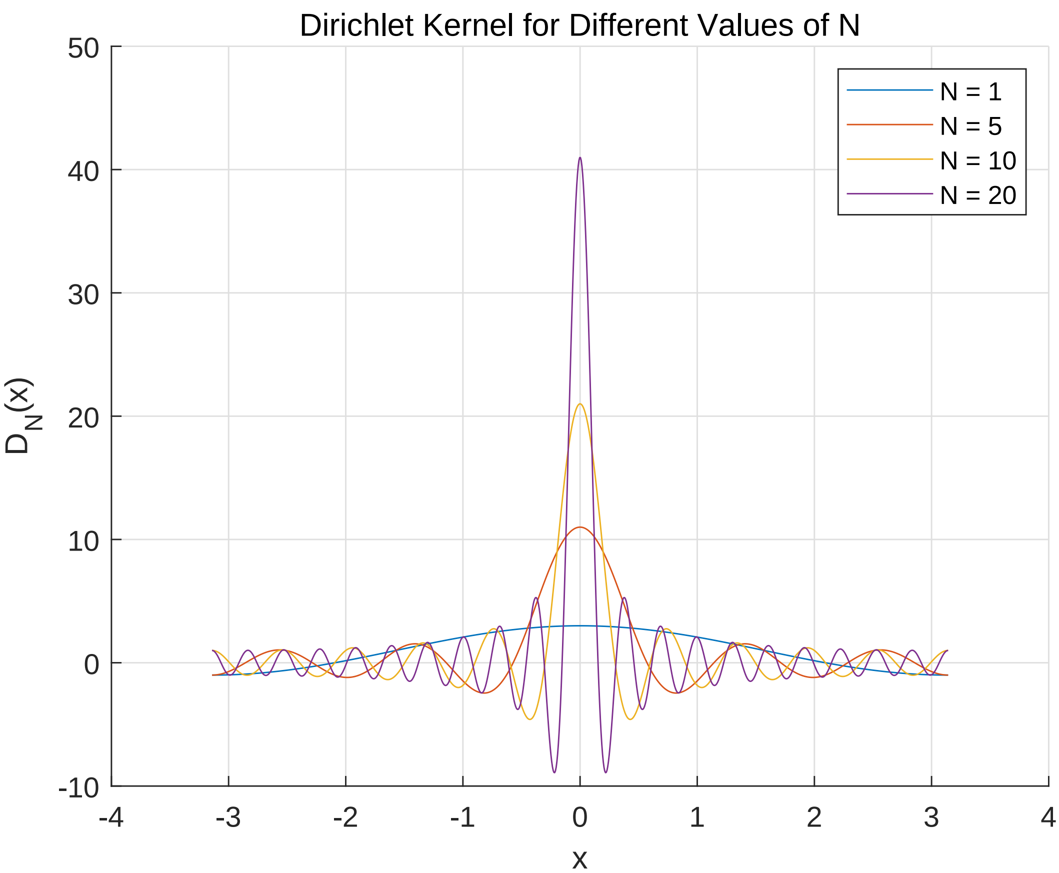
卷积以如下方式自然而然出现在 Fourier 级数理论中

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\mathrm{e}^{-iny}\mathrm{d}y\right)\mathrm{e}^{inx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(\sum_{n=-N}^{N}\mathrm{e}^{in(x-y)}\right)\mathrm{d}y = (f * D_N)(x)$$

其中

$$D_N = \sum_{n=-N}^{N}\mathrm{e}^{inx} = 1 + \sum_{n=1}^{N} 2\cos nx = \frac{\sin((2N+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

被称作 Dirichlet 核, 其函数图像如下所示



因此想要理解 $S_N(f)$ 的行为可以转化为理解卷积 $f * D_N$ 的行为.

命题 2.1. 设 f, g 和 h 都是以 2π 为周期的可积函数. 那么

(i) $f * (g+h) = (f*g) + (f*h)$.

(ii) $(cf) * g = c(f*g) = f * (cg), \forall\ c \in \mathbb{C}$.

(iii) $(f*g) = (g*f)$.

(iv) $(f*g)*h = f*(g*h)$.

(v) $f*g$ 是连续函数.

(vi) $\widehat{f*g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$.

注记. 前四条描述了卷积的代数性质：线性，交换性，结合性.

第五条给出了一条重要的原则，卷积 $f*g$ 比 f 或 g 的正则性更好.

