泛函分析

孙天阳

2023 年 6 月 8 日

目录

Chapter 1

拓扑线性空间

1　局部凸空间

定义 1.1. 称拓扑线性空间 X 是局部凸的，如果 X 存在由凸集构成的局部基.

定义 1.2. 设 $\{p_\lambda \colon \lambda \in \Lambda\}$ 是线性空间 X 上的半范数族，称其为可分点的，如果对任意 $x \neq 0$ 存在 p_λ 使得 $p_\lambda(x) > 0$.

Chapter 2

赋范线性空间

1　压缩映射原理

定义 1.1. 设 (X,ρ) 是度量空间，$T:X\to X$. 若存在 $\lambda\in(0,1)$ 使得

$$\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y)$$

对任意 $x,y\in X$ 成立，则称 T 是 X 上的压缩映射.

例 1.2. 考虑积分方程

$$x(t)-\lambda\int_0^1 \mathrm{e}^{t-s}x(s)\mathrm{d}s=y(t),$$

其中 $y(t)\in C[0,1]$ 为一给定函数，λ 为常数，$|\lambda|<1$. 求证存在唯一解 $x(t)\in C[0,1]$.

2 完备化

3 列紧集

- 紧 $\stackrel{Hausdorff}{\Longrightarrow}$ 闭
- 紧 $\stackrel{\text{度量空间}}{\Longrightarrow}$ 有界
- 列紧 $\stackrel{\text{度量空间}}{\Longrightarrow}$ 有界
- 自列紧 $\stackrel{A1+Hausdorff}{\Longrightarrow}$ 闭
- 自列紧 $\stackrel{\text{度量空间}}{\Longrightarrow}$ 有界
- 列紧集的子集是列紧的.
- 列紧 $\stackrel{\text{度量空间}}{\Longrightarrow}$ 完全有界
- 完全有界 $\stackrel{\text{完备度量空间}}{\Longrightarrow}$ 列紧

4 线性赋范空间

- 关于不是所有 Abel 群都能够成为线性空间的评述可以参看与 wzd 的聊天记录
- 虽然但是，线性结构与拓扑结构的第一步结合实际上是拓扑向量空间，线性结构与度量结构的结合才是赋范线性空间.
- 线性流形：线性子空间的平移

我们引进过一个空间 X 的线性结构，也引进过它的度量结构，现在要把两者结合起来，即是要求

$$\rho(x+z,y+z)=\rho(x,y)$$

命题 4.1. *ρ 满足平移不变性当且仅当 ρ 对加法连续.*

定义 4.2. *设 $P:X\to\mathbb{R}$ 是线性空间 X 上的一个函数，若它满足*

(1) $P(x+y)\leqslant P(x)+P(y)$

(2) $P(\lambda x)=\lambda P(x)$

注记. 对于次线性泛函我的评述是：对于一般的线性空间就可以定义次线性泛函，但如果还是赋范线性空间那么结果会更加丰富

4.1 最佳逼近问题

定理 4.3. *设 X 是赋范线性空间，$M\subset X$ 是闭子空间，则下列命题等价：*

(1) *存在有界线性算子 $P:X\to M$ 使得 $P\big|_M=Id_M$.*

(2) *存在 $L\subset X$ 是闭子空间使得 $X=M\oplus L$.*

(3) *对任意 x*

设 X 是赋范线性空间，X_0 是 X 的子空间. 任给 $y\in X$，量

$$d:=\inf_{x\in X_0}\|y-x\|$$

总是有意义的. 并且，我们总能找到一列点 $\{x_n\}\subset X_0$，使得 $\{\|y-x_n\|\}$ 趋近于 d.

我们还知道，$\{x_n\}$ 是有界集. 假如存在某种列紧性，我们就能取出一个收敛子列，可猜测序列极限便是 y 在 X_0 中的最佳逼近元.

问题：给定赋范线性空间 X，并给定 X 中的有限多个向量 $e_1,\cdots,e_n$. 对于给定的向量 $x\in X$，求一组数 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$，使得

$$\left\|x-\sum_{i=1}^n\lambda_ie_i\right\|=\min\left\|x-\sum_{i=1}^n a_ie_i\right\|.$$

引理 4.4. *设 X 是一个赋范线性空间，X_0 是 X 的真闭子空间，那么对 $\forall\,\varepsilon\in(0,1)$，存在 $\|y\|=1$，并且*

$$\|y-x\|\geqslant 1-\varepsilon.$$

4.2 有限维赋范线性空间的刻画

定理 4.5. 设 X 是赋范线性空间，X_0 是 X 的一个真闭子空间，那么对任意 $0<\varepsilon<1$，存在 $y\in X$，使得 $\|y\|=1$，并且

$$\|y-x\|\geqslant 1-\varepsilon,\quad \forall\, x\in X_0.$$

运用 F.Riesz 引理的要素察觉：

- A 是紧算子
- 由条件（一般是反证时假设的条件）构造出一串严格单增或严格单减的闭子空间
- 每个闭子空间都是 A 的不变子空间
- 特别地，当 A 作用上去，得到的是元素本身（常数倍也可以，但需要系数的模长是下有界的）与相邻的维数较小的闭子空间中的某个元素之和.
- 由 F.Riesz 引理，可以在第 n 个空间中选出一个单位向量 x_n，使得它与相邻的维数较小的闭子空间的距离大于 α，其中 α 是任意介于 0 和 1 之间的常数.
- 考虑 $\{Ax_n\}$，如果上上条是常数倍 λ_n，那么需要考虑的是 $\{Ax'_n\}$，其中 $x'_n=\dfrac{x_n}{\lambda_n}$. 系数模长下有界的要求正是为了保证 x'_n 是有界的.
- 因为 A 是紧算子，所以 $\{Ax_n\}$ 有收敛子列.
- 但另一方面，由我们的构造任意 Ax_n 与 Ax_{n+p} 的距离都大于 α，矛盾.

4.3 商空间

定义 4.6. 设 X 是赋范线性空间，Y 是它的闭子空间. 定义函数 $\|\cdot\|_0 : X/Y\to\mathbb{R}$ 为

$$\|[x]\|=d(x,Y)=\inf_{y\in Y}\|x-y\|=\inf_{z\in[x]}\|z\|,$$

其中 $d(x,Y)$ 是 x 到 Y 的距离. 那么

(a) $\|\cdot\|$ 是商空间 X/Y 上的范数.

