

连续介质力学讲义

流体力学部分

2014-9-1 第二版
中国科学技术大学
主讲教师：黄建华

献给 固物的师弟子妹

0920801 全体师兄师姐敬上

目录

代序：献给固物的师弟师妹.....	7
第一章 流体力学的基本概念.....	8
§1.1 流体力学的任务.....	8
§1.2 流体的性质及分类.....	10
<I>易流动性.....	10
<II>粘性，理想流体和粘性流体.....	11
<III>压缩性，不可压缩流体和可压缩流体.....	11
§1.3 描述流体运动的两种方法.....	12
<I>拉格朗日法.....	12
<II>欧拉法.....	12
<III>拉格朗日变数与欧拉变数的相互转换.....	16
§1.4 迹线和流线.....	17
<I>迹线.....	17
<II>流线.....	18
<III>射流面、射流；流面、流管.....	19
§1.5 流体微元的运动分析——应变率张量和旋转张量.....	21
§1.6 有旋流动的基本概念.....	23
<I>涡旋场.....	23
<II>涡线、涡面、涡管、涡通量、速度环量.....	24
<III>涡管强度守恒定理.....	25
<IV>涡通量与速度环量的关系.....	27
<V>封闭流体线的速度环量对于时间的变化率——速度环量的随体导数.....	28
<VI>涡通量对时间的变化率——涡通量的随体导数.....	30
<VII>任意物理量 $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ （可是矢量也可是标量）的体积分的随体导数.....	30
§1.7 无旋流动的基本概念.....	31
<I>速度有势.....	31
<II>速度势与环量.....	32
<III>速度势在单连通和双连通域中的性质.....	34
<IV>加速度有势.....	36
§1.8 作用在流体上的力.....	37
<I>理想流体的应力张量.....	37
<II>静止流体的应力张量.....	37
<III>一般流体的应力张量.....	38
第二章 流体力学基本方程组.....	39
§2.1 连续性方程.....	39
§2.2 运动方程（动量方程）.....	41
§2.3 动量矩方程.....	42
§2.4 能量方程.....	42
§2.5 本构方程.....	48
§2.6 Navier-Stokes 方程.....	52
§2.7 状态方程、内能及熵的表达式.....	52
<I>状态方程.....	52

<II> 内能及熵.....	52
§2.8 流体力学基本方程组.....	53
<I> 微分形式的基本方程组.....	53
<II> 积分形式的基本方程.....	53
§2.9 初、边条件.....	54
<I> 初始条件.....	54
<II> 边界条件.....	54
第三章 理想流体力学的一般理论.....	57
§3.1 理想流体.....	57
§3.2 理想流体运动方程组.....	57
<I> 惯性系下的运动方程组.....	57
<II> 非惯性系下的运动方程.....	59
§3.3 流体静力学.....	60
<I> 均匀重力场中的静止流体.....	60
<II> 阿基米德定律.....	61
<III> 重力场中达到静力平衡时流体的 ρ , P 和 T	62
<IV> 重力场中不发生对流的条件.....	62
§3.4 伯努利方程.....	64
<I> 惯性系中的伯努利方程.....	64
<II> 非惯性系中的伯努利方程.....	66
§3.5 理想流体的能量通量.....	67
§3.6 理想流体的动量通量.....	70
§3.7 环量守恒.....	72
§3.8 势流.....	72
§3.9 不可压缩流体.....	75
§3.10 不可压缩流体的平面运动.....	76
<I> 平面运动, 流函数及其必须满足的方程.....	76
<II> 流线就是等流函数线.....	77
<III> 两点的流函数值之差等于过此两点连线的流量.....	78
<IV> 不可压缩流体的平面势流.....	78
<V> 理想不可压缩流体平面定常无旋运动问题的数学提法.....	80
<VI> 用复变函数法解平面无源、无旋定常运动.....	81
第四章 粘性流体力学一般理论.....	92
§4.1 粘性流体.....	92
§4.2 粘性流体的基本方程.....	92
<I> 粘性流体控制方程组.....	92
<II> 粘性流体不可压缩流动控制方程组 (当温度变化不大时).....	95
<III> 初、边条件.....	96
§4.3 不可压缩粘性流的几个简单精确解.....	97
<I> 平板库艾特 (Couette) 流.....	97
<II> 平板泊肖叶 (Poiseuille) 流.....	99
<III> 圆管泊肖叶流 (也可以是任意等横截面的管道).....	101
§4.4 粘性流动的相似律.....	103

<I> 几何相似、运动相似和动力相似.....	103
<II> 粘性不可压缩流动动力相似的充要条件.....	105
<III> 实验数据分析.....	107
<IV> 方程中各项数量级分析与比较.....	108
§4.5 层流和湍流.....	111
§4.5.1 层流.....	112
<I> 关于方程组的讨论和解题途径.....	112
<II> 层流边界层.....	112
<III> 层流边界层方程.....	113
<IV> 平板边界层.....	117
§4.5.2 湍流.....	118
<I> 热对流的不稳定性——Rayleigh-Bénard 对流模型.....	120
<II> 雷诺平均.....	123
<III> 雷诺方程.....	125
<IV> 雷诺应力.....	126
<V>湍流脉动动能方程和平均动能方程.....	129

代序：献给固物的师弟师妹

这份来之不易的连续介质力学讲义，由 09 级固物全体 31 位师兄师姐一同整理而成。09 级以前，每届的固物同学在学习这门课时，均是由黄老师板书，同学们抄写。师生一同费神费力，老师没法讲授很多知识，同学的笔记更是多有疏漏，很是不便。我们自己辛苦还自罢了，但怎么能让以后一届又一届的师弟师妹们也这样呢？为了让黄老师今后不再受累，也为了以后的师弟师妹们着想，从 2011 年 9 月 6 号，那个周二下午开始，我们每节课后都向黄建华老师借来他上课用的讲义，每人分担一点，一字一字，一个公式一个公式，手打出来。历时四个月，依靠我们这 31 双手，硬是打出了这份十万字的讲义。希凭此回报恩师教导之恩，更希望借此略尽学长学姐之责，为师弟师妹做一些贡献。

当你们接过这件凝结着师兄师姐心血、汗水、爱心、热心的艺术品时，当你们阅读着这份干净整洁、内容翔实的讲义时，请不要忘记那些曾经默默奉献过的人的名字。陈余宽、辛卫峰、吕尧学长，他们主动承担了大量的文字、公式的手打录入工作，并且在 12 月份里作为编辑，在繁忙的期末考试期间，依旧坚持进行了大量的最繁重的讲义汇总与整理工作。他们是出力最多的人，也是最最辛苦的人；陆洲、沈智超、张亚运、裘鸿瑞、张介文、罗彬、李启华、胡晓临、高超、罗恒、毛伟、詹启伟、张旭阳、王俊超、何新骥、赵露杨学长，他们在整个学期里，奉献出了自己宝贵的时间与精力，热情承担了绝大多数的公式与部分文字录入工作。他们中，有很多人在学期中参加 GRE 考试。但即便是在紧张准备 GRE 考试期间，依然承担了超过 9 成的公式录入工作量；葛楠、郭彬、付深尧、龙雨学长，十万字里超过 6 成的文字录入工作由他们完成；还有尹健行、陈箫翰、林创欣学长以及陈易平、胡昞、秦蕾学姐与少年班的杨洋、贾哲学长，他们也参与期间，完成了很多很多的工作。

我在此怀着一颗谦卑的心，再次向我们这些可爱的学长学姐们致敬。没有你们的辛苦，就没有这份讲义；没有你们的热心，就没有师弟师妹们的便利。我一直觉得，09 级的地空是最有人情味的一个班级，它最欢乐，也最活泼，也最热情，也最聪明。这份连续介质力学讲义，抑或说是一件我们共同创作的艺术珍品，字里行间流露出的是 09 地空热情、团结与共享的精神。一字一句、一个符号、一个公式，都显得那么可爱，那么有生命力。她是我们共同缔造的无价之宝，她是师兄师姐献给你们最珍贵的礼物。

我欣赏着她，就像欣赏一件自己亲手参与缔造的艺术珍品一样。我们谨将她，将这件我们全体 31 位师兄师姐四个月以来同心协力创作出来的艺术珍品，献给你们。我们谨希望能以此为师弟师妹们的学习进步略尽绵薄之力。希望地空的团结与共享精神，能随着这份讲义，代代流传，永不止息。

这便是我们最大的希冀。

0920801 全体师兄师姐 敬上

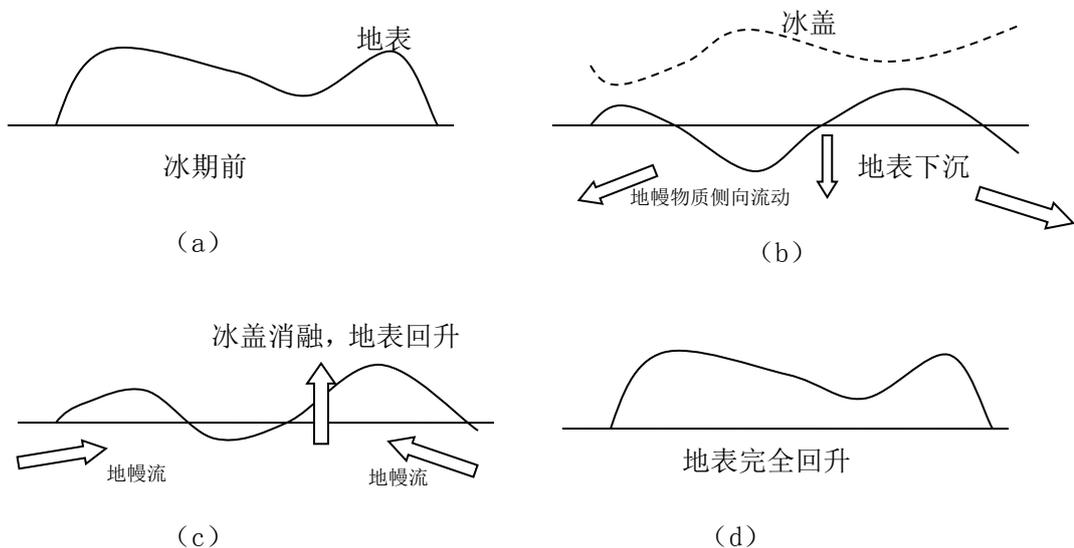
第一章 流体力学的基本概念

§1.1 流体力学的任务

作为连续介质力学的分支学科之一的流体力学，是研究流体的宏观机械运动规律以及流体的机械运动和其他形式的运动（如热运动、化学运动、电磁运动等）之间的相互作用。那么何为流体呢？对流体的感性认识，大家都是非常丰富的。比如水、油等液体和各种气体。现在我们给流体下一个精确定义：在任意小的持续切向力作用下，流体发生变形，并且变形将持续进行——即产生流动。换句话说，流体处于静止时，不能承受任何切向力。我们知道，固体则具有另一种性质：即固体在切向力作用下虽然也要发生变形，但这种变形达到一定程度（与受力大小有关）就停止下来不再继续进行，物体在新的状态下重新处于静止状态。所以，固体不表现出流动性（指在屈服极限以内）。

自然界并非所有物质的力学性质非流体类即固体类，它与物体所处的物理环境有关。在一定条件下，固态的物质也会表现出类似流体的性质。例如：水在 0°C 以上为流体，而在 0°C 以下则为固体；又如，地球介质中的地幔物质位于地下约 100 km 以下，其所处的温度与压力较上伏的岩石层板块所处的温、压要高得多。由于固态蠕变作用（即对于结晶物质，如果温度达到了熔融温度的一个较大的分数值，那么热激活蠕变过程将发生），这种高温、高压条件下，固态地幔岩石将表现出类似流体的性质。

关于地幔流变特性的重要信息来自地幔对地表加载和卸载的动力学响应的研究。在最近一次大冰期期间北欧的斯堪德纳维亚半岛（半岛的东南部是瑞典，西北部是挪威）曾被厚厚的冰盖所覆盖，冰盖对地表加载迫使地幔物质横向流动，从而使冰盖以下的地表大幅度下沉（见图 b），当大约一万年冰盖消融时，地表回跳（图 d）。回跳率可通过测量回升的时间来确定。



由此可见：地球介质除了具有弹性固体（主要是刚性较大的岩石层部分）的力学特性，还具有粘性流体（主要是地幔物质）的特性。所以我们要研究流体力学，以使用流体力学的理论和研究方法去探讨地幔对流、板块运动等地学问题。

本课程由于时间的限制，我们不能全面地讨论流体的机械运动和其他各种形式的运动之间的相互作用，比如与电磁之间的相互作用就是磁流体力学的研究范畴。同时也不可能考虑

所有的题材，为此我们为此课程所涉及的研究范围作以下限制。

- (1) 与弹力一样，我们对流体的讨论仍局限于牛顿力学和经典热力学的范围内。即在我们的讨论中，涉及的自然界普适规律仍旧是：质量、动量、动量矩守恒定律和热力学第一、第二定律。完全与我们在弹力中的处理方法一样，即当我们着手解决一个具体的流体力学问题时，不仅要适当选择上述普适的基本规律，还要补充描述流体物理性质的“本构方程”。

流体力学的任务就在于，运用由适用于流体的上述普适规律和具体形式的流体本构方程构成的一套方程，去解决实际中出现的各种流体运动问题。

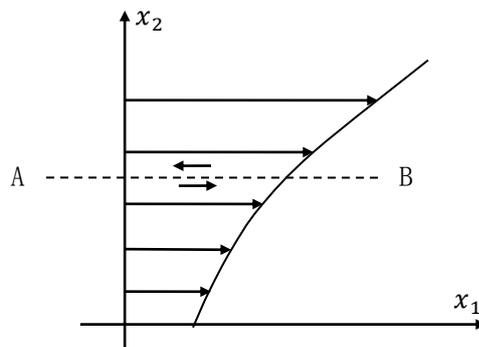
- (2) 将流体按连续介质处理，即所考虑的流动尺度总是比分子的平均自由程大得多。按钱学森提出的判别标准，当

$$L/d > 100$$

时，可用连续介质模型。其中 L 为流场尺度， d 为分子间距。

- (3) 我们主要考虑不可压缩流动，即压力变化不引起密度显著变化的流动。在等温流动中，这意味着密度是常量，在其他流动中则密度只是温度的函数。有两种方式可以使这个条件得到满足。一是流体的可压缩系数很小(即体积变形模量很大 $K = -\frac{dP}{d\theta} \rightarrow \infty$)，以至即使出现很大的压力变化也只能引起很小的密度变化。另一是压力变化充分小，以致即使可压缩系数并不很小，密度的变化却还是很小的。对第一种情况，液体的运动可看成是不可压缩的。对第二种情况，只要流动速度处处小于声速，则对气体的流动也可看成是不可压缩流动。