第六条在 Fourier 级数的研究中是关键的. 一般来说，函数的逐点乘积 fg 的傅里叶系数并不是 f 和 g 的傅里叶系数的乘积. 但是，第六条告诉我们如果我们把两个函数的逐点乘积替换为两个函数的卷积，那么这就是成立的.

注记. 如果将以 2π 为周期的可积函数的全体视为一个线性空间，那么函数的逐点相乘和函数的卷积都同样得到一个以 2π 为周期的可积函数，因此都是该线性空间上的一个二元运算，使得该线性空间成为不同的代数. 注意到这两个二元运算都具有良好的性质，比如线性、结合性和交换性，但卷积在 Fourier 分析中会扮演更重要的角色.

证明. (iii)

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \\ &= \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)g(x-z)\mathrm{dz}\end{aligned}$$

$\square$

3 好核

4 Cesaro 求和与 Abel 求和

4.1 Poisson 核

$$f(\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

$$A_r(f)(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, r \in [0,1)$$

- a_n 有界

$$\begin{aligned} |a_n| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)||\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}|\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|\mathrm{d}\theta =: M \end{aligned}$$

- $A_r(f)(\theta)$ 绝对收敛

$$\begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}|a_n||\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}| \\ =&\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}|a_n| \\ \leqslant& M\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} < +\infty \end{aligned}$$

- 上面的绝对收敛显然是一致的，因此 $A_r(f)(\theta)$ 也一致收敛

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

$$\begin{aligned} A_r(f)(\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) r^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\theta-\varphi)}\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\varphi) r^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\theta-\varphi)}\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\theta-\varphi)}\mathrm{d}\varphi \\ &= (f * P_r)(\theta) \end{aligned}$$

5 练习

6.Left f be the function defined on $[-\pi,\pi]$ by $f(\theta)=|\theta|$.

(a) Draw the graph of f.

(b) Calculate the Fourier coefficients of f, and show that

$$\hat{f}(n)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & \text{if } n=0\\ \dfrac{-1+(-1)^n}{\pi n^2} & \text{if } n\neq 0\end{cases}$$

(c) What is the Fourier series of f in terms of sines and cosines?

(d) Taking $\theta=0$, prove that

$$\sum_{n\ odd\ \geqslant 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}\quad\text{and}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

证明. 当 $n=0$ 的时候，

$$\hat{f}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\theta|\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}$$

当 $n\neq 0$ 的时候，

$$\begin{aligned}\hat{f}(n)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\theta|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\left[F(\pi)-F(0)-F(0)+F(-\pi)\right]\\&=\frac{-1+(-1)^n}{\pi n^2}=\begin{cases}0 & n=2k\\ \dfrac{-2}{\pi(2k-1)^2} & n=2k-1\end{cases}\end{aligned}$$

其中 $F(\theta)=\dfrac{\theta}{-\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}+\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}}{n^2}$，是 $\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}$ 的原函数.

因此

$$\begin{aligned}f(x)&\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\hat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}+\hat{f}(-n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\end{aligned}$$

□

10.Suppose f is a periodic function of period 2π which belongs to the class C^k.Show that

$$\hat{f}(n)=O(\frac{1}{|n|^k})\text{ as }|n|\to\infty$$

证明.

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}n}\left[f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\mathrm{d}f(x)\right] \\ &= -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

归纳可证. □

11.Suppose that $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ is a sequence of Riemann integrable functions on the interval $[0,1]$ such that

$$\int_0^1 |f_k(x) - f(x)|\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{as } k \to \infty.$$

Show that $\hat{f}_k(n) \to \hat{f}(n)$ uniformly in n as $k \to \infty$.

6 问题

1.One can construct Riemann integrable functions on $[0,1]$ that have a dense set of discontinuities as follows.

(a) Let $f(x)=0$ when $x<0$, and $f(x)=1$ if $x\geqslant 0$. Choose a countable dense sequence $\{r_n\}$ in $[0,1]$. Then, show that the function

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}f(x-r_n)$$

is integrable and has discontinuities at all points of the sequence $\{r_n\}$.[Hint;F is monotonic and bounded.]

(b) Consider next

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n}g(x-r_n),$$

where $g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ when $x\neq 0$, and $g(0)=0$. Then F is integrable, discontinuous at each $x=r_n$, and fails to be monotonic in any subinterval of $[0,1]$.[Hint:Use the fact that $3^{-k}>\sum_{n>k}3^{-n}$.]