()

定理 4.7. 设 $T:X\to Y$ 是有界线性算子. 定义

$$\tilde{T}:\tilde{X}=X/N(T)\to Y,[x]\mapsto T(x).$$

则 $\|\tilde{T}\|=\|T\|$.

证明. $\|\tilde{T}\|=\sup\limits_{\|[x]\|\leqslant 1}\|\tilde{T}([x])\|=\sup\limits_{\|[x]\|\leqslant 1}\|Tx\|$.

$\|Tx\|=\|Tz\|\leqslant\|T\|\|z\|,\forall z\in[x]\Longrightarrow\|Tx\|\leqslant\|T\|\inf\limits_{z\in[x]}\|z\|=\|T\|\|[x]\|$.

$\|\tilde{T}\|=\|T\|$. □

半范数

定义 4.8. 设 X 是一个向量空间，称 $p\colon X \to \mathbb{R}$ 是一个半范数，如果

(1) $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$

(2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

注记.

- $p(0) = p(0\cdot x) = 0\cdot p(x) = 0$
- $p(0) = p(x+(-x)) \leqslant p(x)+p(-x) = 2p(x) \Longrightarrow p(x) \geqslant 0$

命题 4.9. 设 X 是一个向量空间，p, q 分别是 X 上的范数和半范数，则 $p+q$ 是 X 上的范数.

证明. 显然. □

例 4.10 (γ 阶 Hölder 半范)**.** 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，$u\colon U \to \mathbb{R}$，定义

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} = \sup_{\substack{x,y\in U\\ x\neq y}} \left\{ \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma} \right\}.$$

再定义

$$X = \left\{ u\colon U \to \mathbb{R} \mid [u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} < \infty \right\}.$$

可验证 X 是线性空间，$p\colon u \mapsto [u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}$ 是 X 上的半范数.

5 凸集与不动点

‘

5.1 Minkowski 泛函

- 对于 $\mathbb{K}$-线性空间 X 及其包含原点的凸子集 C，我们可以定义 Minkowski 泛函.
  - 注意即是针对 $\mathbb{C}$-线性空间，考虑的也是实一维的直线.
  - $P(x)$ 取值于 $[0, +\infty]$
  - $P(x)$ 具有正齐次性
  - $P(x)$ 具有次可加性
- C 是吸收集 $\Longleftrightarrow P$ 取值于 $[0, +\infty)$
- C 对称或均衡 $\Longleftrightarrow P$ 具有齐次性
- 若 X 是 B^* 空间，可以讨论 C 的闭性，0 是否为内点，C 的有界性.
  -
  - 0 为内点 $\Longrightarrow C$ 为吸收的 $\Longrightarrow P$ 取值于 $[0, +\infty)$
  - 0 为内点 $\Longrightarrow P$ 一致连续.
  - C 有界 $\Longrightarrow P$ 正定.

定义 5.1. 设 X 是线性空间，C 是 X 上含有 0 的凸子集，在 X 上规定一个取值于 $[0, +\infty]$ 的函数

$$P(x) = \inf\left\{\lambda > 0 \middle| \frac{x}{\lambda} \in C\right\},$$

称为 C 的 *Minkowski 泛函*.

5.2 Schauder 不动点定理

6 内积空间

回去看第八次课

6.1 定义

6.2 内积与范数

内积 $\longrightarrow$ 范数

设 X 为内积空间，定义

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}.$$

下验证 $\|\cdot\|$ 是 X 上范数：

范数 $\longrightarrow$ 内积

命题 6.1. 设 X 为赋范线性空间，则其范数由内积诱导当且仅当

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right), \quad \forall\ x,y \in X.$$

证明. □

Chapter 3

拓扑线性空间

Chapter 4

线性算子

1　线性算子的概念

2 下有界算子

定义 2.1. 设 X, Y 是赋范线性空间. 称线性算子 $T : X \to Y$ 是下有界的，如果存在 $\gamma > 0$ 使得

$$\|Tx\| \geqslant \gamma \|x\|, \quad \forall\, x \in X.$$

引理 2.2. $T : X \to Y$ 不是下有界的当且仅当存在一列单位长的向量 $\{x_n\} \subset X$ 使得 $\|Tx_n\| \to 0$.

在下个引理中我们罗列下有界算子的一些性质

引理 2.3. 设 X, Y 是赋范线性空间，$T \in L(X, Y)$ 是下有界算子，那么

(1) T 是单射.

(2) 下有界算子全体是 $L(X, Y)$ 中的开集.

Banach 空间之间的下有界算子可以被如下刻画：

定理 2.4. *Banach* 空间之间的有界线性算子 $T : X \to Y$ 是下有界的当且仅当它是单射且有闭值域.

定义 2.5. *Banach* 空间的同构

有趣的是存在两个复 Banach 空间，它们作为实 Banach 空间实同构的，但作为复 Banach 空间不是同构的.

3 Riesz-Fréchet 表示定理及其应用

为什么线性函数可以用与某元素的内积表示？因为线性函数是由被作用的元素在某一方向上的分量来决定的，而分量是可以通过求内积取出来的.

4 纲与开映像定理

定义 4.1. *设 X 是拓扑空间，称 $A \subset X$ 是无处稠密集，如果 $\overline{A}$ 无内点.*

- 另一个常用的概念是无内点闭集.
- 无处稠密集总是含在一个无内点闭集中，即它的闭包.
- 无内点闭集是无处稠密集，无处稠密集是无内点集.
- Baire 空间的一条等价刻画是：可列个无内点闭集/无处稠密集的并是无内点集.
- 有例子说明，不能再将结果进一步强化为无处稠密集.

定义 4.2. *称拓扑空间 X 为 Baire 空间如果它满足下列等价叙述中的一条：*

(1) *X 的非空开子集是第二纲集；*

(2) *X 的剩余集稠密*

(3) *可数个无内点闭集的并无内点*

(4) *可数个稠密开集的交稠密*

(5)

(6)

直觉上，Baire 空间具有以下性质

(1)“大”集合的可数交还是“大”集合

(2)“小”集合的可数并还是“小”集合

(3)“大”集合不能够被写为“小”集合的可数并

(4) 全空间是“大”集合.