- (4) 我们只考虑 Newton 流体，牛顿流体是一种粘性流体。我们考虑如下图所示的一个简单的流动形态来了解牛顿流体所指的是什么。关于这种(流体的)流动形态和一般流动形态之间的联系，以及牛顿流体更严格的定义，我们将在以后的章节中讨论。



在图中，我们看到所有的流体都朝一个方向 (x_1 轴正方向) 平行运动(所谓层流)，但沿垂直 x_1 轴方向来看，速度的大小是变化的，这就是说，流动速度的唯一非零值分量只有 x_1 方向的分量 v_1 ，它是坐标 x_2 的函数，即： $v_1 = v_1(x_2)$ 。在流体内部垂直于 x_2 的任一平面上都有应力(是剪应力)作用着。在图中，平面 AB 上部运动较快的流体将拉动下部的流体向前，而 AB 下部运动较慢的流体则将把上部的流体向后拉(相对而言)。因此，大小相等，方向相反的力将分别作用于 AB 平面的上下两部分流体上。这种内应力的产生就是所谓粘性的作用。对于牛顿流体，这种由粘性作用引起的内应力(即剪切应力)与速度梯度成正比。如用 τ 表示剪应力，则有：

$$\tau = \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

其中 μ 是流体粘性系数，亦称粘度。 μ 反映了流体的物理性质，是一个物理参数。对于牛顿流体， μ 是一个与速度场无关的常数，但 μ 可以是温度的函数，即 $\mu = \mu(T)$ 。

(5) 我们将主要讨论热运动与流体机械运动之间的相互作用。

上面我们把本课程流体力学部分的研究范围作了一些限定。下面对热力学的“体系”作一简述。

我们知道：在基础力学和热力学中，运用力学定律或热力学定律去讨论一个问题，首先的步骤总是规定一个分析对象，称为“体系”。一般力学中所取的体系，通常是由不变的物质组成的；热力学中所取的体系则既可以是不变的物质体系，也可以是有内外物质交换的体系。前者称为封闭系，后者称为开放系。

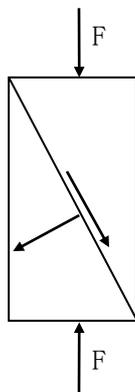
同样流体力学中讨论一个问题，也要首先选择一个体系。流体力学体系分“物质体系”和“控制区域”两种。“物质体系”在不同时刻始终由相同的物质客体所组成，过程中体系与外界没有宏观的物质交换。“控制区域”则是空间某一不变的域，其中有流体在运动，而控制区域和外界一般是有物质交换的。应当注意，在分析流体力学问题时，正确地选取一个体系，对于处理流体力学问题，是一个首要环节，不可忽视。流体力学中，所取的体系可以是有限大的，也可以是无限小的。取无限小体系讨论问题时，基本定律在数学上将表现为某些微分方程，它们的解能提供流体运动的细节情况。但在有些问题中，我们只需要了解流体运动的某些总体量，如它施于物体上的总作用力等。此时，我们可取一个有限大体系进行分析，基本定律在数学上将表现为某些积分形式的方程。这两种方法同样都是重要的，实际在进行理论分析时，通常应用无限小体系为研究对象。

§1.2 流体的性质及分类

在连续介质假设下，我们将流体视为宏观的均匀连续体。所以我们研究流体运动时，关心的是流体的宏观性质。流体的宏观性质主要是易流动性、粘性及压缩性。

<I>易流动性

流体的易流动性是相对固体而言的。我们知道固体在静止时可承受切向应力，只要所受的切应力不足以使固体发生错断，则固体总会在发生一定形变后，重新达到平衡状态。



例如，一岩石样品加压后（如上图），只要压力不足以使样品破裂，则在新的平衡态下，

样品中的任意截面上既有法向应力又有切向应力。而流体在静止时，不能承受切向应力，换句话说，只要有持续的切向应力作用于流体上（无论该切向应力多大），都将使流体产生任意大的持续变形——流动。因此，流体在静止时只有法向应力而没有切向应力。流体的这个宏观性质称为易流动性。

<II>粘性，理想流体和粘性流体

流体在运动时，相邻两层（沿流动方向的任意一假想平面所隔开的两层）流体间的相对运动，互相有抵抗。这种抵抗力称粘性应力。流体的这种因流动产生的抵抗变形的性质称为粘性。粘性是流体的固有特性，粘性的大小因流体而异，并且显著地随温度而变化。例如沥青在常温下是固态的，随着温度的升高其粘性减小，变得易于流动。

实验表明：粘性应力的大小与粘性及相对速度成正比。当流体的粘性较小（典型的有空气、水等），运动的相对速度也不大时，流体运动所产生的粘性应力相对其他类型的力（如惯性力）可忽略不计。此时，我们可将流体近似看成是无粘性的，这样的流体称为理想流体。显然，理想流体对于切向变形（即流动）没有任何抗拒能力。因此，对流体按其有无粘性可分为粘性流体和理想流体两大类。必须清楚：理想流体是真实流体在一定条件下的近似。所有的流体都是具有粘性的！

除了粘性外，流体还有热传导及扩散等性质。当流体中存在温度差时，热量将由高温区向低温区传送，这种现象称为热传导（例如烧开水时，壶底接触炉火的区域温度相对壶顶部水的温度要先升高，这样热量由壶底向上传送，直至整个壶内水均匀地到达沸点温度）。同样的，在流体混合物中，不同流体的浓度具有差异时，高浓度区将向低浓度区输送高浓度流体的物质（例如，在一杯水中滴入墨水，因墨水的浓度比水的浓度高，所以可以看到墨水向四周扩散，直至墨水与水均匀地融为一体）。这种现象称为扩散。

粘性、热传导性、扩散性等流体的宏观性质，他们有着共同的微观原理，都是由分子的不规则运动（即布朗运动）所致。分子在不规则运动中，就像一件运输工具，它们携带着动量、能量和质量并将这些量从高值区向低值区输送，使不同流体区域内的这些物理量的统计平均在整个流体内趋于均匀。这种性质称为分子运动的输送性质。例如，动量输运在宏观上表现为粘性现象，能量输运表现为热传导现象，质量输运表现为扩散现象。

理想流体忽略了粘性，即忽略了分子运动的输送性质，因此在理想流体中也不应该考虑热传导和扩散。

理想流体不考虑热传导，也就是说理想流体各部分之间（当然，还包括流体和相邻物体之间）没有热交换，这意味着整个流体中发生的运动都是绝热的。因此，理想流体的运动总是假设为绝热的。

<III>压缩性，不可压缩流体和可压缩流体

在流体的运动过程中，由于压力、温度等因素的改变，流体质点的体积（or 密度，当质点的质量一定时），或多或少有所改变。流体质点的体积或密度在受到一定压力差和温度差的条件下可以改变的这个性质称为压缩性。真实流体都是可以压缩的。它的压缩程度依赖于流体本身的性质和外界的条件。液体在通常的压力或温度下，压缩性很小。例如水在 100 个大气压下，容积缩小 0.5%；温度从 20℃变化到 100℃，容积降低 4%。因此在一般情况下液体可以近似的看成是不可压缩的。气体的压缩性比液体大得多，所以一般情况下应将气体视为可压缩流体处理。但如果压力差和运动速度较小，并且没有很大的温度差，则实际上气体所产生的体积变化也不大。此时，也可以近似地将气体视为不可压缩的。

由上述讨论可见：真实流体都是可压缩的，但对液体或低速运动且压力差和温度差均不大的气体而言，在一般情况下可将它们近似地视为不可压缩的。这样我们便可按压缩性将流体分成可压缩流体和不可压缩流体两大类。必须清楚：不可压缩流体也只是真实流体在一定

条件下的近似。

在实际中，通常对具体的流体力学问题的粘性、压缩性与环境的关系加以分析，以便将问题的主要矛盾突出而忽略次要、影响不大的因素，进而来构筑我们对具体问题的物理数学模型。这就是我们对上述流体宏观性质分析、讨论的目的所在。

§1.3 描述流体运动的两种方法

在研究流体运动时，首先要解决的问题是用什么方法来描述流体的运动。流体力学中描述流体运动的方法有两种，即：

- ①采用随流体质点运动的坐标。
- ②采用在空间中固定的坐标。

前者被称为拉格朗日描述法，后者称为欧拉描述法。

拉格朗日描述法是一种物质描述法，是以流体中个别质点的运动作为研究的出发点，从而进一步研究整个流体的运动。而欧拉法是一种空间描述法，是以流体流过空间某点时的运动特性为研究的出发点，从而进一步研究流体在整个空间里的运动情况。下面讨论这两种方法的实质及数学表示法。

<I>拉格朗日法

拉格朗日法的注意力集中与运动的质点。要研究某个确定的质点的运动，首先必须有一个表征这个质点的办法，以便识别、区分不同的流体质点。因为在每一时刻，流体中每一质点都占据唯一确定的空间位置，因此通常采用初始时刻 ($t = t_0$) 流体质点的空间坐标 (x_i^0) 来作为区分不同流体质点的标志。显然，不同的质点有不同的 ($x_i^0, i = 1, 2, 3$) 值。于是任意流体质点 x_i^0 在任一时刻 t 时所处的空间位置数学上可表示为 (在直角坐标系中)：

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}(x_i^0, t) \\ \text{or } x_j &= x_j(x_i^0, t) \quad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad \dots (1-3-1)$$

这里相当于把各流体质点在初始时刻编上号，即 x_i^0 。随着 x_i^0 的改变，来看各流体质点的时、空特性。其中 x_i^0 是初始时刻流体质点在空间的位置， x_j 是 t 时刻流体质点在空间的新位置。我们把自变量 (x_i^0, t) 称为拉格朗日变数。由 (1-3-1) 可见：当 x_i^0 固定时，让 t 改变，则此式代表某一流体质点的运动轨迹 (或称运动规律)。当 t 固定时， x_i^0 改变，则此式描述了同一时刻，不同流体质点的空间位置。所以 (1-3-1) 式可以描述所有质点的运动。但它不是空间坐标而是流体质点标号的函数，所以拉氏描述法不具有“场”的概念。

从 (1-3-1) 式出发，可得流体质点的速度和加速度 (假定 $\vec{r} = \vec{r}(x_i^0, t)$ 具有二阶连续偏导数)，即速度和加速度分别为：

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{\partial x_i(x_j^0, t)}{\partial t} \\ a_i &= \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 x_i(x_j^0, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad \dots (1-3-2)$$

<II>欧拉法

欧拉法把注意力集中在空间各点上，也就是用“场”的观点来表述流体的运动。具体来

说就是把空间每一点上流体的各种物理量（如速度、密度、压力、温度等）随时间的变化变化情况了解清楚，从而达到对整个流场的运动情况的了解。

在欧拉法中，我们不能像在拉格朗日法中那样直接测量出每个流体质点的位置随时间变化的情况。因为对于一个固定的空间点，在不同的时刻由不同的流体质点占据着。所以站在固定的空间点上无法观测和记录通过它的每个流体质点以前和以后的详细情况。但是，不同时刻经过固定空间点的流体质点的速度是可以测量的。因此，在欧拉法中采用速度矢量来描述固定点上流体运动的变化情况是方便的。即：

$$v_i = v_i(x_j, t) = \frac{dx_i}{dt} \quad i, j = 1, 2, 3$$

•••• (1-3-3)

这里 x_i 是空间点的位置矢量。

当然，空间固定点的状态函数也是可以测量的，即有：

$$P = P(\vec{r}, t) \quad , \quad \rho = \rho(\vec{r}, t) \quad , \quad T = T(\vec{r}, t)$$

压力函数 , 密度函数 , 温度函数

•••• (1-3-4)

自变数 (\vec{r}, t) 称为欧拉变数。由连续性假定，除了个别的点、线、面以外，欧拉速度函数等都具有连续的一阶偏导数。

由 (1-3-3) 式可见：当固定空间点，让 t 改变时，得到固定空间点上速度随时间的变化规律。当固定时间 t ，让 \vec{r} 改变时，得到某一瞬时流场中的速度分布规律，相当于给流场在 t 时刻拍一张照片。

由 (1-3-3) 和 (1-3-4) 式还可见：欧拉法中用以描述流体运动、状态的函数都是“场”函数，所以可广泛利用场论知识。

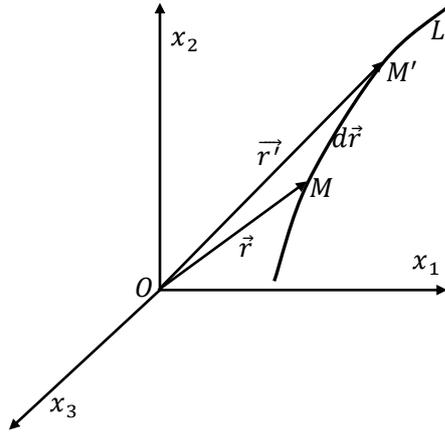
若场量 v_i, P, ρ, T 不随空间点变化，则这样的场称为均匀场，反之称为非均匀场；若场量不随时间而变（即 $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ），则流场称为定常场，反之称为不定常场。

下面我们来求欧拉法表示的流体质点的加速度。假定速度函数 (1-3-3) 具有一阶连续偏导数，则有加速度：

$$a_i = \frac{d}{dt} v_i(\vec{r}, t)$$

•••• (1-3-5)