(c) The original example of Riemann is the function

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)}{n^2},$$

where $(x)=x$ for $x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ and (x) is continued to $\mathbb{R}$ by periodicity, that is, $(x+1)=(x)$. It can be shown that F is discontinuous whenever $x\dfrac{m}{2n}$, where $m,n\in\mathbb{Z}$ with m odd and $n\neq 0$.

证明. (a) 引入 $\dfrac{1}{n^2}$ 是为了保证级数的一致收敛性，由 Weierstrass 定理易证.

要想证明 $F(x)$ 在某个 r_k 处不连续，只需证明

$$F_k(x)=\sum_{n\neq k}\frac{1}{n^2}f(x-r_n)$$

在 r_k 处连续，由逐项取极限的定理，这是显然的.

(b) 这里 $F(x)$ 不再是单调函数，因此不能再像上一问一样论证可积性，不过可以像上一问一样论证 $F(x)$ 在 $\{r_n\}$ 中的点处不连续，而在非 $\{r_n\}$ 的点处是连续的. 由于 $\{r_n\}$ 可数，故零测，因此由勒贝格定理 F 可积.

任取 $[0,1]$ 的一个开子区间，由 $\{r_n\}$ 稠密可得该子区间中至少包含一点 r_k，我们证明 $F(x)$ 在 r_k 处不单调.

单看一个 $3^{-k}g(x-r_k)$，它显然在 r_k 处不单调了，不管离 r_k 多近，我都可以找到取值 3^{-k} 和 -3^{-k} 的点.

啊，反正我没想清楚他这个 Hint 该怎么用. 我觉得它的意思是让我用 $3^{-k}g(x-r_k)$ 的振幅来控住后面的所有的项，依旧振荡，但振幅不再正负对称. 但是前面的项又该怎么论证呢？我想

的是靠前面这些项在 r_k 处连续，那我就总可以找到足够小的区间，使得这个连续函数在这个区间上的振幅足够小. 但是这个论证难道对后面的项就不成立了吗？我觉得也没有问题啊.

(c)

□

2.Let D_N denote the Dirichlet kernel

$$D_N(\theta)=\sum_{k=-N}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}=\frac{\sin\left(N+\dfrac{1}{2}\right)\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2}},$$

and define

$$L_N=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(\theta)|\mathrm{d}\theta.$$

(a) Prove that

$$L_N\geqslant c\log N$$

for some constant $c>0$.[Hint:Show that $|D_N(\theta)|\geqslant c\dfrac{\sin\left(N+\dfrac{1}{2}\right)\theta}{|\theta|}$, change variables, and prove that

$$L_N\geqslant c\int_{\pi}^{N\pi}\frac{|\sin\theta|}{|\theta|}\mathrm{d}\theta+O(1).$$

Write the integral as a sum $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}$. To conclude,use the fact that $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geqslant c\log n$.]A more careful estimate gives

$$L_N=\frac{4}{\pi^2}\log N+O(1).$$

(b) Prove the following as a consequence:for each $n\geqslant 1$

证明.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(\theta)|\mathrm{d}\theta\\
\geqslant&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin\left(N+1/2\right)\theta|}{|\theta|}\mathrm{d}\theta\\
=&\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{|\sin\left(N+1/2\right)\theta|}{\theta}\mathrm{d}\theta\\
=&\frac{2}{\pi}\int_{0}^{(N+1/2)\pi}\frac{|\sin\theta|}{\theta}\mathrm{d}\theta\\
=&\frac{2}{\pi}\int_{0}^{N\pi}\frac{|\sin\theta|}{\theta}\mathrm{d}\theta+O(1)\\
=&\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin\theta|}{\theta}\mathrm{d}\theta+O(1)\\
\geqslant&\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin\theta|\mathrm{d}\theta+O(1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k+1} + O(1) \\
&> \frac{4}{\pi^2} \log(N+1) + O(1) \\
&> \frac{4}{\pi^2} \log N + O(1)
\end{aligned}
$$

□

Chapter 2

Fourier 级数的收敛性

Chapter 3

Fourier 级数的应用

Chapter 4

$\mathbb{R}$ 上的 Fourier 变换

1 Fourier 变换的基本理论

1.1 实直线上函数的积分

定义 1.1. 称 $\mathbb{R}$ 上的函数 f 为适度下降的，如果 f 是连续的，并且存在常数 $A>0$ 使得

$$|f(x)| \leqslant \frac{A}{1+x^2}$$

对于任意 $x \in \mathbb{R}$ 成立.