小集合有时指无内点闭集，有时指无处稠密集，我想这并没有很大的区别。
我们称无处稠密集的可数并为第一纲集。

定理 4.3 (Baire)**.** *完备度量空间是 Baire 空间.*

证明. 我们证明可数个稠密开集的交是稠密的.
设 $\{U_n\}$ 是一族稠密开集，$U = \cap U_n$.
任给 $x \in X$ 和 $\varepsilon > 0$，我们要找 $y \in U$ 使得 $y \in B(x, \varepsilon) \cap U$.
因为 U_1 是稠密的，所以存在 $y_1 \in U_1$ 使得 $y_1 \in B(x, \varepsilon) \cap U_1$.
因为 $B(x, \varepsilon) \cap U_1$ 是开集，所以存在 $0 < \varepsilon_1 < \dfrac{1}{2}$ 使得 $\overline{B(y_1, \varepsilon_1)} \subset B(x, \varepsilon) \cap U_1$.
因为 U_2 是稠密的，所以存在 $y_2 \in U_2$ 使得 $y_2 \in B(y_1, \varepsilon_1) \cap U_2$.
因为 $B(y_1, \varepsilon_1) \cap U_2$ 是开集，所以存在 $0 < \varepsilon_2 < \dfrac{1}{2^2}$ 使得 $\overline{B(y_2, \varepsilon_2)} \subset B(y_1, \varepsilon_1) \cap U_2$.
如此做下去，可取出一列 $\{y_n\}$ 和 $\{\varepsilon_n\}$ 满足

$$B(x, \varepsilon) \supset \overline{B(y_1, \varepsilon_1)} \supset \overline{B(y_2, \varepsilon_2)} \supset \cdots, \quad \overline{B(y_n, \varepsilon_n)} \subset U_n.$$

由完备度量空间的闭集套定理，存在 $y \in \cap \overline{B(y_n, x_n)} \subset B(x, \varepsilon) \cap U$. □

例 4.4. $\mathbb{R}$ 不可数.

证明. 赋予 $\mathbb{R}$ 标准度量，则 $\mathbb{R}$ 是完备度量空间.

假如 $\mathbb{R}$ 可数，则 $\mathbb{R}$ 能被表示为可数个单点集的并，这与 Baire 定理矛盾. □

定理 4.5. 设 X, Y 是 *Banach* 空间，若 $T \in L(X, Y)$ 是满射，则 T 是开映射.

证明.

(1) 由 T 的线性，T 为开映射当且仅当存在 $\delta > 0$ 使得

$$B_Y(0, \delta) \subset T(B_X(0, 1)).$$

(2) 因为 T 是满射，所以

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_X(0, n)).$$

由 Baire 纲定理，Y 作为一个有内点的集合，不可能是可列个无处稠密集的并.

因此存在 N 使得 $\overline{T(B_X(0, N))}$ 有内点，即存在 y_0 和 r 使得 $B_Y(y_0, r) \subset \overline{T(B_X(0, N))}$.

注意到 $\overline{T(B_X(0, N))}$ 是一个对称凸集，因此 $B_Y(-y_0, r) \subset \overline{T(B_X(0, N))}$，从而

$$B_Y(0, r) \subset \frac{1}{2} B_Y(y_0, r) + \frac{1}{2} B_Y(-y_0, r) \subset \overline{T(B_X(0, N))}.$$

□

4.1 Lax-Milgram 定理

5 Hahn-Banach 定理

6 共轭空间 · 弱收敛 · 自反空间

- 赋范线性空间就可以讨论共轭空间，共轭空间是其上连续线性泛函的全体.
- 例子
  - L^p 的共轭空间是 L^q，其中 $p \in (1, +\infty)$
  - L^1 的共轭空间是 L^∞
  - L^∞ 的共轭空间不是 L^1
  - $C[0,1]$ 的共轭空间是 $BV[0,1]$

6.1 共轭空间的表示

定义 6.1. 设 X 是赋范线性空间，X 上的连续线性泛函全体按范数

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|$$

构成一个 *Banach* 空间，称为 X 的共轭空间.

例 6.2. $L^p[0,1]$ 的共轭空间，其中 $1 \leqslant p < \infty$.

解. 设 q 是 p 的共轭指数，即

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, & p > 1, \\ q = \infty, & p = 1. \end{cases}$$

我们将证：

$$L^p[0,1]^* = L^q[0,1].$$

□

例 6.3. 求证：$(l^p)^* = l^q$.

证明.

(1) 定义

$$\varphi : l^q \longrightarrow (l^p)^*, \{\eta\} \longmapsto f := \varphi(\{\eta\}) : l^p \to \mathbb{K}, \{x\} \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_k \eta_k.$$

- $f \in (l^p)^*$.

(2) φ 是满射

(3) φ 是等距

□

6.2 二次共轭空间

定义 6.4. 设 X 是赋范线性空间，定义赋值映射

$$\begin{aligned} J : X &\longrightarrow X^{**} \\ x &\longmapsto J(x) : f \mapsto f(x). \end{aligned}$$

- $J(x) \in X^{**}$.
  - $J(x)(f_1+f_2) = (f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x) = J(x)(f_1)+J(x)(f_2)$.
  - $|J(x)(f)| = |f(x)| \leqslant \|f\|\|x\| \Longrightarrow \|J(x)\| \leqslant \|x\|$.
- J 是线性的.
  - $J(x_1+x_2)(f) = f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2) = J(x_1)(f)+J(x_2)(f)$.
  - $J(\lambda x)(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda J(x)(f)$.
- J 是有界的.$\|J(x)\| \leqslant \|x\| \Longrightarrow \|J\| \leqslant 1$.
- J 是等距嵌入. 要证 $\|J(x)\| = \|x\|$，即对任意 $x \neq 0$，要找到一 $f \in X^*$，使得

  $$\frac{|J(x)(f)|}{\|f\|} = \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|x\|,$$

  而这是由 Hahn-Banach 定理保证的.

定义 6.5. 如果 J 是满射，则称 X 是自反的.

例 6.6.

- 显然，X 是自反空间的必要条件是 X 是 *Banach* 空间.
- *Hilbert* 空间是自反空间.
- $\forall\, p \in (1, +\infty)$，$L^p(\Omega, B, \mu)$ 是自反空间.