设有一流体质点在流场中运动，其运动轨迹为 L （如下图）。在 t 时刻，该质点占据空间点 M ，速度为 $v_i(\vec{r}, t)$ ，过了 Δt 时刻后，该质点运动到 M' 点，速度为 $v_i(\vec{r}', t + \Delta t)$ 。



根据加速度的定义，有：

$$\frac{dv_i}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_i(\vec{r}', t + \Delta t) - v_i(\vec{r}, t)}{\Delta t} \quad \dots (1-3-6)$$

由上式可以看出：使质点获得加速度的原因有两个。一是当质点由M点运动到M'点时，用了 Δt 时间。在此时间内，由于场的不定常性使速度发生变化。二是在 Δt 时间内，质点沿其迹线L移动了 $|\Delta \vec{r}'|$ 距离，由于场的不均匀性亦使速度发生变化。因此我们可将(1-3-6)式右边分解为两部分：

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_i(\vec{r}', t + \Delta t) - v_i(\vec{r}', t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_i(\vec{r}', t) - v_i(\vec{r}, t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_i(\vec{r}', t + \Delta t) - v_i(\vec{r}', t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}'}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta \vec{r}' \rightarrow 0} \frac{v_i(\vec{r}', t) - v_i(\vec{r}, t)}{\Delta \vec{r}'} \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \end{aligned} \quad \dots (1-3-7)$$

上式中右边第一项是由于场的非定常性 $\left(\frac{\partial}{\partial t} \neq 0\right)$ 引起的速度变化，称为局部导数或定点导数；右边第二项是由于场的非均匀性 $\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \neq 0\right)$ 引起的速度变化，称为位变导数或对流导数。所以流经某空间点的流体质点的加速度就是局部导数和位变导数之和，称为随体导数。若记微分算符 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ ，则任一物理量B的随体导数为：

$$\frac{DB}{Dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + v_j \frac{\partial B}{\partial x_j} \quad \dots (1-3-8)$$

例 1：已知 $t = 0$ 时，质点 A 经过原点(0,0,0)，其温度为 $T = 0^\circ\text{C}$ ； $t = 1$ 秒时，质点A经过离原点 1 米处的(1,0,0)点，这时它的温度为 $T = 3^\circ\text{C}$ ，而同时质点B经过原点，其温度为 $T = 2^\circ\text{C}$ 。试计算原点处的 $\frac{\partial T}{\partial x_1}$ 和 $\frac{\partial T}{\partial t}$ ，求质点A在这段时间间隔内的温度随体导数 $\frac{DT}{Dt}$ ，并问三者有

何关系？

解：由题设知， $t = 0$ 时，流体只有 x_1 轴向的速度，质点A由(0,0,0)点移至(1,0,0)点经过的时间为1秒，所以质点A的速度为：

$$v_1 = \frac{1m}{s}, \quad v_2 = v_3 = 0 \quad \dots (1)$$

质点A在这段时间间隔内的温度变化率为：

$$\frac{DT}{Dt} \cong \frac{3-0}{1} \text{°C/s} = 3\text{°C/s} \quad \dots (2)$$

又： $t = 1$ 时，A点所处位置(1,0,0)点与B点所处位置(0,0,0)点之间的温度差为 $3\text{°C} - 2\text{°C} = 1\text{°C}$ ，间距为1米，所以：

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x_1} &\cong \frac{1\text{°C}}{1m} = 1\text{°C/s} \\ v_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} &= 1\text{°C/s} \end{aligned} \quad \dots (3)$$

(3)式正是温度位变导数，是由温度场的不均匀性所引起的。

再看： $t = 1$ 秒时，位于(0,0,0)点的质点B与 $t = 0$ 时位于(0,0,0)点的质点A之间的温度差为 $2\text{°C} - 0\text{°C} = 2\text{°C}$ ，时间间隔为1秒，所以有：

$$\frac{\partial T}{\partial t} \cong \frac{2\text{°C}}{1s} = 2\text{°C/s} \quad \dots (4)$$

(4)式正是温度定点导数，是由温度场的非定常性引起的。

显然， $\frac{DT}{Dt}$ 、 $\frac{\partial T}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial T}{\partial x_1}$ 之间满足随体导数关系：

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_1 \frac{\partial T}{\partial x_1}$$

例 2：不可压缩流体的数学表示

按不可压缩流体的原意，流体质点的密度在运动过程中不变称为不可压缩流体，亦即密度的随体导数为零：

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho = 0 \quad \dots (1-3-9)$$

(1-3-9)式就是不可压缩流体的数学表示。但是，这并不意味着流场中的密度处处时时都是同一常数。实际上，流场中密度处处不变（均质 $\nabla \rho = 0$ ）又时时不变（定常 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ）

乃是一种更强的约束。而 $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ ，只是需要 $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ 和 $\vec{v} \cdot \nabla\rho$ 的综合效应为零即可，它允许流场中不同点的质点密度不同（即 $\nabla\rho \neq 0$ ）。所以只有当为不可压缩（ $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ ）、均质流体（ $\nabla\rho = 0$ ）时，流场中的流体密度才是处处时时为同一常数，即： $\rho = \text{const}$ （在所有时空点上）。

<III>拉格朗日变数与欧拉变数的相互转换

因为拉式方法和欧式方法从不同观点出发描绘了同一流场的运动，所以它们之间可以相互转换。

实际当中，常会遇到这种转换问题，例如给定欧拉速度，要求质点的轨迹，就需要用到从欧拉变数到拉式变数的转换（详见 § 1.4 中的例子）。

①拉氏→欧氏

若已知以拉格朗日变数 x_i^0 所表示的物理量 $B = B(x_i^0, t)$ ，如果需要变换为以欧拉变数 x_i 所表示的物理量 $B = B(x_i, t)$ ，则可借助 (1-3-1) 式来实现。这时 (1-3-1) 式可视为是变量置换关系式，其可置换条件是函数行列式：

$$D = \frac{\partial(x_i)}{\partial(x_i^0)} \neq 0 \ \& \ \infty \quad \dots\dots (1-3-10)$$

如此，(1-3-1) 式中的 x_i^0 可有单值解为

$$x_i^0 = x_i^0(x_i, t) \quad \dots\dots (1-3-11)$$

将上式代入用拉氏变数表示的式子，就可得到用欧拉变数表示的函数。这样，就完成了拉氏到欧氏变数的转换。

例如，将 (1-3-11) 式代入用拉氏变数表示的压力分布函数 $P = P(x_i^0, t)$ 中，可得：

$$P = P(x_i^0, t) = P[x_i^0(x_i, t), t] = P(x_i, t)$$

这样，上式就变成了以欧拉变数表示的压力分布函数。

②欧氏→拉氏

若已知从欧拉变数 x_i 表示的物理量 $B = B(x_i, t)$ ，如果需要变换为以拉氏变数 x_i^0 所表示的物理量 $B = B(x_i^0, t)$ ，则必须利用式 (1-3-3)。若欧拉速度 v_i 已知，则由：

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} \quad \text{or} \quad dx_i = v_i dt$$

积分可得：

$$x_i = x_i(C_i, t) \quad \dots\dots (1-3-12)$$

这里 C_i 是积分常数，是由 $t = 0$ 时， $x_i = x_i^0$ 的初始条件确定的，即：

$$C_i = C_i(x_i^0) \quad \dots\dots (1-3-13)$$

将上式带入 (1-3-12) 得

$$x_i = x_i [C_i(x_i^0), t] = x_i(x_i^0, t) \quad \dots (1-3-14)$$

上式就是拉格朗日描述下的质点运动规律。

将 (1-3-14) 式代入用欧拉变数表示的式子里, 就可得到用拉氏变数表示的物理量。这样就完成了欧氏到拉氏的变数变换。例如, 有以欧拉变数表示的密度分布函数 $\rho(x_i, t)$, 将 (1-3-14) 式代入有:

$$\rho = \rho(x_i, t) = \rho[x_i(x_i^0, t), t] = \rho(x_i^0, t)$$

上式就变换为用拉氏变数表示的密度分布函数了。

§1.4 迹线和流线

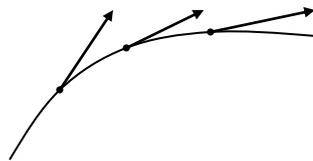
我们下面讨论流体运动的几何表示, 几何表示具有形象、直观的特点, 它将有助于我们认识和分析流体运动。

<I>迹线

定义: 流体质点运动的轨迹叫做迹线。在拉格朗日描述法中, 我们是通过观测不同流体质点的运动规律:

$$x_i = x_i(x_i^0, t)$$

进而研究整个流体的运动。上式就是流体质点轨迹的参数方程, 从参数方程中消去参数 t , 即得质点的轨迹方程。有了轨迹方程, 就可描绘出流体质点的迹线, 它是同一流体质点在不同时刻所占据的空间点位置连成的曲线, 该曲线上每一点的切线方向给出了质点在这一时刻的速度方向。



例: 已知流体质点的位置由拉氏变数表示为

$$x_1 = x_1^0 x_2^0 \cos \frac{\alpha(t)}{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2} \quad \dots (1)$$

$$x_2 = (x_1^0 \cdot x_2^0)^2 \sin^2 \left[\frac{\alpha(t)}{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2} \right] \quad \dots (2)$$

其中 $\alpha(t)$ 是关于时间 t 的函数, 求质点的轨迹。

解：将（1）式两边平方与（2）式相加，即可消去参数 t ，得：

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2 &= (x_1^0 \cdot x_2^0)^2 \\ \text{Or} \\ x_2 &= (x_1^0 \cdot x_2^0)^2 - x_1^2 \end{aligned} \quad \dots (3)$$

（3）式是一个抛物线方程，表明流体质点的迹线是一抛物线。

如果流体运动是以欧拉速度给出的，则要得到迹线方程，就必须通过变数转换来实现，即先将欧拉变数转化为拉氏变数，亦即解微分方程：

$$dx_i = v_i(x_i, t)dt \quad \dots (1-4-1)$$

例：已知 $\vec{v} = Ax_1\vec{e}_1 - Ax_2\vec{e}_2$ （这是一个定常流），求流体质点的轨迹。

解：已知 $v_1 = Ax_1$ ， $v_2 = -Ax_2$ ，则由（1-4-1）式，有：

$$dx_1 = v_1 dt = Ax_1 dt, \quad dx_2 = v_2 dt = -Ax_2 dt$$

这是两个一阶线性齐次常微分方程，积分可得

$$\ln x_1 = At + \ln C_1, \quad \ln x_2 = -At + \ln C_2 \quad \text{or} \quad \begin{cases} x_1 = C_1 e^{At} \\ x_2 = C_2 e^{-At} \end{cases}$$

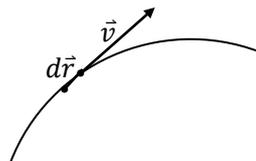
上两式相加（乘）消去参数 t 得

$$x_1 x_2 = C_1 C_2$$

其中， C_1 、 C_2 是与拉氏变数有关的积分常数，可由初始条件来确定。

<II>流线

定义：流线是流场中这样的曲线：它是由同一时刻，不同流体质点所组成的曲线，它是一条物质线。流线上所有流体质点的瞬时速度都与该流体质点所在的流线上那一点的切线方向一致。



用数学表示，即为

$$d\vec{r} \times \vec{v} = 0 \quad \text{or} \quad \varepsilon_{ijk} dx_j v_k = 0$$

•••• (1-4-2)

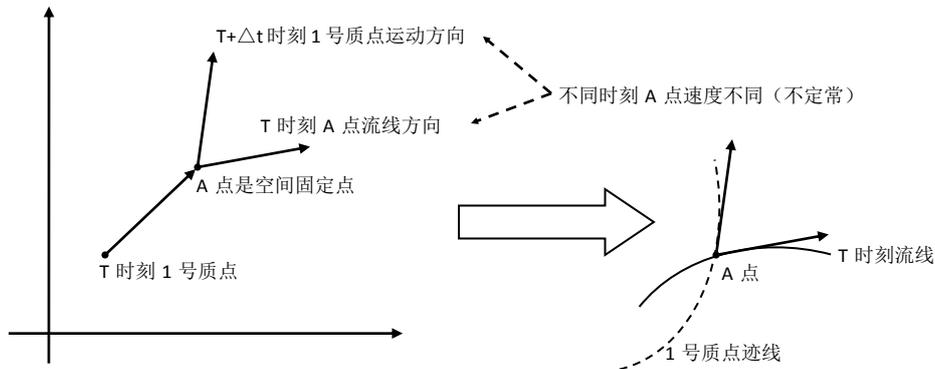
式中, $\vec{v} = \vec{v}(x_i, t)$ 是欧拉速度, $d\vec{r}$ 是流线切线方向的微元矢量。式 (1-4-2) 也可写成:

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3}$$

•••• (1-4-3)

上式是由两个独立的常微分方程组成的方程组, 其中 t 是参数。因为流线是对同一时刻流场的几何描述, 所以在积分 (1-4-3) 式时, 视 t 为常数。换句话说: 对于不同时刻可能有不同的流线。

由上面的讨论我们清楚地看到: 迹线是拉格朗日描述下, 同一流体运动规律的一种几何表示, 而流线则是欧拉描述下, 流场中速度的几何表示。若流场是非定常场, 则通过空间一点的流线与迹线一般是不重合的。这是因为在非定常场的情况下, 在空间某固定点上, 流体质点的速度随时间而改变 (即非定常), 流体质点沿迹线移动到下一个空间点时, 在新的位置上流体质点的速度相对于上一瞬时已发生了变化, 流体质点自这一位置以后的运动迹线自然与上一瞬时的流线不重合了。只有在定常流场情形, 固定空间点上流体速度不随时间改变, 这样过一点的流线与迹线才是重合的。