注记. 事实上，将上面的指数 2 替换为 $1+\varepsilon$ 也能达到我们的目的，其中 ε 是任意大于零的正数.

我们将函数在 $\mathbb{R}$ 上积分的基本性质总结在一个命题中.

命题 1.1.

(i) 线性：如果 $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ 并且 $a, b \in \mathbb{C}$，那么

$$\int_{-\infty}^{\infty}(af(x)+bg(x))\mathrm{d}x = a\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x + b\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{d}x.$$

(ii) 平移不变性：对于任意 $h \in \mathbb{R}$，我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-h)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

(iii) 伸缩：设 $\delta > 0$，那么

$$\delta\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

(iv) 连续性：设 $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$，那么

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-h)-f(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

注记. 从 (iv) 的证明中能够体会到我们必须对 f 在无穷远处的衰减性提出要求.

1.2 Fourier 变换的定义

如果 $f \in \mathcal{R}$，我们定义它的 Fourier 变换为

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x.$$

当然，$|\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}| = 1$，所以被积函数也是适度下降的，因此这个积分是有意义的.

事实上，上面的这个观察说明了 $\hat{f}$ 是有界的，并且，一个简单的论证能够说明 $\hat{f}$ 是连续的，并且当 $|\xi|$ 趋于 ∞ 时趋于零，参见练习 5. 但是，上面的定义并没有保证 $\hat{f}$ 也是适度下降的或者具有某种衰减性. 特别地，到目前为止还不甚清楚如何让积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}\xi$ 和相应的 Fourier 反演公式有意义. 为了补救，我们引入一个由 Schwartz 考虑的更加精细的函数空间，它是很适合用来建立 Fourier 变换的最初的性质的.

选择 Schwartz 空间的动机是一个将 $\hat{f}$ 的衰减性与 f 的正则性联系起来的重要原理：f 的正则性越高，$\hat{f}$ 衰减得就越快. 一个反映这个原理的例子在练习 3 中给出.

1.3 Schwartz 空间

定义 1.2. 称一个函数 f 是速降的，如果

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |f(x)| < \infty \forall\ k \geqslant 0$$

称各阶导数都是速降函数的光滑函数全体为 $\mathbb{R}$ 上的 *Schwartz* 空间，记作 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

注记. 容易验证 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 构成 $\mathbb{C}$ 上的向量空间. 除此之外，如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，那么

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

这反映了 *Schwartz* 空间的一个重要特征：关于求导运算和多项式乘法封闭.

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 中一个重要的函数类是“冲击函数”，它们在有界区域外为零，参见练习 4.

1.4 $\mathcal{S}$ 上的 Fourier 变换

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 的 Fourier 变换被定义为

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x.$$

在下面的命题中我们列举了 Fourier 变换的一些简单性质. 我们用记号

$$f(x) \longrightarrow \hat{f}(\xi)$$

表示 $\hat{f}$ 是 f 的 Fourier 变换.

命题 1.2. 如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，那么

(i) $f(x+h) \longrightarrow \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}h\xi}, \forall\ h \in \mathbb{R}.$

(ii) $f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xh} \longrightarrow \hat{f}(\xi+h), \forall\ h \in \mathbb{R}.$

(iii) $f(\delta x) \longrightarrow \delta^{-1}\hat{f}(\delta^{-1}\xi), \forall\ \delta > 0.$

(iv)

(v)

证明. (i)

$$\begin{aligned} f(x+h) \longrightarrow & \int_{-\infty}^{\infty} f(x+h)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi}\mathrm{d}x \\ =& \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(x-h)\xi}\mathrm{d}x \\ =& \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi}\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} h\xi} \\ =& \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} h\xi} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi+h) =& \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x(\xi+h)}\mathrm{d}x \\ =& \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} xh}\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi}\mathrm{d}x \\ =& \widehat{f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} xh}} \end{aligned}$$

(iii)

(iv)

(v)

□

定理 1.1. 如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，那么 $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

作为好核的高斯函数族

通过直接计算来证明 $f(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}$ 的 Fourier 变换仍为它自己. 其中 Fourier 变换的定义为

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi}\mathrm{d}x.$$

证明.