6.3 共轭算子

定义 6.7. 设 X, Y 是赋范线性空间，$T \in \mathscr{L}(X, Y)$. 定义 T 的共轭算子

$$\begin{aligned} T^* : Y^* &\longrightarrow X^* \\ f &\longmapsto f \circ T. \end{aligned}$$

- $T^* f \in X^*$.
  - $T^* f$ 是线性的，这是由 T 的线性和 f 的线性保证的.
  - $T^* f$ 是连续的，这是由 T 的连续性和 f 的连续性保证的.
- T^* 是线性的，这是由 Y^* 的线性结构的定义保证的.

- T^* 是有界的，不仅如此，

$$\begin{aligned}\|T^*\| &= \sup_{\|f\|\leqslant 1}\|T^*f\| \\ &= \sup_{\|f\|\leqslant 1}\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|T^*f(x)\| \\ &= \sup_{\|f\|\leqslant 1}\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|f(Tx)\| \\ &= \sup_{\|x\|\leqslant 1}\sup_{\|f\|\leqslant 1}\|f(Tx)\| \\ &= \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\| = \|T\|\end{aligned}$$

- $*:\mathscr{L}(X,Y)\to\mathscr{L}(Y^*,X^*), T\mapsto T^*$ 是线性的，这是由 f 的线性保证的.

  从而 $*$ 是 $\mathscr{L}(X,Y)$ 到 $\mathscr{L}(Y^*,X^*)$ 的线性等距嵌入.

命题 6.8. 设 X 是 *Banach* 空间，$T\in L(X)$. 如果 T^* 是可逆的，那么 T 也是可逆的.

证明.

- $R(T)$ 是闭集. 设 S 是 T^* 的逆. 设 $\{Tx_n\}$ 是 Cauchy 列，那么

$$\begin{aligned}\|x_n-x_m\| &= \sup\{|f(x_n-x_m)|: f\in X^*, \|f\|=1\} \\ &= \sup\{|T^*Sf(x_n-x_m)|: f\in X^*, \|f\|=1\} \\ &= \sup\{|(Sf)(Tx_n-Tx_m)|: f\in X^*, \|f\|=1\} \\ &\leqslant \|Tx_n-Tx_m\|\sup\{\|Sf\|: f\in X^*, \|f\|=1\} \\ &= \|S\|\|Tx_n-Tx_m\|.\end{aligned}$$

  所以 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，存在极限 $x\in X$. 由 T 连续，$Tx=\lim\limits_{n\to\infty}Tx_n$，所以 $R(T)$ 是闭的.

- T 是单射. 事实上，如果 $Tx=0$，那么对任意 $f\in X^*$，存在 $g\in Y^*$ 使得 $f=T^*g$. 那么

$$f(x)=T^*g(x)=g(Tx)=g(0)=0.$$

  所以对任意 $f\in X^*$ 有 $f(x)=0$. 由 Hahn-Banach 定理，$x=0$.

- T 是满射. 事实上，如果存在 $y\in X\backslash R(T)$，由 Hahn-Banach 定理，存在 $g\in X^*$ 满足 $g(y)=1$ 且 $g(Tx)=0$ 对任意 $x\in X$ 成立. 但这意味着 $T^*g(x)=g(Tx)=0$ 对任意 $x\in X$ 成立，即 $T^*g=0$. 因为 T^* 是单射，所以 $g=0$，矛盾.

□

例 6.9. 设 X 是 *Hilbert* 空间，$T\in B(X)$.

- 一方面，对于固定的 $y\in X$，$x\mapsto(Tx,y)$ 是有界线性函数，由 *Riesz* 表示定理，存在 $z_y\in X$ 使得 $(Tx,y)=(x,z_y)$ 对任意 $x\in X$ 成立. 因此可定义 $\tilde{T}:y\mapsto z_y$.

- 另一方面，考虑 T 的共轭算子 T^*，对任意 $f\in X^*$，$T^*(f)(x)=f(T(x))$.

$$(x,T^*y_f)=(Tx,y_f)$$

例 6.10. 设 $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 是一个测度空间，$K(x,y)$ 是 $\Omega\times\Omega$ 上的平方可积函数. 定义算子

$$\begin{aligned} T_K : L^2(\Omega,\mu) &\longrightarrow L^2(\Omega,\mu) \\ u &\longmapsto (T_K u)(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)\mathrm{d}\mu(y) \end{aligned}$$

- $(T_K u)(x) \in L^2(\Omega,\mu)$
- $T_K \in \mathscr{L}(L^2(\Omega,\mu))$

$$\begin{aligned} \|T_k u\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega \left| \int_\Omega K(x,y)u(y)\mathrm{d}\mu(y)\right|^2 \mathrm{d}\mu(x) \\ &\overset{Cauchy-Schwarz}{\leqslant} \int_\Omega \left(\int_\Omega |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}\mu(y)\right)\left(\int_\Omega |u(y)|^2\,\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \|u\|_{L^2}^2 \int_\Omega \left(\int_\Omega |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) \\ &\xlongequal{Fubini?} \|u\|_{L^2}^2 \int_{\Omega\times\Omega} |K(x,y)|^2 \mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y) \\ &= \|u\|_{L^2}^2 \|K\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

6.4 弱收敛及 $*$ 弱收敛

定义 6.11.

弱收敛与按范数收敛的关系

例 6.12.

定义 6.13. $*$ 弱收敛

定理 6.14 (Eberlein-Smulian)**.** 自反空间中的单位（闭）球为弱（自）列紧的.

例 6.15. $X = L^2[0,1]$，$D = \left\{f \in L^2[0,1] : \|f\|_{L^2} \leqslant 1\right\}$，则 D 是弱自列紧的.

证明. □

定理 6.16 (Banach)**.** 设 X 是赋范线性空间. 若 X^* 是可分的，那么 X 也是可分的.

证明.

- 考察

□

定理 6.17 (Pettis)**.** 自反空间的闭子空间仍为自反空间.

证明. 设 X_0 是 X 的闭子空间，$\iota : X_0 \hookrightarrow X$ 是嵌入映射.

我们有 $\iota^{**} : X_0^{**} \hookrightarrow X^{**}$. 任取 x^{**} □

7 线性算子的谱

7.1 定义

- 理论上的讨论我们先只考虑复空间，我不知道实空间行不行
- 我们先只考虑 Banach 空间，虽然我还没想清楚哪里用到了

定义 7.1. 稠定线性算子.