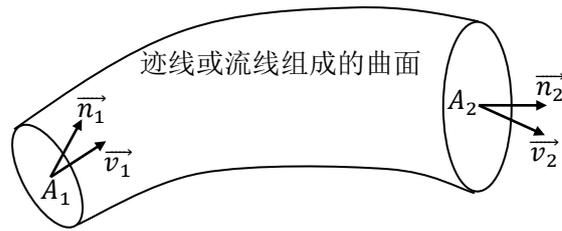


特别地, 流线有以下四个性质。

- ① 一般情况下流线不能相交。因为空间每一点同一时刻只有一个速度, 所以两条流线不能同时通过同一点。
- ② 流场中每一点都有流线通过。
- ③ 流线的形状及位置, 在定常时不随时间变化, 在不定常时一般要随时间变化。
- ④ 定常流动时, 流线与迹线重合。

<III>射流面、射流; 流面、流管

<a>在流体中任取一封闭的, 非轨迹且不自交的曲线 C (如图), 通过 C 上每一点作迹线, 由这些迹线组成的曲面成为射流面。射流面所包围的流体称为射流。若曲线 C 无限小, 则称对应的射流为射流元; 若曲线 C 有限, 对应的就称为有限射流。射流面, 射流也是与拉氏观点相联系的。



若上述曲线 C 非流线，则在 C 上每一点有流线通过，而这些流线组成的曲面称为流面，流面所包围的流体称为流管。与<a>中所述相同，也有流管元和有限流管等概念，并且它们是与欧拉观点相联系的。

在非定常场中，过同一曲线 C 的射流和流管一般是不重合的。在定常场中，两者重合。关于这一点完全可由迹线与流线在非定常场和定常场中的不重合与重合结论而推得。因为射流实际上就是一束迹线，而流管就是一束流线。

例：设已知欧拉速度 $v_1 = x_1 + t$ 、 $v_2 = -x_2 + t$ 、 $v_3 = 0$ 。求 $t = 0$ 时过 $M(-1, -1)$ 点的流线和迹线。

我们将通过此例说明如何求迹线和流线，并说明定常 ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) 运动时，过一点的流线和迹线是重合的。但非定常 ($\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$) 运动时，过一点的流线和迹线一般来说不重合。

解：由 (1-4-3) 式求流线：

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} \Rightarrow \frac{dx_1}{x_1 + t} = \frac{dx_2}{-x_2 + t}$$

其中 t 是参数，积分后得：

$$(x_1 + t)(-x_2 + t) = C$$

其中 C 是积分常数，由 $t = 0, x_1 = -1, x_2 = -1$ 代入得 $C = -1$ 。

于是 $t = 0$ 时，过 $M(-1, -1)$ 点的流线是：

$$x_1 x_2 = 1$$

这是双曲线方程，即过 M 点的流线是双曲线。

由 (1-4-1) 式求迹线：

$$dx_1 = v_1 dt \quad dx_2 = v_2 dt$$

积分后得：

$$x_1 = C_1 e^t - t - 1 \quad x_2 = C_2 e^{-t} + t - 1$$

由 $t = 0, x_1 = -1, x_2 = -1$ 代入得 $C_1 = 0, C_2 = 0$ 。

于是 $t = 0$ 时，过 $M(-1, -1)$ 点的质点运动规律是：

$$x_1 = -t - 1, \quad x_2 = t - 1$$

消去参数 t 后得:

$$x_1 + x_2 = -2$$

这是直线方程, 即过 M 点的迹线是直线。

由此可见: 在定常运动时, 过 M 点的流线和迹线一般不重合 (一个是双曲线, 一个是直线)。如果考虑定常运动, 即有: $v_1 = x_1, v_2 = -x_2, v_3 = 0$ 。则迹线应满足的方程为:

$$dx_1 = x_1 dt \quad dx_2 = -x_2 dt$$

积分得:

$$\ln x_1 = t + C_1, \quad \ln x_2 = -t + C_2$$

即:

$$x_1 = C_1 e^t \quad x_2 = C_2 e^{-t}$$

由 $t=0$ 时, $x_1 = -1, x_2 = -1$ 得 $C_1 = -1, C_2 = -1$:

$$x_1 = -e^t, \quad x_2 = -e^{-t}$$

消去参数 t 得: $x_1 x_2 = e^{t-t} = 1$ 这也是双曲线方程。

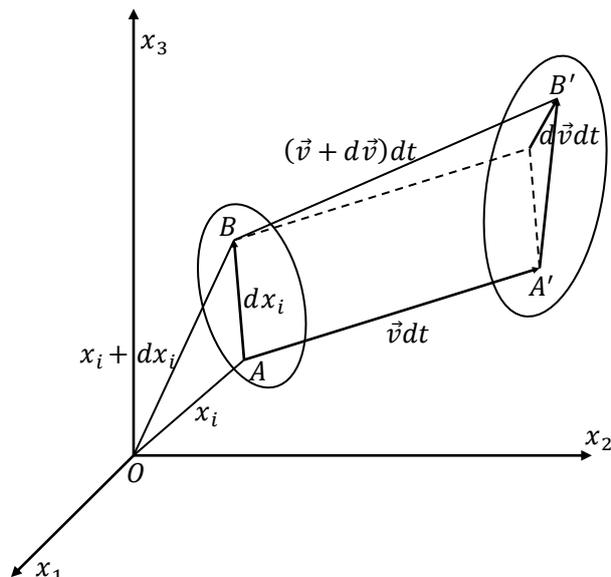
可见: 在定常运动是, 流线和迹线是重合的。

§1.5 流体微元的运动分析——应变率张量和旋转张量

这一节从运动学的角度出发, 对流体微元的运动作几何分析, 研究流体在运动学上的固有特性。这一节相当于弹力中的应变分析。在这一节中不涉及产生流体运动的原因, 即不涉及力、质量等与动力学有关的物理量。

为了分析整个流体运动, 我们先从流体中取一个无限小的任意的流体微元体系为对象作微元分析。需要注意的是, 流体微元与流体质点是两个不同的概念。在连续介质的概念中, 流体质点是可以忽略线性尺度效应 (如膨胀、变形、转动等) 的最小单元, 而流体微元则是由大量流体质点所组成的具有线性尺度效应的微小的流体单元。

流体微元在运动过程中, 由于每一时刻微元上各流体质点的速度一般是不同的 (除定常流外), 因此当流体微元经 dt 时间运动到新的位置时, 其形状和大小都要发生变化。类似于弹力中的分析, 只要弄清流体微元上任意两流体质点的速度之间的关系, 流体微元的运动也就清楚了。



设在 t 时刻，微元上任意两质点 $A(x_i)$ 和 $B(x_i + dx_i)$ ，速度分别为 \vec{v} 和 $\vec{v} + d\vec{v}$ ，经 dt 时间后，它们分别移至 $A'(x_i + v_i dt)$ 和 $B'[(x_i + dx_i) + (v_i + dv_i)dt]$ 。

若速度 \vec{v} 连续，且有 n 阶偏导数存在，那么 B 点的速度可用 A 点的速度附近的 Taylor 级数表示，忽略二阶以上的无穷小量，则有：

$$v_i(x_j + dx_j, t) = v_i(x_j, t) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j$$

Or

$$dv_i = v_i(x_j + dx_j, t) - v_i(x_j, t) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j$$

••• (1-5-1)

因 dv_i 和 dx_j 均为任意的一阶张量，则根据张量判别定理可知： $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ 是一个二阶张量。其可分解为一个二阶对称的和一个二阶反对称的张量之和，即：

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

••• (1-5-2)

其中： $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ 称为应变率张量。 $\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ 称为旋转率张量。而反对称张量 ω_{ij} 的空间对偶矢量 $\vec{\omega}$ 为

$$\omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} v_k \quad \text{or} \quad \vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v}$$

••• (1-5-3)

由(1-5-3)式可见，对偶矢量 $\vec{\omega}$ 是流场速度旋度的一半。

至此，我们已清楚地看出：流体力学中的应变率张量和旋度张量与弹性力学中的应变张量和旋转张量形式完全一样，只是用速度 \vec{v} 替换了位移 \vec{u} 。这里 ε_{ij} 的主对角线上各分量 ε_{11} 、

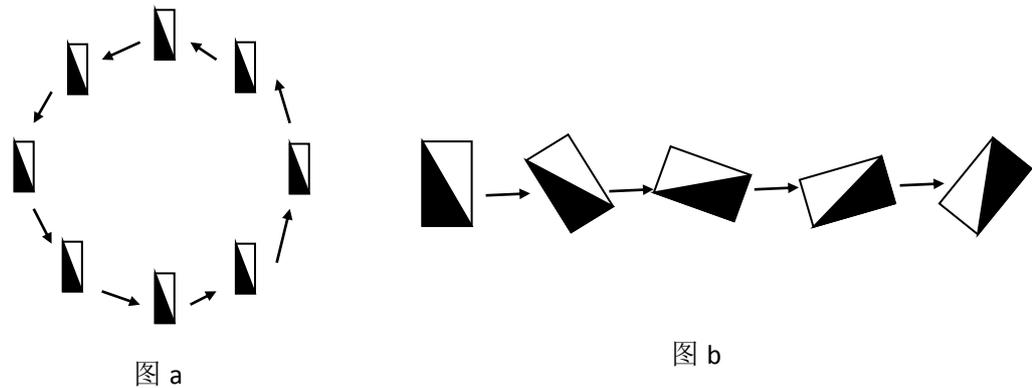
$\dot{\epsilon}_{22}$ 、 $\dot{\epsilon}_{33}$ 称为线应变率，其他分量称为剪应变率或角应变率 $\dot{\gamma}_{ij} = 2\dot{\epsilon}_{ij}$ 。相应的几何意义的阐述与弹性力学中应变张量相应分量几何意义的阐述类同。

对于应变率张量 $\dot{\epsilon}_{ij}$ ，我们也可以讨论与弹力中应变张量相类似的内容，如主应变率及其主方向、流体微元的体积膨胀率 $\dot{\epsilon}_{ii} = \dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33} = \nabla \cdot \vec{v}$ ，将应变率张量 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 分解为球、偏两个应变率张量之和等等。此处不再赘述。

§1.6 有旋流动的基本概念

<I> 涡旋场

有旋流动又叫涡旋运动，它是流体运动的一种重要类型。流动究竟是有旋还是无旋，是依据流体微元本身是否旋转来决定的，即依据 $\nabla \times \vec{v}$ 是否为零而定，而不是根据流体微元的轨迹形状来决定的。例如下图所示的流动，在图 a 中，流体微元的轨迹是一个圆，但流体微元本身并没有旋转，因此这种流动是无旋流动。在图 b 中，流体微元的轨迹虽然是一条直线，但微元本身在运动过程中旋转着，所以这种流动是有旋流动。



流体速度的旋度 $\nabla \times \vec{v}$ ，在有旋流动的场中每一点都存在，由 $\nabla \times \vec{v}$ 组成的向量场称为涡旋场，记作：

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v} \quad \dots (1-6-1)$$

这里 $\vec{\Omega}$ 称为涡（矢）量，它是描述有旋流动的一种物理量。一般说来涡矢量 $\vec{\Omega}$ 也是四维空间 (\vec{r}, t) 的函数

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(\vec{r}, t)$$

涡量场的一个重要特性是：涡量场是无源场，即有：

$$\nabla \cdot \vec{\Omega} = 0$$

证：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{\Omega} &= \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\nabla \times \nabla) - \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) \xrightarrow{\nabla \times \nabla \equiv 0} -\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) \\ &\Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v})\end{aligned}$$

根据矢量的混合积运算规则可知（混合积的轮换性）

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = \nabla \cdot (\vec{v} \times \nabla) = \vec{v} \cdot (\nabla \times \nabla) \equiv 0$$

故有：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) \equiv 0 \text{ 即 } \nabla \cdot \vec{\Omega} = 0$$

<II> 涡线、涡面、涡管、涡通量、速度环量

我们下面介绍一些涡量场的几何描述

① 涡线定义：涡线是这样一条曲线，此曲线上任一点的切线方向与该点的涡量方向共线。涡线与流线一样，也是由同一时刻，不同流体质点所组成的。不同的是流线上任一点的切向与该点的速度 \vec{v} 重合，而涡线上任一点的切向与该点的涡量 $\vec{\Omega}$ 重合。

由于 $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v} = 2\vec{\omega}$ ，所以涡线可看作流体微元的瞬时转动轴。某点涡矢量的大小是该点及其邻域的流体质点组成的流体微元绕过该点的某一旋转轴旋转的角速度的两倍。

涡线的方程由定义可知为：

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} \times d\vec{r} &= 0 \\ \text{Or} \\ \frac{dx_1}{\Omega_1(\vec{r}, t)} &= \frac{dx_2}{\Omega_2(\vec{r}, t)} = \frac{dx_3}{\Omega_3(\vec{r}, t)}\end{aligned}$$

•••• (1-6-3)

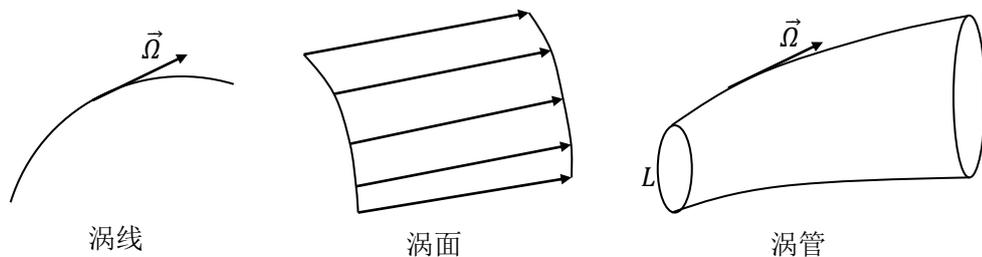
对于定常运动 $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(\vec{r})$ ，涡线将不随时间变化。另外，由涡线定义知，指定一个时刻，过流场中一点只能作一条涡线（即涡线不能相交）。这是显然的，因为指定一个时刻，流场中一点只有一个 \vec{v} ，因此也只有一个 $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v}$ 。