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) =& \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi}\mathrm{d}x \\ =& \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left[\pi x^2 + 2\pi \mathrm{i} x\xi\right]}\mathrm{d}x \\ =& \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left[(\sqrt{\pi}x)^2 + 2\sqrt{\pi}x\sqrt{\pi}\mathrm{i}\xi + (\sqrt{\pi}\mathrm{i}\xi)^2 - (\sqrt{\pi}\mathrm{i}\xi)^2\right]}\mathrm{d}x \\ =& \mathrm{e}^{-\pi\xi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\sqrt{\pi}x + \sqrt{\pi}\mathrm{i}\xi\right)^2}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

□

1.5 Fourier 反演

下一个结果是一个有时被称做乘法公式的等式.

命题 1.3. 如果 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，那么

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)g(y)\mathrm{d}y.$$

证明.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}yx}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xy}\mathrm{d}x\right)g(y)\mathrm{d}y$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xy}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因此所谓的乘法公式本质上是积分交换次序问题. □

1.6 Plancherel 等式

定理 1.2 (Plancherel)**.** 如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，那么 $\|\hat{f}\| = \|f\|$.

证明. 欲证的东西是

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi.$$

设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，定义

$$f^\flat(x) = \overline{f(-x)}.$$

那么

$$\begin{aligned}
\widehat{f^\flat}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-x)}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-x)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\xi}}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}}\mathrm{d}x \\
&= \overline{\hat{f}(\xi)}.
\end{aligned}$$

现在设

$$h = f * f^\flat = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t-x)}\mathrm{d}t,$$

注意到

$$h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\mathrm{d}t = \|f\|.$$

而

$$\begin{aligned}
h(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\widehat{f^\flat}(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi \\
&= \|\hat{f}\|
\end{aligned}$$

□

2 Poisson 求和公式

给定一个适度下降函数 f，我们可以构造

$$F_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n)$$

- $f(x) \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$
- $F_1(x) = f(x) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(x+n) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(x-n)$
  - $F_1(x)$ 一致收敛当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(x+n)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(x-n)$ 一致收敛
  - 当 $x \in [-A, A]$ 时，$f(x+n) \leqslant \dfrac{1}{1+(x+n)^2} \leqslant \dfrac{1}{1+(n-A)^2}$
  - $\sum\limits_{n>A+1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+(n-A)^2} \leqslant \sum\limits_{m=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+m^2} < +\infty$
  - 由以上证明还可以发现 $F_1(x)$ 是绝对收敛的，因此可以改变求和次序，从而易知 $F_1(x)$ 以 1 为周期

3 练习

3.The following exercise illustrates the principle that the decay of $\hat{f}$ is related to the continuity properties of f.

(a) Suppose that f is a function of moderate decrease on $\mathbb{R}$ whose Fourier thransform $\hat{f}$ is continuous and satisfies

$$\hat{f}(\xi) = O\left(\frac{1}{|\xi|^{1+\alpha}}\right) \quad \text{as } |\xi| \to \infty$$

for some $0 < \alpha < 1$.Prove that f satisfies a Hölder condition of order α, that is, that

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant M|h|^{\alpha}$$

for some $M > 0$ and all $x, h \in \mathbb{R}$.

(*b*) Let f be a continuous function on $\mathbb{R}$ which vanishes for $|x| \geqslant 1$, with $f(0) = 0$, and which is equal to $\dfrac{1}{\log(1/|x|)}$ for all x in a neighborhood of the origin. Prove that $\hat{f}$ is not of moderate decrease. In fact,there is no $\varepsilon > 0$ so that $\hat{f}(\xi) = O\left(\dfrac{1}{|\xi|^{1+\varepsilon}}\right)$ as $|\xi| \to \infty$.

证明. (a) 由 Fourier 反演公式，

$$f(x+h) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x\xi} \left(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} h\xi} - 1\right) \mathrm{d}\xi$$