定义 7.2. 设 X 是 $\mathbb{C}$-*Banach* 空间，$T : D(T) \to X$ 是线性算子. 对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$，令

$$T_\lambda = T - \lambda I.$$

- 称 λ 为正则值如果
  (1) T_λ 是单射，进而 T_λ 在它的像集的余限制有逆算子 $R(\lambda, T)$
  (2) $R(\lambda, T)$ 是稠定的，即 T_λ 的值域在 X 中稠密.
  (3) $R(\lambda, T)$ 是有界线性算子.
- 称 λ 为点谱如果 T_λ 不满足 (1).
- 称 λ 为剩余谱如果 T_λ 满足 (1) 但不满足 (2).
- 称 λ 为连续谱如果 T_λ 满足 (1)(2) 但不满足 (3).

命题 7.3. 其他条件同上，附加 T 是闭算子，则 λ 为正则值当且仅当 T_λ 是双射.

定义 7.4. $r_\sigma(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$.

7.2 预解式与谱集的基本性质

引理 7.5. 设 X 是赋范线性空间，$T \in L(X)$. 若 *Neumann* 级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

按算子范数收敛，那么 $I - T$ 可逆并且

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

使得上述引理成立的一个充分条件是 X 是 Banach 空间，$\|T\| < 1$.

由上述引理立得以下两个命题

命题 7.6. 设 X 是 $\mathbb{C}$-*Banach* 空间，$T \in L(X)$，则 $\sigma(T)$ 是有界集.

证明. 设 $|\lambda| > \|T\|$，即 $\|\lambda^{-1}T\| < 1$.

$\lambda I - T = \lambda(I - \lambda^{-1}T)$，由引理 $I - \lambda^{-1}T$ 可逆，则 $\lambda I - T$ 也可逆，即 $\lambda \in \rho(T)$.

从而 $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|T\|\} \subset \rho(T)$，即 $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|T\|\}$. □

推论 7.7. $r_\sigma(A) \leqslant \|A\|$.

命题 7.8. 设 X 是 $\mathbb{C}$-*Banach* 空间，$T \in L(X)$，则 $\rho(T)$ 是开集.

证明. 任取 $\lambda_0 \in \rho(T)$，要找 $\delta > 0$ 使得 $B(\lambda_0, \delta) \subset \rho(T)$.

$\lambda I - T = (\lambda - \lambda_0)I + \lambda_0 I - T = (\lambda_0 I - T)(I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1})$.

则 $\lambda I - T$ 是双射等价于 $I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1}$ 是双射，由引理这只需 $|\lambda - \lambda_0|$ 足够小. □

知道了 $\rho(T)$ 是 $\mathbb{C}$ 的非空开子集后，我们定义预解式

定义 7.9.

$$R : \rho(T) \longrightarrow L(X), \quad \lambda \longmapsto (\lambda I - T)^{-1}.$$

定义 7.10. 可微与解析.

命题 7.11. R 在 $\rho(T)$ 上解析.

证明. $\lambda I - T = (\lambda_0 I - T)(I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1}) = (\lambda_0 I - T)(I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0))$.

$R(\lambda) = (I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0))^{-1}R(\lambda_0)$.

记 $S_\lambda = (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0)$，当 $|\lambda - \lambda_0|$ 足够小时，

$$R(\lambda) = (I + S_\lambda + S_\lambda^2 + \cdots)R(\lambda_0) = R(\lambda_0) + S_\lambda R(\lambda_0) + S_\lambda^2 R(\lambda_0) + \cdots.$$

$$R(\lambda) - R(\lambda_0) = S_\lambda R(\lambda_0) + S_\lambda^2 R(\lambda_0) + \cdots.$$

$$\frac{R(\lambda) - R(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = -R(\lambda_0)^2 + (\lambda - \lambda_0)(\cdots)$$

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{R(\lambda) - R(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = -R(\lambda_0)^2.$$

□

命题 7.12. 设 X 是 $\mathbb{C}$-*Banach* 空间，$T \in L(X)$，则 $\sigma(T)$ 非空.

证明. 设 $\sigma(T) = \varnothing$，则 $\rho(T) = \mathbb{C}$.

任取 $f \in L(X)^*$ 满足 $f(I) = 1$，有 $F := f \circ R : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是解析函数.

当 $|\lambda| > \|T\|$ 时，

$$R(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1} = \lambda^{-1}(I + \frac{T}{\lambda} + \frac{T^2}{\lambda^2} + \cdots)$$

$$f \circ R(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{f(T)}{\lambda} + \frac{f(T^2)}{\lambda^2} + \cdots\right)$$

由 Liouville 定理，恒为常数，矛盾！ □

命题 7.13. 设 p 是多项式. 那么

- $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$
- 如果 T 可逆，那么 $\sigma(T^{-1}) = (\sigma(T))^{-1}$
-

7.3 Gelfand 公式

引理 7.14. 设 $a_n \in [-\infty, +\infty)$，且 $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$，则

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n}.$$

证明. 显然有

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} \geqslant \inf_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n},$$

只需证

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant \inf_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n},$$

这等价于

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{a_m}{m}, \quad \forall m \geqslant 1.$$

固定 $m \in \mathbb{N}$，对任意 $n \in \mathbb{N}$，存在 l_n 和 r_n 使得 $n = l_n m + r_n$，其中 $l_n \in \mathbb{N}, r_n \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$.

$$a_n = a_{l_n m + r_n} \leqslant l_n a_m + a_{r_n}$$

$$\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{l_n m}{n} \frac{a_m}{m} + \frac{a_{r_n}}{n}$$

左右两边取上极限得证. □

定理 7.15. 设 X 是 *Banach* 空间，$T \in L(X)$，则 $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.

证明. 显然. □

定理 7.16. $r_\sigma(T) = \lim_{n\to+\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

证明. □

7.4 例子

例 7.17. 设 $X = C([0,1])$，

$$T\colon X \longrightarrow X, \quad u(y) \longmapsto yu(y).$$

解.

- 点谱.$(\lambda I - T)u = 0 \Longleftrightarrow (\lambda - x)u(x) \equiv 0 \Longleftrightarrow u(x) \equiv 0$

  $\sigma_p(T) = \varnothing$.

□

例 7.18. 设 H 是 *Hilbert* 空间，称 $U \in L(H)$ 是紧算子，如果

(1) $(Ux, Uy) = (x, y), \forall x, y \in H$.

(2) $R(U) = H$.

Chapter 5

紧算子与 Fredholm 算子

1 紧算子

定义 1.1. 称 $T \in L(X,Y)$ 为紧算子，如果 T 将有界集映为列紧集. 将紧算子全体记作 $\mathfrak{C}(X,Y)$.