② 涡面：在涡量场中任取一非涡线的曲线，过此曲线上每一点作涡线，这些涡线组成的曲面，称为涡面。

③ 涡管：在涡量场中任取一条非涡线的可缩封闭曲线 L ，过此闭曲线上每一点作涡线，这些涡线组成的管状曲面称为涡管。

（注：可缩封闭曲线是指此曲线可收缩到一点而不越过流场的边界。）

若此闭曲线 L 无限小，相应的涡管称为微元涡管。若在涡管的周围，流体的涡量皆为零，则称此涡管为孤立涡管。

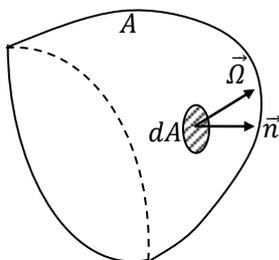


④ 涡通量：通过某一开口曲面的涡量总和称为涡通量。如图，通过开口曲面 A 的涡通量 J 为：

$$J = \iint_A \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dA = \iint_A \vec{\Omega} \cdot d\vec{A}$$

••• (1-6-4)

\vec{n} 为有向面元 $d\vec{A}$ 的外法线单位矢, $d\vec{A} = dA\vec{n}$ 。

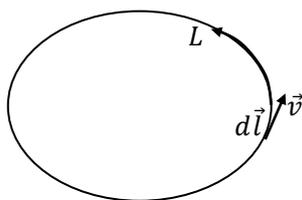


⑤速度环量：在流场中任取一封闭曲线 L ，速度沿该封闭曲线的线积分定义为曲线 L 的速度环量 Γ

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_L [v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3]$$

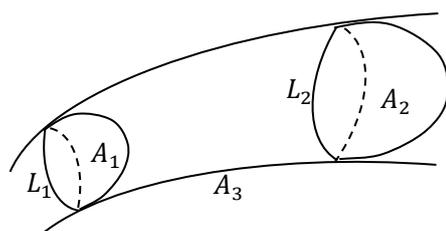
••• (1-6-5)

其中 \vec{v} 是 L 上的速度矢量, $d\vec{l}$ 是 L 上的微元弧矢量。速度环量的符号不仅与流场的速度方向有关, 且与积分时所取的曲线 L 的绕行方向有关。我们规定积分时的绕行方向逆时针为正。



<III>涡管强度守恒定理

定理：在同一时刻，同一涡管的各个以绕涡管壁面的封闭曲线为边界的曲面上的涡通量相同。



证：在某一时刻，任取一段涡管（如图），与涡管相交的任意两个曲面为 A_1 和 A_2 ，它们的边界线为绕涡管壁的封闭曲线 L_1 和 L_2 。 A_3 为此段涡管的侧面。这段涡管的表面积为 $A = A_1 + A_2 + A_3$ 。则通过这一封闭曲面 A 的涡通量应该为：

$$J = \oiint_A \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dA = - \iint_{A_1} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dA + \iint_{A_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dA + \iint_{A_3} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dA$$

上式中， \vec{n} 按规定是外法线的单位矢量，但在 A_1 上其 \vec{n} 指向内侧（即 $\vec{\Omega}$ 与 \vec{n} 夹角 $> 90^\circ$ ），因此第一项积分应加负号。又在 A_3 面上， $\vec{\Omega}$ 处处与 \vec{n} 垂直，所以第三项积分为零。于是有：

$$J = - \iint_{A_1} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dA + \iint_{A_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dA$$

根据高斯定理有：

$$J = \oiint_A \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dA = \iiint_V \nabla \cdot \vec{\Omega} dV = \iiint_V \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) dV \equiv 0$$

所以有：

$$\iint_{A_1} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dA = \iint_{A_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dA$$

由 A_1 、 A_2 的任意性，因此上式表明：在同一时刻，沿同一涡管各截面的涡通量不变，此称为涡通量守恒。

通常称涡管的涡通量为涡管强度，简称涡强。因此涡通量守恒定理又叫涡强守恒定理。对于微元涡管，可近似地认为 A_1 及 A_2 上的涡量均匀分布，分别为 Ω_{A_1} 和 Ω_{A_2} ，且 $\vec{\Omega}$ 平行于 \vec{n} 。

这时涡强守恒公式可写成：

$$\Omega_{A_1} A_1 = \Omega_{A_2} A_2$$

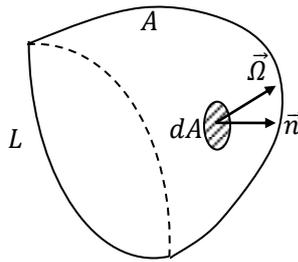
Or

$$\omega_{A_1} A_1 = \omega_{A_2} A_2$$

由涡强守恒定理可推得两个结论：

- (1) 对于同一个微元涡管来说，在截面积越小的地方，流体旋转的角速度越大。
- (2) 涡管不能在流场中中断，只能始于或终于边界（如龙卷风），或形成环形，或伸展到无穷远处。当然涡管也不能相交，因为流场中任一点在同一瞬间只有一个速度，也就只有一个涡量。

<IV> 涡通量与速度环量的关系



速度环量与涡通量之间有密切的联系，这种联系是用 stokes 定理建立起来的。若 A 是以封闭周线 L 为周界的曲面，且 L 为可缩曲线*，则有：

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} \xrightarrow{\text{stokes 定理}} \iint_A (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n} dA = \iint_A \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dA = J$$

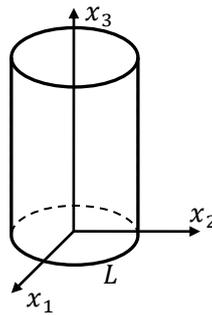
•••• (1-6-6)

*注：如果 L 不可缩，则不可能作出以 L 为边界的开口曲面而不通过边界面。在边界面（无论是物面还是自由面）上， $\vec{\Omega}$ 不连续或没有定义，自然也就没有涡通量。因而也就不可能应用 stokes 定理。

上式表明：可缩封闭曲线 L 上的速度环量等于穿过以 L 为周界的任意开口曲面的涡通量。根据 Γ 与 J 的这个关系，由涡强守恒定理可推知：在涡管上绕涡管的任意封闭曲线的速度环量相等。

例：已知柱坐标系下的速度场为 $\vec{v} = Cr\vec{e}_\theta$ ，其中 C 为任意常数，求：

- (1) 曲线 L: $x_1^2 + x_2^2 = a^2$ 的速度环量
- (2) 通过上述圆平面的涡通量



解:

(1) 因:

$$d\vec{l} = ad\theta\vec{e}_\theta \quad , \quad \vec{v}|_{L^\perp} = ca\vec{e}_\theta$$

$$\therefore \Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = ca^2 \oint_L d\theta = 2\pi ca^2$$

(2) 因:

$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2$$

在直角系下:

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 = Cr\vec{e}_\theta$$

而:

$$\sin\theta = \frac{x_2}{r} \quad \cos\theta = \frac{x_1}{r}$$

所以:

$$v_1 = -Cx_2 \quad v_2 = Cx_1 \quad v_3 = 0$$

$$\therefore \Omega_1 = 0 \quad \Omega_2 = 0 \quad \Omega_3 = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = 2C$$

亦即: $\vec{\Omega} = 2C\vec{e}_3$ 。由于 $\vec{n} = \vec{e}_3$, 因此通过圆平面的涡通量为:

$$J = \iint_A \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dA = 2C \iint_A dA = 2C\pi a^2$$

可见: $J = \Gamma$

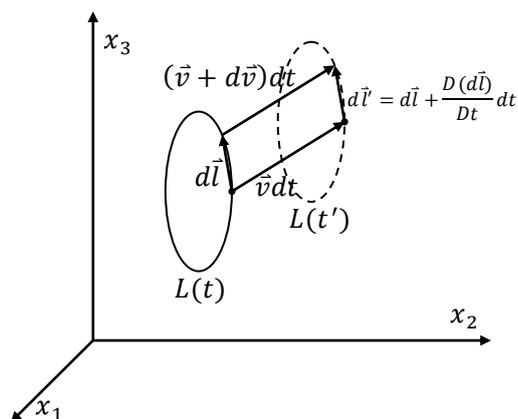
<V> 封闭流体线的速度环量对于时间的变化率——速度环量的随体导数

可以证明: 封闭流体线的速度环量对于时间的变化率等于此封闭曲线的加速度的环量, 即有:

$$\frac{D}{Dt} \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{l}$$

证明: 在 t 时刻取封闭流体线 L (这是由确定的流体质点组成的物质线) 中的微元流体线 $d\vec{l} = dx_i \vec{l}_0$ (\vec{l}_0 为单位矢量)。在 $t' = t + dt$ 时刻 $d\vec{l}$ 变成 $d\vec{l} + \frac{D(d\vec{l})}{Dt} dt$ 。这两者的关系如图所

示。



根据矢量的平行四边形法则有：

$$d\vec{l} + (\vec{v} + d\vec{v})dt - \vec{v}dt = d\vec{l} + \frac{D(d\vec{l})}{Dt}dt$$

由此有：

$$d\vec{v} = \frac{D(d\vec{l})}{Dt}$$

又因为：

$$d\vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j = \nabla \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

所以由上两式有：

$$\nabla \vec{v} \cdot d\vec{l} = \frac{D(d\vec{l})}{Dt}$$

又：

$$\frac{D}{Dt}(\vec{v} \cdot d\vec{l}) = \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{l} + \vec{v} \cdot \frac{D(d\vec{l})}{Dt} = \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{l} + \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{l} + \frac{1}{2}d(v^2)$$

注： $\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2}d(v^2) = \frac{1}{2}d(v^2)$ ；其中 $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ 表示速度随体运动中变化， $\frac{D(d\vec{l})}{Dt}$ 线元在随体运动中不断改变其形状。

对上式两边取环量得：

$$\oint_L \frac{D}{Dt}(\vec{v} \cdot d\vec{l}) \xrightarrow{\text{交换积分与微商的顺序}} \frac{D}{Dt} \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_L \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{l} + \oint_L \frac{1}{2}d(v^2)$$

注意到速度函数 $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$ 是 (\vec{r}, t) 的单值函数，所以环路积分 $\oint_L \frac{1}{2}d(v^2) = 0$ 。

于是证得：

$$\frac{D}{Dt} \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_L \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{l}$$

••• (I) (1-6-7)

这一结果是纯运动学性质，因而对任何一种流动都是正确的。

<VI> 涡通量对时间的变化率——涡通量的随体导数

$$\frac{D}{Dt} \iint_A \vec{\Omega} \cdot d\vec{A} = \iint_A \left[\frac{D\vec{\Omega}}{Dt} + (\nabla \cdot \vec{v})\vec{\Omega} - \vec{\Omega} \cdot \nabla \vec{v} \right] \cdot d\vec{A}$$

推导如下：

因：

$$\frac{D}{Dt} \iint_A \vec{\Omega} \cdot d\vec{A} = \iint_A \frac{D\vec{\Omega}}{Dt} \cdot d\vec{A} + \iint_A \vec{\Omega} \cdot \frac{D(d\vec{A})}{Dt}$$

.... ①

而：

$$dV = d\vec{l} \cdot d\vec{A}$$

则：

$$\frac{D(dV)}{Dt} = \frac{D(d\vec{l})}{Dt} \cdot d\vec{A} + d\vec{l} \cdot \frac{D(d\vec{A})}{Dt}$$

由散度定义：

$$\nabla \cdot \vec{v} = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\oiint_s \vec{v} \cdot d\vec{A}}{dV} = \frac{1}{dV} \frac{D(dV)}{Dt} \Rightarrow \frac{D(dV)}{Dt} = \nabla \cdot \vec{v} dV$$

因：（见上一小节）

$$\frac{D(d\vec{l})}{Dt} = \nabla \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

故有：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} dV &= \nabla \vec{v} \cdot d\vec{l} \cdot d\vec{A} + d\vec{l} \cdot \frac{D(d\vec{A})}{Dt} \\ \nabla \cdot \vec{v} d\vec{l} \cdot d\vec{A} &= \nabla \vec{v} \cdot d\vec{l} \cdot d\vec{A} + d\vec{l} \cdot \frac{D(d\vec{A})}{Dt} \\ \left[\nabla \cdot \vec{v} d\vec{A} - \nabla \vec{v} \cdot d\vec{A} - \frac{D(d\vec{A})}{Dt} \right] \cdot d\vec{l} &= 0 \end{aligned}$$

由 $d\vec{l}$ 的任意性得：

$$\frac{D(d\vec{A})}{Dt} = \nabla \cdot \vec{v} d\vec{A} - \nabla \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

两边点乘 $\vec{\Omega}$ 所以：

$$\vec{\Omega} \cdot \frac{D(d\vec{A})}{Dt} = [(\nabla \cdot \vec{v})\vec{\Omega} - \vec{\Omega} \cdot \nabla \vec{v}] \cdot d\vec{A}$$

将上式代入 I 式，于是证得：

$$\frac{D}{Dt} \iint_A \vec{\Omega} \cdot d\vec{A} = \iint_A \left[\frac{D\vec{\Omega}}{Dt} + (\nabla \cdot \vec{v})\vec{\Omega} - \vec{\Omega} \cdot \nabla \vec{v} \right] \cdot d\vec{A}$$

.... (II) (1-6-8)

<VII> 任意物理量 $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\vec{r}, t)$ （可是矢量也可是标量）的体积分的随体导数

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V B dV = \iiint_V \frac{\partial B}{\partial t} dV + \oiint_A B \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

证明:

$$\begin{aligned} \therefore \frac{DB}{Dt} &= \frac{\partial B}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla B \\ \therefore \frac{DB}{Dt} + B(\nabla \cdot \vec{v}) &= \frac{\partial B}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla B + B\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \cdot (B\vec{v}) \end{aligned}$$

故:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \iiint_V B dV &= \iiint_V \frac{DB}{Dt} dV + \iiint_V B \frac{D(dV)}{Dt} \xrightarrow{\text{由 } \frac{D(dV)}{Dt} = (\nabla \cdot \vec{v}) dV} \iiint_V \left[\frac{DB}{Dt} + B(\nabla \cdot \vec{v}) \right] dV \\ &= \iiint_V \left[\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \cdot (B\vec{v}) \right] dV \xrightarrow{\text{由高斯定理}} \iiint_V \frac{\partial B}{\partial t} dV + \oiint_A B \vec{v} \cdot d\vec{A} \end{aligned}$$