$\hat{f}$ 上的条件等价于

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant \frac{A}{1+|\xi|^{1+\alpha}}, \forall\ \xi \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned}
|\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} h\xi} - 1| &= |\cos 2\pi\xi h + \mathrm{i} \sin 2\pi\xi h - 1| \\
&= \sqrt{\cos^2 2\pi\xi h + 1 - 2\cos 2\pi\xi h + \sin^2 2\pi\xi h} \\
&= \sqrt{2 - 2\cos 2\pi\xi h} \\
&= \sqrt{4\sin^2 \pi\xi h} \\
&= 2|\sin \pi\xi h|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h^{\alpha}}\right| &\leqslant \frac{1}{|h|^{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A|\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} h\xi} - 1|}{1+|\xi|^{1+\alpha}} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{4A}{|h|^{\alpha}} \int_{0}^{+\infty} \frac{|\sin \pi\xi h|}{1+\xi^{1+\alpha}} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{4A}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{|\pi|^{1+\alpha} \sin u}{|\pi h|^{1+\alpha} + u^{1+\alpha}} \mathrm{d}u \\
&= \frac{4A}{\pi} \int_{0}^{1} \frac{|\pi|^{1+\alpha} \sin u}{|\pi h|^{1+\alpha} + u^{1+\alpha}} \mathrm{d}u + \frac{4A}{\pi} \int_{1}^{+\infty} \frac{|\pi|^{1+\alpha} \sin u}{|\pi h|^{1+\alpha} + u^{1+\alpha}} \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$\frac{4A}{\pi} \int_{0}^{1} \frac{|\pi|^{1+\alpha} \sin u}{|\pi h|^{1+\alpha} + u^{1+\alpha}} \mathrm{d}u \leqslant 4A\pi^{\alpha} \int_{0}^{1} \frac{\sin u}{u^{1+\alpha}} \mathrm{d}u$$

$$\begin{aligned}
&= 4A\pi^{\alpha}\int_0^1 \frac{\sin u}{u}\frac{1}{u^{\alpha}}\mathrm{d}u \\
&\leqslant 4A\pi^{\alpha}\int_0^1 \frac{1}{u^{\alpha}}\mathrm{d}u < +\infty \\
\frac{4A}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{|\pi|^{1+\alpha}\sin u}{|\pi h|^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}\mathrm{d}u &\leqslant 4A\pi^{\alpha}\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u^{1+\alpha}}\mathrm{d}u \\
&\leqslant 4A\pi^{\alpha}\int_1^{+\infty}\frac{1}{u^{1+\alpha}}\mathrm{d}u < +\infty
\end{aligned}$$

(b)

$$\left|\frac{f(h)-f(0)}{|h|^{\varepsilon}}\right| = \frac{1}{-|h|^{\varepsilon}\log|h|} \to \infty$$

□

4.Examples of compactly supported functions in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ are very handy in many applications in analysis. Some examples are:

(a) Suppose $a < b$, and f is the function such that $f(x) = 0$ if $x \leqslant a$ of $x \geqslant b$ and

$$f(x) = \mathrm{e}^{-1/(x-a)}\mathrm{e}^{-1/(b-x)}, a < x < b.$$

Show that f is indefinitely differentiable on $\mathbb{R}$.

(b) Prove that there exists an indefinitely differentiable function F on $\mathbb{R}$ such that $F(x) = 0$ if $x \leqslant a$, $F(x) = 1$ if $x \geqslant b$, and F is strictly increasing on $[a, b]$.

(c) Let $\delta > 0$ be so small that $a + \delta < b - \delta$. Show that there exists an indefinitely differentiable function g such that g is 0 if $x \leqslant a$ or $x \geqslant b$, g is 1 on $[a + \delta, b - \delta]$, and g is strictly monotonic on $[a, a + \delta]$ and $[b - \delta, b]$.

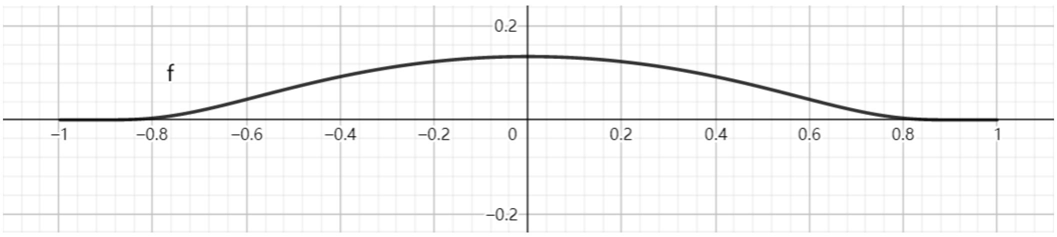


图 4.1: $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x+1}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{1-x}}, -1 < x < 1$

5.Suppose f is continuous and of moderate decrease.

(a) Prove that $\hat{f}$ is continuous and $\hat{f}(\xi) \to 0$ as $|\xi| \to \infty$.

(b) Show that if $\hat{f}(\xi) = 0$ for all ξ, then f is identically 0.

证明.

(a)

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(x-1/2\xi)\xi} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}x\xi} \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}} \mathrm{d}x \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}x\xi} \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

因此

$$
\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x) - f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right) \right] \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}x\xi} \mathrm{d}x
$$

(b)

□