1.1 基本性质

命题 1.2.

(1) $\mathfrak{C}(X,Y) \subset B(X,Y)$.

证明. 紧算子将有界集映为列紧集，而度量空间中列紧集一定是有界集，从而紧算子有界. □

(2) $\mathfrak{C}(X,Y)$ 是线性子空间.

证明. 设 $A \subset X$ 为有界集.

- 易见 $(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)(A) \subset \lambda_1 T_1(A) + \lambda_2 T_2(A)$.
- 后者是列紧的，因为任何序列 $\{z_n\}$ 都可以被分解为 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足 $z_n = x_n + y_n$，先找到 $\{x_n\}$ 的收敛子列，再找 $\{y_n\}$ 对应子列的收敛子列，就找到了 $\{z_n\}$ 的收敛子列.
- 而列紧集的子集是列紧的.

□

(3) $\mathfrak{C}(X,Y)$ 是闭的.

证明. □

(4)

命题 1.3. $T \in L(X,Y)$ 是紧算子当且仅当 T^* 是紧算子.

命题 1.4. $T \in \mathfrak{C}(X,Y)$，其中 Y *Banach* 空间. 那么 $R(T)$ 闭当且仅当 $R(T)$ 有限维.

证明. 假设 $R(T)$ 闭，考虑限制下来. 则 T 成为满射. 由开映像定理，这玩意是开映射. 然后 Y 的原点有个邻域是紧集. 取有界集，映成预紧集，由开映象是邻域. □

1.2 全连续

与紧性概念密切相关的是全连续概念.

定义 1.5. 设 X, Y 是 Banach 空间，称 $T \in B(X, Y)$ 是全连续的，如果

$$x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow Tx_n \to Tx.$$

命题 1.6. 设 $T \in B(X, Y)$，则

(1) 若 $T \in \mathfrak{C}(X, Y)$，则 T 是全连续的；

(2) 若 X 是自反的，T 是全连续的，则 $T \in \mathfrak{C}(X, Y)$.

证明.

(1)
- $x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow Tx_n \rightharpoonup Tx$.
- 由共鸣定理，x_n 有界. 由 T 是紧算子，Tx_n 列紧.
- $\{Tx_n\}$ 的每一个强收敛的子列，它们也都是弱收敛的，由弱收敛极限的唯一性，$\{Tx_n\}$ 的每一个强收敛的子列的极限都是 Tx.
- 假如 $\{Tx_n\}$ 不强收敛到 Tx，那么可以取出一个子列与 Tx 的距离保持在 ε 外，但由列紧性这个子列必有强收敛子列，由上一条，这个强收敛子列必须强收敛到 Tx，矛盾.

(2)
- 因为 X 是自反的，由 Eberlin-Smulian 定理，有界列 $\{x_n\}$ 有弱收敛子列.
- 因为 T 是全连续的，它将该弱收敛子列映为强收敛子列.

□

1.3 例子

积分算子

有限秩算子

定义 1.7. 有限秩算子

命题 1.8. $T \in Fd(X,Y) \Longleftrightarrow \exists y_1, \cdots, y_k \in Y, f_1, \cdots, f_k \in X^*$ 使得 $T = \sum y_i \otimes f_i$

证明. □

命题 1.9. $\overline{Fd(X,Y)} \subset \mathfrak{C}(X,Y)$.

证明. 设 $T \in L(X,Y)$ 且存在 $\{T_n\} \subset Fd(X,Y)$ 使得 $\|T_n - T\| \to 0$.

要证 $T \in \mathfrak{C}(X,Y)$，等价于证 $T(B_X(0,1))$ 为列紧集，由 Y 的完备性，这又等价于证 $T(B_X(0,1))$ 完全有界，等价于证对任意 $\varepsilon > 0$，$T(B_X(0,1))$ 存在有限的 ε 网. □

例 1.10.

1.4 Schauder 基

命题 1.11. 设 Y 为 *Hilbert* 空间，X 为 *Banach* 空间，此时 $\overline{Fd(X,Y)} = \mathfrak{C}(X,Y)$.

证明. □

定义 1.12. 设 X 是 *Banach* 空间，称序列 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 的一组 *Shauder* 基，如果对任意 $x \in X$，存在唯一的一个序列 $\{c_n(x)\}$，使得

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n.$$

一个简单的观察是，$X = \overline{\text{span}\,\{e_n\}_{n=1}^{\infty}}$，因此如果 X 有 Schauder 基，则 X 是可分的.

于是自然会问是否每个可分的 Banach 空间都具有 Schauder 基？1973 年，Enflo 作出了否定的回答，参看：https://sci-hub.se/10.1007/bf02392270. 不久，A.M.Davie 给出了一个较简单的证明，参看https://sci-hub.se/10.1112/blms/5.3.261.

由于 $x \mapsto c_n(x)$ 的唯一性，c_n 是 X 上的线性函数. 事实上，

引理 1.13. c_n 是 X 上的有界线性泛函.

证明. 对于希尔伯特空间，这是显然的. 因为此时我们有 Parsaval 恒等式，

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n(x))^2 \|e_n\|^2.$$

对于 Banach 空间，我们必须另谋出路.

令 $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n(x) e_n$，在 X 上引入另一个模 $\|x\|_1 := \sup_{N \in \mathbb{N}} \|S_N(x)\|$.

- 正定性

- 齐次性
- 三角不等式

易知有 $\square x\square \geqslant \|x\|$，一旦 $\square\cdot\square$ 完备，由于 $\square\cdot\square$ 比 $\|\cdot\|$ 强，所以两范数等价.

从而存在 $C>0$ 使得 $\square x\square \leqslant C\|x\|, \forall\, x\in X$.

所以 $\|c_N(x)e_N\| = \|S_N(x) - S_{N-1}(x)\| \leqslant 2C\|x\|$，即

以下验证 $\square\cdot\square$ 完备.

- 取 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列.

  你想想它还能收敛到谁呢？肯定是收敛到各个分量的那个极限啊.

- 验证对任意 N，$\{C_N(x_n)\}$ 为 Cauchy 列，令 $c_N = \lim\limits_{m\to\infty} c_N(y_m)$.