即证得:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V B dV = \iiint_V \frac{\partial B}{\partial t} dV + \oiint_A B \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

•••• (III) (1-6-9)

以上证明的 (I) (II) (III) 三个关系式统称为物质积分的随体导数。所涉及的线、面、体都是由流体质点组成的物质线,物质面和物质体。我们知道:运动着的流体质点具有速度、动量、能量等物理属性。而这些物理属性可以通过在物质线上定义速度环量,在物质面上定义涡通量,在物质体上定义质量 $\iiint_V \rho dV$, 动量 $\iiint_V \rho \vec{v} dV$, 动能 $\iiint_V \rho \frac{1}{2} v^2 dV$ 等等来表述,并通过研究它们随时间变化情况来揭示流体运动的规律。因此,物质积分的随体导数在建立流体力学基本方程组时将常被应用。这一点,我们在下一章研究中就会体会到。

§1.7 无旋流动的基本概念

无旋流动指的是:任意时刻,流场中处处 $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = 0$ 。自然界中真实流动的某些区域在很多情况下十分接近于无旋流动。通常,在不影响实质性研究的前提下,假定流动是无旋的,将使问题大大简化。无旋流动在流体力学中占有很重要的地位。

无旋流动存在着一系列重要性质,这些性质无论对于不可压缩流动还是可压缩流动都是存在的。

<I>速度有势

对无旋流动,有 $\nabla \times \vec{v}(\vec{r}, t) = 0$ ($\vec{r} \in$ 整个流场)

由场论知:无旋矢量场必有标量势 (不妨记为 $\varphi(\vec{r}, t)$), 且有

$$\vec{v} = \nabla \varphi$$

无旋流场又称为有势流场或简称为势流。

注意:流动是否有势,只取决于 $\nabla \times \vec{v}$ 这个量在流场中是否处处为零,而不论流动是否

可压缩，是否是定常流动。

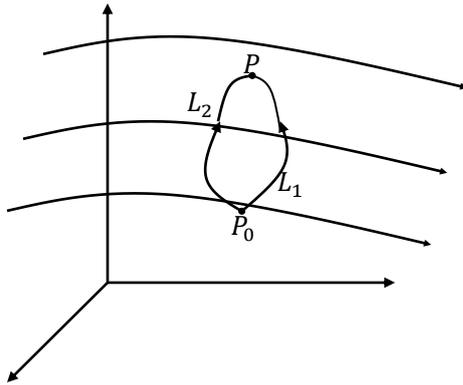
<II>速度势与环量

在势流场中，无限接近的毗邻两点速度势之差为

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i = \nabla \varphi \cdot d\vec{l} = \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

则场中任意两点 P_0 与 P 之间的速度势之差，可由对上式积分而得。即：

$$\varphi_P - \varphi_{P_0} = \int_{L_1(P_0 L_1 P)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{L_2(P_0 L_2 P)} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$



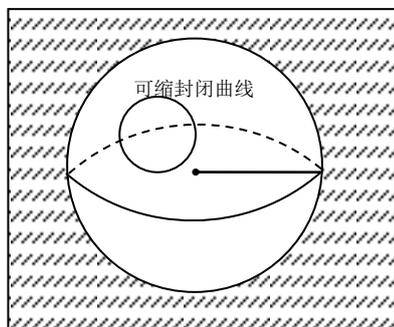
若沿 $P_0 L_1 P L_2 P_0$ 作积分，则可得到同一点（ P_0 ）上势函数的差值，即

$$\varphi'_{P_0} - \varphi_{P_0} = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

上式右侧正是闭合迴线 $L(P_0 L_1 P L_2 P_0)$ 上的速度环量。若此环量为零，则 φ 是单值函数，否则 φ 为多值函数。

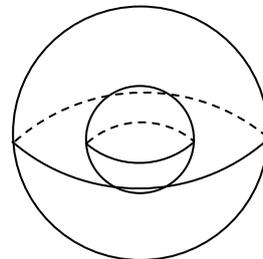
速度势的单、多值性质与所讨论的区域的连通性质有关。下面将看到：若所研究区域是单连通域，则速度势是单值函数。若所研究区域是多连通域，则 φ 是多值函数。

我们知道：如果在空间某个区域中，任意两点能以连续曲线连接起来，而在任何地方都不越过这个区域的边界，这样的空间区域称为连通域。如在连通域中，任意封闭曲线能连续地收缩成一点而不越过连通域的边界，则这种连通域称为单连通域。例如球内外区域，两同心球之间的区域等都是单连通域。



球内、外区域（ $r < R$ or $r > R$ ）

图（一）

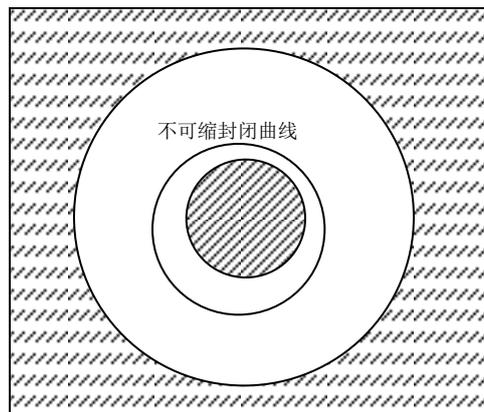


两同心球之间的区域是单连通域

图（二）

若在连通域中，存在不可缩闭曲线，则这样的连通域称为多连通域。例如下图（三）的

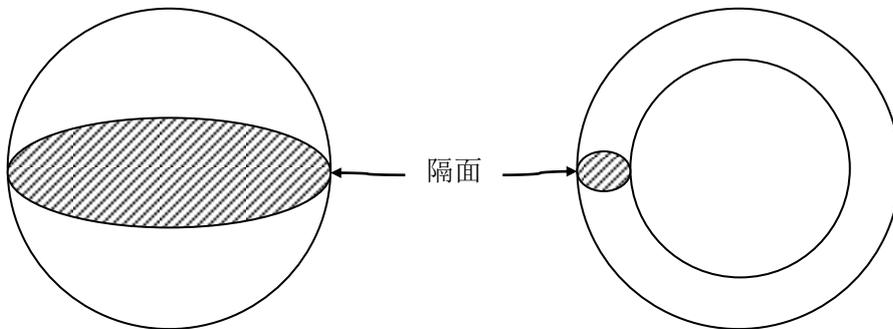
圆环内部区域就是一个多连通域。因为若绕环的内边界作闭合曲线，则其不可缩（见下图（三））。



圆环内部区域是双连通域

图（三）

为了定义多连通域，我们引入分隔面（又称隔面）的概念：以连通域边界上的封闭曲线为边，并完全处于区域内又不影响连通的面，称为隔面。显然在单连通域中不可能作任何一个隔面而不破坏空间区域的单连通性质。但在多连通域中，加以适当数目的隔面，就可使其变成单连通域。我们把加一个不影响连通的隔面后成为单连通域的多连通域称为双连通域。加 n 个不影响连通的隔面后称为单连通域的多连通域称为 $(n+1)$ 连通域。例如，圆环内部区域就是双连通域，因为可以作一个隔面（见下图（五））而不破坏其连通性。如将隔面的两边视为区域的新边界，则这一新的区域就是一个单连通域



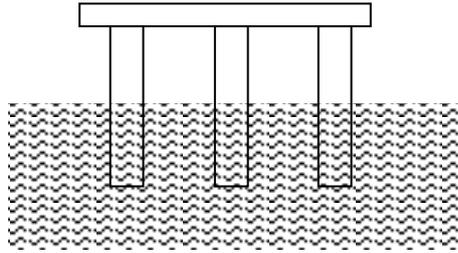
在单连通域(球内区域)加隔面，
就破坏了原有的单连通性

图（四）

在双连通域(圆环内部区域)加
一个隔面，使其变成了单连通域。

图（五）

双连通域在流体力学中经常遇到，因此具有重要意义，例如圆柱形桥墩外的流动区域。



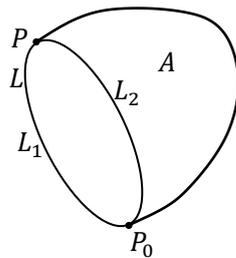
下面来讨论速度势在单连通和双连通域中的性质。

<III>速度势在单连通和双连通域中的性质

①单通域中的速度势

在单通域中，由于任意封闭曲线都是可缩的，所以由 Stokes 定理可得：

$$\varphi'_{P_0} - \varphi_{P_0} = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_A (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{A} = 0$$



因此有： $\varphi'_{P_0} = \varphi_{P_0}$

所以在单通域中，速度势是单值函数。并且沿任意封闭曲线的速度环量为零。

又因为：

$$\oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_{L_1(P_0L_1P)} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \oint_{-L_2(P_0L_2P)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_{L_1(P_0L_1P)} \vec{v} \cdot d\vec{l} - \oint_{L_2(P_0L_2P)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0$$

所以：

$$\oint_{L_1(P_0L_1P)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_{L_2(P_0L_2P)} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

亦即：

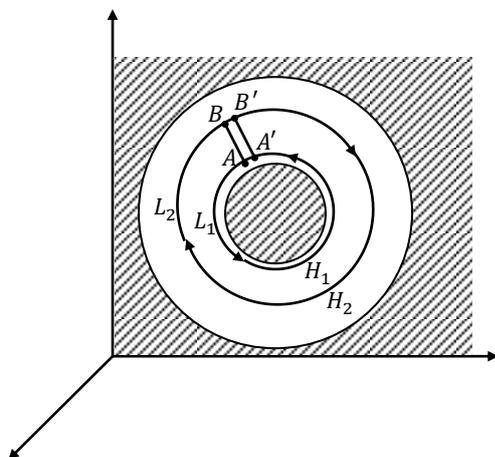
$$\varphi_P - \varphi_{P_0} = \int_{P_0}^P \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

这表明，在单通域的无旋流动中任意两点的速度势之差等于沿两点之间任意曲线的线积分。亦即有势流场中任意两点间的速度势差只与两点的位置有关，而与积分路径无关。

② 双通域中的速度势

在两个无限长柱面间的区域是典型的双通域。如下图所示，包围这个双通域边界 L_0 的封闭曲线 L_1 是一个不可缩封闭曲线。按定义， L_1 的速度环量为：

$$\Gamma_0 = \oint_{L_1(AH_1A)} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$



因 L_1 不是可缩曲线，亦即在 L_1 所围的区域中，被积函数（包括它的导数）有不连续或无定义的区域（如：内边界所包围的柱体截面内），所以对 L_1 不能直接应用斯托克斯定理。

为此我们作一个隔缝（图中 $A \rightarrow B$, $A' \rightarrow B'$ ），将 L_1 与 L_2 连接构成新的封闭曲线 $L = AH_1A'B'H_2BA$ ，显然这是一条可缩封闭曲线，故有：

$$\oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S} = 0$$

式中 S 是以 L 为周界所张的开口曲面。

另外：

$$\oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_{L_1(AH_1A')} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_{A'}^{B'} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \oint_{-L_2(B'H_2B)} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_B^A \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

因 AB 与 $A'B'$ 是两条无限接近的直线，所以有：

$$\int_{A'}^{B'} \vec{v} \cdot d\vec{l} \cong \int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{l} = - \int_B^A \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

于是有：

$$\oint_{L_1(AH_1A')} \vec{v} \cdot d\vec{l} = - \oint_{-L_2(B'H_2B)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_{L_2(BH_2B')} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \Gamma_0 = const$$

注*：因 L_1, L_2 任意，故 $\oint_{L_1} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_{L_2} \vec{v} \cdot d\vec{l}$ 只能等于一个常数 Γ_0

这里 $-L_2$ 是 L_2 的逆向廻线。而： $\Gamma_0 = \oint_{L_0} \vec{v} \cdot d\vec{l}$ 是绕内边界 L_0 的速度环量。由于 L_1, L_2 是

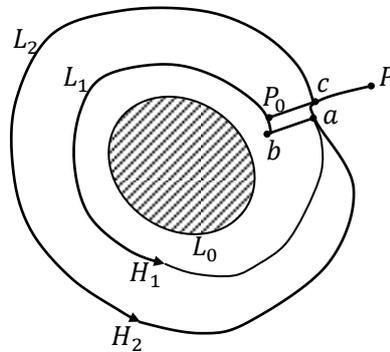
任意的，所以包围内边界的任何封闭曲线上的速度环量为常数 Γ_0 。

由此可见：在双通域中，每绕包围内边界 L_0 的任意封闭曲线一次，环量将增加 Γ_0 ，若绕 n 次，则环量增加 $n\Gamma_0$ 。由式：

$$\varphi'_{p_0} - \varphi_{p_0} = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

可知，同一点上的速度势的差值等于所封闭曲线上的速度环量。因此，在双通域中，虽然流场是无旋的，但同一点的速度势则可能是多值的，每绕包围内边界的任意封闭曲线一次，速度势增加 Γ_0 ，绕 n 次，则速度势增加 $n\Gamma_0$ 。由上讨论可见： $\varphi'_A - \varphi_A = \oint_{L(AH_1A'BH_2B'A)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = 2\Gamma_0$

作为习题：求如下图所示中 P_0 点与 P 点与速度势之差。取沿曲线 $L = P_0H_1abP_0cH_2acP$ 积分。



解：对 $\varphi_p - \varphi_{p_0} = \int_{p_0}^p \vec{v} \cdot d\vec{l}$ 取沿曲线 L 积分，则有：

$$\begin{aligned} \varphi_p - \varphi_{p_0} &= \int_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_{p_0H_1abp_0} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_{p_0}^c \vec{v} \cdot d\vec{l} + \oint_{cH_2ac} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_c^p \vec{v} \cdot d\vec{l} \\ &= \Gamma_0 + \Gamma_0 + \int_{p_0}^p \vec{v} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