$\square$

2 Fredholm 理论

定理 2.1 (Fredholm 第一定理). 设 X 是 *Banach* 空间，$A \in \mathfrak{C}(X)$，那么

$$T = I - A \text{ 是单射} \iff T \text{ 是满射}.$$

特别地，由 *Banach* 定理，成立时有 $T^{-1} \in L(X)$.

证明. □

定理 2.2 (Fredholm 第二定理). $\dim N(T) = \dim N(T^*) < \infty$.

证明. □

3 Riesz-Schauder 定理

3.1 紧算子的谱

定理 3.1. 设 $A \in \mathfrak{C}(X)$，则

(1) 当 $\dim X = +\infty$ 时，$0 \in \sigma(A)$.

(2) $\sigma(A) \setminus \{0\} \subset \sigma_p(A)$.

(3) $\sigma(A)$ 至多以 0 为聚点.

(4) $\sigma(A)$ 至多可数.

证明.

(1) 因为 A 是紧算子是有界算子进而是闭算子，所以 $\lambda \in \rho(A)$ 当且仅当 $A - \lambda I$ 可逆.

假设 $0 \in \rho(A)$，则 A 可逆，则 $I = A \circ A^{-1}$ 作为紧算子与有界算子的复合是紧算子.

但这在 $\dim X = +\infty$ 时是不可能的.

(2) 首先解读一下这个式子，它传达了：除了 0 可能是例外，A 的谱集中只有点谱，而没有连续谱和剩余谱. 所以我们需要证明的是：除 0 以外，要么是点谱要么是正则值.

下面开始证明：设 $\lambda \neq 0$，此时 $\lambda I - A$ 的行为和 $I - \dfrac{A}{\lambda}$ 差不多，因为 A 是紧算子，所以我们可以用 Riesz-Fredholm 理论.

- 若 $I - \dfrac{A}{\lambda}$ 不是单射，则 $\lambda \in \sigma_p(A)$.
- 若 $I - \dfrac{A}{\lambda}$ 是单射，则是满射，则 $\lambda \in \rho(A)$.

(3) 假设存在一列两两不同的 $\{\lambda_i\} \subset \sigma_p(A) \setminus \{0\}$ 使得 $\lambda_i \to \lambda \neq 0$.

由于 $\lambda_i \in \sigma_p(A)$，存在 $x_i \in X$ 且 $\|x_i\| = 1$ 使得 $Ax_i = \lambda_i x_i$.

由于 λ_i 互不相同，所以 $\{x_1, \cdots, x_k\}$ 线性无关.

令 $E_k = \operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_k\}$.

(4) $\sigma(A) \setminus \{0\} \subset \displaystyle\bigcup_n \left\{\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| > \frac{1}{n}\right\} =: \bigcup_n S_n$.

因为 $\sigma(A)$ 是有界的，且 $\sigma(A)$ 不可能有除 0 以外的聚点，所以对任意 n 集合 S_n 是有限集.

从而 $\sigma(A)$ 是至多可数的.

□

注记. $\sigma(A) = 0$ 推不出 $A = 0$，这件事在有限维时我们就已经知道了.

3.2 不变子空间

定理 3.2. 设 X 是 $\mathbb{C}$-*Banach* 空间，$A \in \mathfrak{C}(X)$，则存在 A 的非平凡闭不变子空间.

证明.

- 为什么强调 X 是复的，实的不行吗？哪里用到了复？
- 不妨设 $\dim X = +\infty$，有限维的时候非平凡闭不变子空间是什么？
- $\sigma(A)\setminus\{0\} = \sigma_p(A)\setminus\{0\}$.
  - 如果 $\sigma_p(A) \neq \varnothing$，取 $\lambda \in \sigma_p(A)$，存在 $x_\lambda \neq 0$ 满足 $Ax_\lambda = \lambda x_\lambda$. 令 $M = \operatorname{span} x_\lambda$.
- 如果 $\sigma_p(A) = \varnothing$，则 $\sigma(A) = \{0\}$.

  下证 A 有非平凡的闭不变子空间.

  用反证法，否则对任意 $y \in X$，$I_y = \overline{\{P(A)y\}} = X$.

□

4 Hilbert-Schmidt 定理

命题 4.1. 设 X 是 Hilbert 空间，A 是 X 上的对称算子，则

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

证明.

- 对 $\|x\|=1$，$|(Ax,x)| \leqslant \|Ax\|\|x\| \leqslant \|A\|\|x\|^2 = \|A\|$.
- 记 $c = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax,x)|$.
  - $(A(x+y), x+y) = (Ax,x) + (Ax,y) + (Ay,x) + (Ay,y)$
  - $(A(x-y), x-y) = (Ax,x) - (Ax,y) - (Ay,x) + (Ay,y)$
  - $|(A(x+y), x+y)| = \|x+y\|^2 |(A(\frac{x+y}{\|x+y\|}), \frac{x+y}{\|x+y\|})| \leqslant c\|x+y\|^2$
  - $|(A(x-y), x-y)| = \|x-y\|^2 |(A(\frac{x-y}{\|x-y\|}), \frac{x-y}{\|x-y\|})| \leqslant c\|x-y\|^2$
  - 对于 $\forall\, x, y \in X$ 满足 $\|x\| = \|y\| = 1$，

$$\begin{aligned}
|(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)| &\leqslant |(A(x+y), x+y)| + |(A(x-y), x-y)| \\
&\leqslant c(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \\
&= 2c(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4c \\
|(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)| &= 2(Ax,y) + 2(Ay,x) \\
&= 2(Ax,y) + 2(y,Ax) \\
&= 2(Ax,y) + 2\overline{(Ax,y)} \\
&= 4\Re(Ax,y)
\end{aligned}$$

□

问：上述命题中的 sup 是否为 max？

一般地，我们总可以找到一列 $\{x_n\}$ 满足 $\|x_n\| = 1$ 使得 $|(Ax_n, x_n)| \to \|A\|$. 可按 (Ax_n, x_n) 的正负将 $\{x_n\}$ 分为两部分，至少有一部分是包含无穷多项的子列，将这串子列仍记为 $\{x_n\}$，不妨设 $(Ax_n, x_n) \to \|A\|$，否则以 $-A$ 替换 A 来讨论.

定理 4.2. 设 X 是 Hilbert 空间，A 是 X 上的对称紧算子，则有至多可数个 λ_i（可以重复），它们是算子 A 的本征值，并对应一组 e_i，使得

$$x = \sum (x, e_i) e_i, \quad Ax = \sum \lambda_i (x, e_i) e_i.$$

证明.