注*： b 和 p_0 两点无限靠近，近似可视为同一点，从而构成封闭曲线

上面是绕内边界 L_0 两圈的结果。若绕内边界 n 圈，则可得：

$$\varphi_p - \varphi_{p_0} = n\Gamma_0 + \int_{p_0}^p \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

由此可见：在双通域的无旋流动中任意两点的速度势之差等于沿该两点之间任意曲线积分加环量常数 Γ_0 的 n 倍。

结论：在双通域的无旋流场中，某点的速度势虽可能是多值的，但它们之间所差的只是速度环量 Γ_0 的 n 倍。对多通域问题，与双通域类似，也可证明，速度势是多值的，而且它们之间所差的值也是常数。

<IV>加速度有势

在欧拉描述下，流场中某流体质点的加速度为：

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$$

由矢量恒等式：

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$

若是有势流，则有 $\nabla \times \vec{v} = 0$ ， $\vec{v} = \nabla\phi$ ，于是有：

$$\vec{a} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi + \frac{1}{2}\nabla v^2 = \nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2\right)$$

可见：在无旋流场中质点加速度 \vec{a} 存在加速度势，记为 U_a ：

$$U_a = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2$$

§1.8 作用在流体上的力

与弹性力学中相同，作用在流体上的力也分为两类，即：表面力（短程力）和体积力（长程力）。

关于弹性力学中应力分析一章的理论完全适合于流体。此处不再赘述。

但是，流体与固体的性质不同，因此，在承受外力的响应上也有独特之处。这主要表现在对理想流体和静止流体上。

<I>理想流体的应力张量

理想流体忽略粘性，即忽略剪切应力。这样在理想流体内部任一有向面元上流体应力矢量 \vec{P} 只有平行面元法向 \vec{n} 的分量，而没有垂直于 \vec{n} 的分量（即剪切分量）。所以在理想流体内部，任一点的应力张量为：

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 & 0 \\ 0 & P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} \end{pmatrix}$$

另外，理想流体既然不能承受剪切应力，就表明流体中任一点沿任何方向都是应力主轴方向，这只能是一种球对称张量形式，即有：

$$P_{11} = P_{22} = P_{33} = -P$$

结论：在理想流体内，任一点的各个不同方向上法向应力相等，这法向应力只能为压力（因为流体不能承受拉力），记为 $-P$ 。取负号的原因是强调压力与作用面法向相反。由此可见，在理想流体中，只要用一个标量函数（即压力函数）：

$$P = P(\vec{r}, t)$$

便可完全刻画任一点的流体受力状态。此时应力张量为：

$$P_{ij} = -P\delta_{ij}$$

<II>静止流体的应力张量

静止流体（并不限制是无粘性流体），也不能承受剪切应力，因此流体静止时，其内部任一点沿任何方向均为应力张量的主方向。因此，静止流体的应力张量也可写为：

$$P_{ij} = -P\delta_{ij}$$

只是此处的 $P = P(\vec{r})$ 是静力学压力函数，称为静水压，它描述流体在静止时每一点上的受力状态。

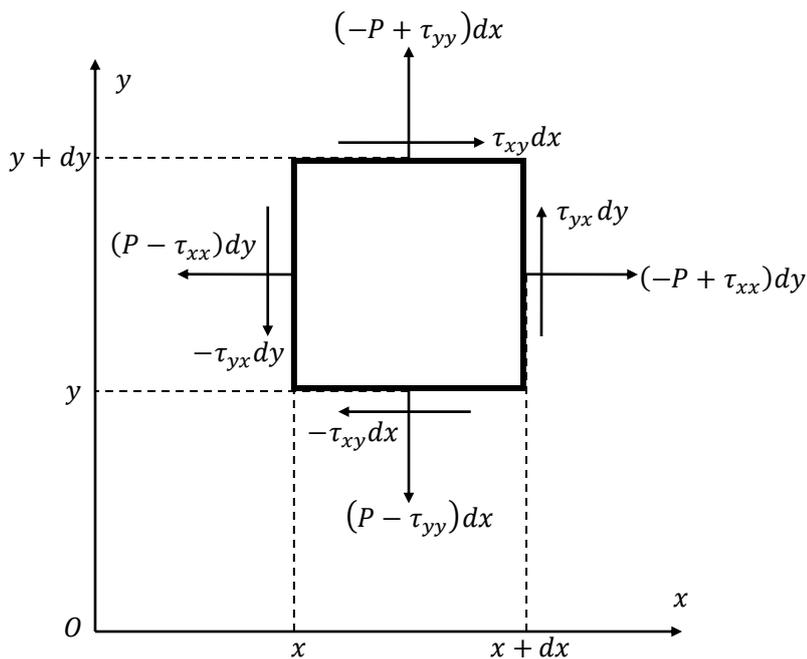
<III>一般流体的应力张量

流动的粘性流体的流体应力张量为：

$$\sigma_{ij} = P_{ij} + \tau_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

P_{ij} 是各项同性的法向应力（压应力）， τ_{ij} 称为粘性剪切应力张量。静止流体只有 P_{ij} 项；流动的粘性流体才有 τ_{ij} 项，它是由流体的速度梯度与粘性产生的。与 $-P\delta_{ij}$ 不同，正应力 τ_{ii} 可以是压力也可以是拉力。

对粘性剪切应力张量 τ_{ij} 的详细介绍请参阅§ 2.5 本构方程。



一般流体在 x-y 平面上的微元受力示意图

第二章 流体力学基本方程组

流体力学的理论工作与其它连续介质力学的分支学科一样（如与弹性力学等）主要有两个方面的工作：一是应用支配流体运动的基本规律，建立描述各类流动问题的运动方程式；二是在某些特定的条件下，求解运动方程。

下面我们着手第一方面的工作，来建立流体力学方程的普遍形式，我们将看到它们是一组偏微分方程。

§ 2.1 连续性方程

首先，我们根据质量守恒原理建立流体的连续性方程。

流体中任意一个有限物体体系的质量 m 为

$$m = \iiint_V \rho dV \quad \dots (2-1-1)$$

这里 V 是 t 时刻体系所占的空间域。

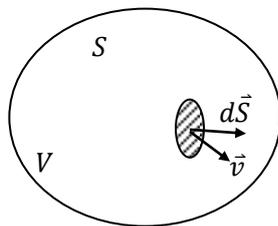
质量守恒的数学表示为： $\frac{Dm}{Dt} = 0$

所以有：

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oiint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \dots (2-1-2)$$

$$\Rightarrow - \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \oiint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad \dots (2-1-3)$$

这就是积分形式的连续性方程。



上式的物理意义是很清楚的：左边是单位时间内体积 V 内总质量的减少（负号表示），右边是单位时间内通过 S 面流体质量的“净”流出（or “净”损失）。

由高斯公式： $\iiint_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV = \oiint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$ 代入 (2-1-2) 式得：

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV = 0$$

•••• (2-1-4)

由 \mathbf{v} 的任意性, 则有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{or} \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

•••• (2-1-5)

注*: $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}$, 而 $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \rho \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \rho$, 故有 $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$ 。

注**: 由上左式得 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \rho = 0 \Rightarrow$ 在定常 ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$)、不可压缩 ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$) 情况下, 必有 $\nabla \rho = 0$ 密度均匀分布。

上式即为微分形式的连续方程。

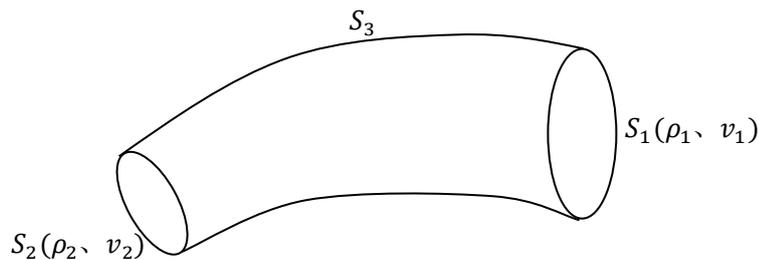
积分和微分两种形式分别用于流场中密度和速度函数不具有处处连续可微的区域和密度、速度函数处处连续可微的区域。

两种特例下的连续性方程:

i) 对定常流动 (即 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$), 方程 (2-1-5) 化为

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

•••• (2-1-6)



由 (2-1-3) 式可清楚看出: 定常流时, 单位时间内流进 \mathbf{v} 和流出 \mathbf{v} 的质量相等。若取一微元流管 ($S_1 S_2$ 上的 ρ 、 v 分布近似均匀, 且 $\vec{v} // \vec{n}$), 则流管壁面 S_3 上的流体通量为零。于是由 (2-1-3) 式有 $\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = \text{常数}$ (这个“常数”是对同一流管而言), 此称为一维定常流的连续性方程。

若对不可压缩流体, 则整个流场中 $\rho = \text{const}$, 故有 $v_1 S_1 = v_2 S_2 = \text{const}$, 截面积越小流速越大。

ii) 不可压缩流动 (即 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$), 方程化为:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho = 0$$

•••• (2-1-7)

上式说明: 不可压缩流动时, 流体微元的密度在随体运动中保持恒定, 所以流体微元的体积在随体运动中恒定, 这当然就是不可压缩。(但并不是 ρ 处处为常数, 流体质点的密度函数在不同点可以不同。只有当流场中密度均匀 ($\nabla \rho = 0$) 时, 才有 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho = \text{const}$, 在整个流场中 ρ 处处为常数。)

特别: 不可压缩流体的速度场是无散 (无源) 场 (由 (2-1-5) 式可见)。

§ 2.2 运动方程（动量方程）

现根据动量定理来建立一般粘性流体的运动方程。

在流场中任取一体积为 V 的流体元， V 的边界面为 S 。根据动量定理：体积 V 中流体动量的变化率等于作用在该体积上的质量力和面力之和。以 \vec{F} 表示作用在单位质量上的质量力分布函数（在重力场中即为重力）。以 $\vec{\sigma}_n$ 表示作用在单位面积上的面力分布函数，则作用在 V 上的总的质量力和面力为：

$$\text{体力: } \iiint_V \rho \vec{F} dV$$

$$\text{面力: } \oiint_S \vec{\sigma}_n dS$$

••• (2-2-1)

而体积 V 内的总动量为 $\iiint_V \rho \vec{v} dV$ ，所以动量定理表为：

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho \vec{v} dV = \iiint_V \rho \vec{F} dV + \oiint_S \vec{\sigma}_n dS$$

••• (2-2-2)

利用任意物理量体积分的随体导数公式（§ 1.6.7），上式左边化为：

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV + \oiint_S \rho \vec{v} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho \vec{F} dV + \oiint_S \vec{\sigma}_n dS$$

••• (2-2-3)

再利用柯西公式和高斯定理，上式进一步化为：

$$\iiint_V \left[\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) \right] dV = \iiint_V \left[\rho \vec{F} + \nabla \cdot \vec{\sigma} \right] dV$$

••• (2-2-4)

Where: $\vec{\sigma}$ 为流体应力张量 ($\vec{\sigma}_n = \vec{n} \cdot \vec{\sigma}$, 柯西公式)

注意到: $\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial t}$

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = \vec{v} (\nabla \cdot \rho \vec{v}) + (\rho \vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$

则:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) &= \left[\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\rho \vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] + \left[\vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} (\nabla \cdot \rho \vec{v}) \right] \\ &= \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] + \vec{v} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \vec{v}) \right] \end{aligned}$$

根据随体导数公式: $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$, 以及连续性方程: $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0$

有:

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}\vec{v}) = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

最后: 动量方程 (2-2-4) 化为

$$\iiint_V \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV = \iiint_V [\rho\vec{F} + \nabla \cdot \vec{\sigma}] dV$$

.... (2-2-5)

这就是积分形式的动量方程。由 V 的任意性得:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{F} + \nabla \cdot \vec{\sigma} \quad \text{or} \quad \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \vec{F} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{\sigma}$$

.... (2-2-6)

这就是微分形式的动量方程, 称为欧拉方程, 是流体力学的基本方程之一。

当流体处于重力场中, 则 $\vec{F} = \vec{g}$; 若是重力场中的理想流体, 则由 $\sigma_{ij} = P_{ij} = -P\delta_{ij}$ or $\vec{\sigma} = -P\vec{I}$, 相应的运动方程 (动量方程) 化为:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla P$$

.... (2-2-7)

注意到: $\nabla \cdot \vec{I} = \nabla$

§ 2.3 动量矩方程

完全类似于我们在弹力中的推导一样, 由动量矩方程出发, 给出了应力张量是对称张量的结果, 即

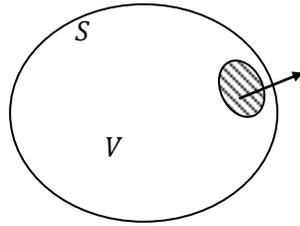
$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

.... (2-3-1)

显然偏应力张量 τ_{ij} 也是对称张量。

§ 2.4 能量方程

任取一 S 包围的 V , \vec{n} 为 dS 面元的外法向。则由能量守恒定律知: 体积 V 内流体的动能和内能的改变率等于单位时间内质量力和面力所做的功加上单位时间内外界通过 S 面传入 V 内的热量。



设：U 为单位质量流体的内能，单位质量流体的动能为 $\frac{1}{2}v^2$ ，则 V 内的动能和内能之和为

$$\iiint_V \rho \left(U + \frac{1}{2} v^2 \right) dV \quad \dots (2-4-1)$$

外力功为：

$$\text{体力功: } \iiint_V \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dV \quad \text{面力功: } \iint_S \vec{\sigma}_n \cdot \vec{v} dS \quad \dots (2-4-2)$$