- 因为 A 是紧算子，由 Riesz-Schauder 定理，$\sigma(A)$ 是至多以 0 为聚点的至多可数集.
- 任取 $\lambda \in \sigma_p(A) \backslash \{0\}$，由 Fredholm 第二定理，$m(\lambda) := \dim N(\lambda I - A) < +\infty$，称为 λ 的重数. 设 $\{e_i^\lambda\}_{i=1}^{m(\lambda)}$ 是 $N(\lambda I - A)$ 的一组标准正交基.
- 此外，如果 $0 \in \sigma_p(A)$，则设 $N(A)$ 的标准正交基为 $\{e_i^0\}$，它不一定是可数的.

□

定理 4.3. 设 X 是 *Hilbert* 空间，A 是 X 上的对称紧算子，则

$$\lambda_n^+ = \inf_{E_{n-1}} \sup_{x \in E_{n-1}^\perp \backslash \{0\}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)},$$

$$\lambda_n^- = \sup_{E_{n-1}} \inf_{x \in E_{n-1}^\perp \backslash \{0\}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)},$$

其中 E_n 为 X 的 n 维子空间.

证明. 记 $\mu_n^+ = \inf\limits_{E_{n-1}} \sup\limits_{x \in E_{n-1}^\perp \backslash \{0\}} \dfrac{(Ax, x)}{(x, x)}$.

- 对任意的 E_{n-1}，可找到 $x \in \operatorname{span}\{e_1^+, \cdots, e_n^+\}$ 使得 $x \in E_{n-1}^\perp \backslash \{0\}$. 那么
$$\frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \frac{\sum_{i=1}^n |a_i^+|^2 \lambda_i^+}{\sum_{i=1}^n |a_i^+|^2} \geqslant \lambda_n^+ \Longrightarrow \mu_n^+ \geqslant \lambda_n^+.$$
- 取 $E_{n-1} = \operatorname{span}\{e_1^+, \cdots, e_{n-1}^+\}$.
$$\mu_n \leqslant \sup_{x \in E_{n-1}^\perp \backslash \{0\}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \leqslant \sup \frac{\sum_{i \geqslant n} \lambda_i^+ |a_i^+|^2}{\sum_{i \geqslant n} |a_i^+|^2 + \sum_{i \geqslant 1} |a_i^-|^2 + \sum_\alpha |a_\alpha^0|^2} \leqslant \lambda_n^+.$$

□

定义 4.4. 正算子

命题 4.5. A 为正算子当且仅当 $\sigma_p(A) \subset [0, +\infty)$.

证明. □

Chapter 6

广义函数

1 动机

2 广义函数的概念

广义函数是定义在一类“性质很好”的函数空间上的连续线性泛函. 为此，先引进这类“性质很好”的函数.

2.1 基本空间 $\mathscr{D}(\Omega)$

支集

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集，$u \in C(\overline{\Omega})$，称集合

$$F = \{x \in \Omega \mid |u(x) \neq 0\}$$

关于 Ω 的闭包为 u 关于 Ω 的支集，记作 $\operatorname{supp} u$. 换句话说，连续函数 u 的支集是在此集外 u 恒为 0 的相对于 Ω 的最小闭集.

$C_0^\infty(\Omega)$

对于整数 $k \geqslant 0$，$C_0^k(\Omega)$ 表示支集在 Ω 内紧的全体 $C^k(\Omega)$ 函数所组成的集合，于是

$$C_0^\infty(\Omega) \subset \cdots \subset C_0^{k+1}(\Omega) \subset C_0^k(\Omega) \subset \cdots \subset C_0^0(\Omega).$$

下例表明 $C_0^\infty(\Omega)$ 是非空的.

例 2.1.

定义 2.2. 在集合 $C_0^\infty(\Omega)$ 上定义收敛性如下：我们说序列 $\{\varphi_j\}$ 收敛于 φ_0，如果

(1) 存在一个相对于 Ω 的紧集 $K \subset \Omega$，使得 $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset K$

(2) 对于任意指标 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 都有 $\max\limits_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_j(x) - \partial^\alpha \varphi_0(x)| \to 0$

带有上述收敛性的线性空间 $C_0^\infty(\Omega)$，称为基本空间 $\mathscr{D}(\Omega)$.

2.2 广义函数的定义和基本性质

2.3 广义函数的收敛性

Chapter 7

Banach 代数

1 代数准备知识

定义 1.1. A 称为复数域 $\mathbb{C}$ 上的一个代数，如果

(1) A 是 $\mathbb{C}$ 上的一个线性空间

(2) A 上规定了乘法：$A \times A \to A$，满足

2 谱

定义 2.1. 设 A 是 *Banach* 代数 U 中的元素，定义了 A 的谱值是什么，即没有双边逆. 但是它似乎没有区分什么连续谱什么剩余谱什么点谱之类.

附录 A

泛函分析中的反例

1 纲

- 第一纲集但不无处稠密：$\mathbb{Q}$.

2 映射

- 逆映射不连续

3

定理 3.1 (Riesz 表示定理)**.**

Lax-Milgram 定理可看作将内积改为满足强制条件 $a(u,u) \geqslant \delta\|u\|^2$ 的连续共轭双线性泛函 $a(u,v)$ 的推广.

定理 3.2 (Lax-Milgram 定理)**.**

附录 B

套路

1 有机会成为一组的东西

- 最佳逼近元
  - 设 X 是赋范线性空间，M 是 X 的有限维子空间，那么对于任意 $x \in X$，x 到 M 的距离的最小值能取到.
  - 如果 M 仅仅是闭子空间，那么虽然可以任意精度逼近，但可能取不到.
- 对象分解
  - 设 X 是 Banach 空间 (?)，$\dim X < +\infty$ 或 $\mathrm{codim} < +\infty$，那么存在 L 使得 $X = M + L$.

2 那些要自己构造一个范数的证明

3

已知在像空间中，Tx_n 按范数收敛到 y.

- 任意 $g \in Y^*$，$g(Tx_n) \to g(y)$.
- $T^*g(x_n) \to g(y)$.
- 也就是说，我知道了一部分 X^* 中的元素，作用在 $\{x_n\}$ 上时，的收敛性.

比较，已知 x_n 弱收敛到 x，

- 我就知道了所有 X^* 中的元素，作用在 $\{x_n\}$ 上时，的收敛性.