热量的增加（包括传导热和辐射两种形式产生的热量的增加）有：

①传导热：按傅里叶公式，单位时间内由于热传导通过 dS 面传给 V 内的热量是 $\vec{f} \cdot d\vec{S}$ ，其中 \vec{f} 是热流矢量，它是温度梯度 ∇T 的线性函数，即： $\vec{f} = \vec{k} \cdot \nabla T$ or $f_i = k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}$ ，其中 k_{ij} 是热传导系数张量，T 是温度。由张量判别定理知 k_{ij} 是一个二阶张量。对各向同性流体（如空气、水等）， k_{ij} 是各向同性张量。即： $k_{ij} = k \delta_{ij}$ ，这里 k 是主值，称为热传导系数。因此： $\vec{f} = k \nabla T$ ，即单位时间内由于热传导通过 S 面传入 V 内的总热量为

$$\iint_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iint_S k \nabla T \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot (k \nabla T) dV \quad \dots (2-4-3)$$

②设 q 为由于辐射等其它原因在单位时间内传入单位质量的热量分布函数。定义为：

$$q = \frac{dQ}{dm} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta m}$$

所以：单位时间内由辐射等其它原因传入 V 内的总热量为：

$$Q = \iiint_V \rho q dV \quad \dots (2-4-4)$$

根据能量守恒原理，(2-4-1)式的随体导数等于体力功+面力功(2-4-2)+传导热(2-4-3)

+辐射热 (2-4-4), 即积分形式的能量方程:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(U + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] dV + \oiint_S \rho \left(U + \frac{1}{2} v^2 \right) \vec{v} \cdot d\vec{S} \\ & = \iiint_V \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dV + \oiint_S \vec{\sigma}_n \cdot \vec{v} dS + \oiint_S k \nabla T \cdot d\vec{S} + \iiint_V \rho q dV \end{aligned}$$

•••• (2-4-5)

注*: 总能量的改变率 $\frac{D}{Dt} \int_V \rho \left(U + \frac{1}{2} v^2 \right) dV$, 用体积分的随体导数公式即得上式左边。

用高斯定理将上式中所有面积分化为体积分, 即有

$$\oiint_S \rho \left(U + \frac{1}{2} v^2 \right) \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \left[\rho \left(U + \frac{1}{2} v^2 \right) \vec{v} \right] dV$$

•••• (a)

$$\oiint_S \vec{\sigma}_n \cdot \vec{v} dS \xrightarrow{\text{由柯西公式 } \vec{\sigma}_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}} \oiint_S \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \cdot \vec{v} dS = \oiint_S (\vec{\sigma} \cdot \vec{v}) \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{v}) dV$$

•••• (b)

$$\oiint_S k \nabla T \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot (k \nabla T) dV$$

•••• (c)

又(a)式右边:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\rho \left(U + \frac{1}{2} v^2 \right) \vec{v} \right] & = \rho \left(U + \frac{1}{2} v^2 \right) \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \left[\rho \left(U + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] \\ & \xrightarrow{\text{注**}} - \left(U + \frac{1}{2} v^2 \right) \frac{D\rho}{Dt} + \vec{v} \cdot \nabla \left[\rho \left(U + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] \end{aligned}$$

注**: 连续性方程: $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \rho \nabla \cdot \vec{v} = -\frac{D\rho}{Dt}$

注意到: $\frac{D}{Dt} \left[\rho \left(U + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(U + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] + \vec{v} \cdot \nabla \left[\rho \left(U + \frac{1}{2} v^2 \right) \right]$

则积分形式的能量方程左边为:

$$\iiint_V \frac{D}{Dt} \left[\rho \left(U + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] dV - \iiint_V \left(U + \frac{1}{2} v^2 \right) \frac{D\rho}{Dt} dV = \iiint_V \rho \frac{D}{Dt} \left(U + \frac{1}{2} v^2 \right) dV$$

由 \mathbf{v} 的任意性得:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(U + \frac{1}{2} v^2 \right) = \rho \vec{F} \cdot \vec{v} + \nabla \cdot \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{v} \right) + \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho q$$

内能
动能
体力功
面力功
传导热
辐射等其他原因热

•••• (2-4-6I)

$$\text{or: } \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + \rho \frac{DU}{Dt} = \rho \vec{F} \cdot \vec{v} + \nabla \cdot \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{v} \right) + \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho q$$

•••• (2-4-6II)

这就是微分形式的能量方程。

进一步化简能量方程:

首先注意到:

$$\nabla \cdot \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{v} \right) = \vec{\sigma} : (\nabla \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{\sigma})$$

•••• (1)

由动量方程: $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{F} + \nabla \cdot \vec{\sigma}$, 两边点乘 \vec{v} 得:

$$\rho \vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{F} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{\sigma})$$

而:

$$\rho \vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \rho \vec{F} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{\sigma})$$

•••• (2)

将 (1)、(2) 代入微分形式的能量方程 (2-4-6II) 得

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \vec{\sigma} : (\nabla \vec{v}) + \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho q$$

注意到:

$$\nabla \vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$$

又:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} : \vec{\omega} &= \sigma_{ij} \omega_{ij} = \sigma_{ij} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] \xrightarrow{\text{对第一项交换哑标}} \frac{1}{2} \left[\sigma_{ji} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] \xrightarrow{\sigma_{ji} = \sigma_{ij}} 0 \end{aligned}$$

所以: 能量方程的另一种形式为

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \vec{\sigma} : \vec{\varepsilon} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho q$$

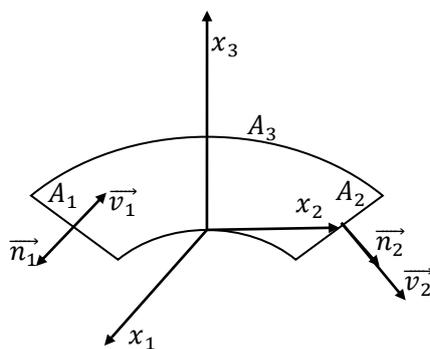
•••• (2-4-6III)

上式的物理意义为: 单位体积内由于流体变形面力所做的功加上热传导及辐射等其他原

因传入的热量恰好等于单位体积内的内能在单位时间内的增加。

积分形式的动量方程具有直接的应用价值，在有些情况下，应用该方程能很方便地求得流体和边界作用的总体效果，而不必了解有关流体运动的细节情况（见下例）。

例：不可压缩流体对弯管管壁的作用力。（不可压缩 $(\frac{D\rho}{Dt} = 0)$ 、定常流 $(\frac{\partial}{\partial t} = 0)$ ，因 $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho$ ，则有 $\rho = const.$ 。）



$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

设不可压缩流体流过如图的弯管，流动是定常的 $(\frac{\partial}{\partial t} = 0)$ ，体力仅有重力。若已知进口面积为 A_1 ，出口面积为 A_2 ，且 A_1 、 A_2 上的流速、压力都均匀分布，分别为 \mathbf{v}_1 、 P_1 和 \mathbf{v}_2 、 P_2 ，采用固定于弯管上的绝对坐标系，则以 A_1 、 A_2 、 A_3 所围的管体积是相对于欧拉空间固定的。

若以 \vec{f} 表示流体作用于弯管壁的合力，则由牛顿第三定律有

$$\vec{f} = - \iint_{A_3} \vec{\sigma}_n dA = - \oiint_A \vec{\sigma}_n dA + \iint_{A_1} \vec{\sigma}_n dA + \iint_{A_2} \vec{\sigma}_n dA \quad \dots (a)$$

利用定常流动的动量方程（见 2-2-3）（考虑定常流，则 $\frac{\partial}{\partial t}$ 项没有了）

$$- \oiint_A \vec{\sigma}_n dA = \iiint_V \rho \vec{F} dV - \oiint_A \rho \vec{v} \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad \dots (b)$$

注： $d\vec{A} = dA \vec{n}$

将(b)代入(a)得

$$\vec{f} = \iiint_V \rho \vec{F} dV - \oiint_A \rho (\vec{n} \cdot \vec{v}) \vec{v} dA + \iint_{A_1} \vec{\sigma}_n dA + \iint_{A_2} \vec{\sigma}_n dA \quad \dots (c)$$

因体力只有重力，故 $\vec{F} = \vec{g}$ （重力加速度）

即：

$$\iiint_V \rho \vec{F} dV = \iiint_V \rho \vec{g} dV = \rho V \vec{g} = m \vec{g}$$

•••• (d)

注：V 是 A 所围体积，m 是 V 所含质量。

又：在 A_1 、 A_2 上 v_1 、 v_2 均匀分布，在 A_3 上， $\vec{n} \perp \vec{v}$ ，所以：

$$\oiint_A \rho(\vec{n} \cdot \vec{v}) \vec{v} dA = \iint_{A_1} \rho(\vec{n} \cdot \vec{v}) \vec{v} dA + \iint_{A_2} \rho(\vec{n} \cdot \vec{v}) \vec{v} dA = \rho A_1 v_1^2 \vec{n}_1 + \rho A_2 v_2^2 \vec{n}_2$$

•••• (e)

又在进出口断面上 \vec{v}_1 、 \vec{v}_2 均与断面法向平行，且分布均匀，没有速度梯度，故断面处剪切应力为零，只存在压力 P，所以

$$\iint_{A_1} \vec{\sigma}_n dA + \iint_{A_2} \vec{\sigma}_n dA = -P_1 A_1 \vec{n}_1 - P_2 A_2 \vec{n}_2$$

•••• (f)

把(d) (e) (f)代入(c)式得

$$\vec{f} = \rho V \vec{g} - (P_1 + \rho v_1^2) A_1 \vec{n}_1 - (P_2 + \rho v_2^2) A_2 \vec{n}_2$$

我们进一步简化问题：根据一维定常流的连续性方程，考虑到均质 ($\nabla \rho = 0$) 不可压缩 ($\frac{D\rho}{Dt} = 0$)，则有 $\rho = \text{常数}$ 。

所以有： $\rho v_2 A_2 = \rho v_1 A_1 = \text{const}$

若进出口截面相同，即 $A_1 = A_2 = A_0$ ，则由上式有： $v_1 = v_2 = v_0$ 。

若进一步假定流体是理想的 ($\sigma_{ij} = -P\delta_{ij}$)，并作绝热流动 ($\frac{\partial T}{\partial x_i}$ 和 q 均为零)，且忽略体力 ($\vec{g} = 0$)。

由不可压缩、理想流体的无体力、绝热、定常流动的能量方程：

$$\oiint_A (\vec{n} \cdot \vec{v}) \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{P}{\rho} + U \right) \rho dA = 0$$

得：

$$-\iint_{A_1} v \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{P_1}{\rho} + U \right) dA + \iint_{A_2} v \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{P_2}{\rho} + U \right) dA = 0$$

注：(A_3 面上 $\vec{n} \perp \vec{v}$)

因： $A_1 = A_2$ ，且其上的压力 P 和流速 v 均匀分布，所以由上式可得：

$$P_1 = P_2 = P_0$$

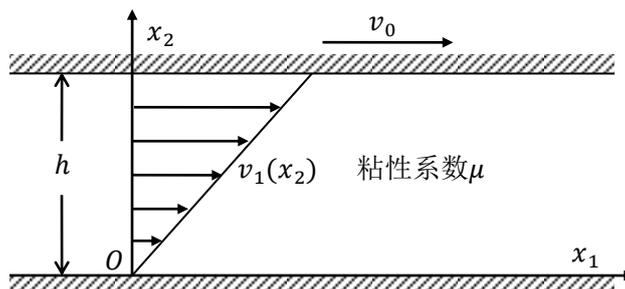
最终得:

$$\vec{f} = -A_0(P_0 + \rho v_0^2)(\vec{n}_1 + \vec{n}_2)$$

§ 2.5 本构方程

前面我们已经建立了表示质量、动量、能量守恒三个基本物理定律的数学方程式，这才只有五个方程。而方程组中出现的未知数是 $v_i, \rho, U, \sigma_{ij}, T$ 等共有 12 个，所以方程组是不完备的，要完备流体力学方程组，必须补充物性方程和状态方程。

我们知道，真实流体都具有粘性。我们在第一章中介绍流体的宏观性质时曾经说明：当相邻两层流体作相对滑动（即剪切变形）时，在相反方向产生一切向应力，阻止变形的发生。



上板以 $v_0 \vec{e}_1$ 运动，下板固定不动。（牛顿 1687 年粘性流体剪切流动实验）

牛顿的实验：粘性流体在作最简单的剪切流动时（如图），两板间的速度分布满足线性规律（牛顿实验的观测结果）：

$$v_1(x_2) = \frac{v_0}{h} x_2 \quad \dots (2-5-1a)$$

上式也可以写成：

$$\frac{dv_1}{dx_2} = \frac{v_0}{h} \quad \dots (2-5-1b)$$

实验结果还表明，阻止流体做剪切变形的切向应力 τ （内摩擦力）与上板运动的速度 v_0 成正比，与板间距离 h 成反比，即有：

$$\tau = \mu \cdot \frac{v_0}{h} = \mu \frac{dv_1}{dx_2} \quad \dots (2-5-2)$$

上式称为牛顿粘性规律。式中速度梯度 $\frac{dv_1}{dx_2}$ 反映了剪切变形的快慢，故又称为剪切变形速度， μ 是流体的物性常数，是流体抗拒变形的内摩擦的量度，称为动力学粘性系数，简称粘性系数。牛顿粘性规律揭示了切向应力 τ 与剪切形变速度 $\frac{dv_1}{dx_2}$ 的正比关系。

粘性系数的量纲为 $\frac{M}{LT} [M, (质量), L(长度), T(时间秒)]$, 在 CGS 制中和 MKS 制中, μ 的单位分别为

$$\text{CGS} \text{---} \left[\frac{\text{克}}{\text{厘米} \cdot \text{秒}} \right] \qquad \text{MKS} \text{---} \left[\frac{\text{公斤}}{\text{米} \cdot \text{秒}} \right]$$

粘性系数 μ 的数值取决于流体的性质, 不同性质的流体, μ 的数值不同, 对于粘性较小的流体, μ 的数值很小。例如, 水在一个大气压, 温度为 20°C 的条件下, 它的粘性系数为:

$$\mu = 0.01 \text{ 克/厘米} \cdot \text{秒}$$

而空气则是:

$$\mu = 1.9 \times 10^{-4} \text{ 克/厘米} \cdot \text{秒}$$

而甘油在 $T = 3^\circ\text{C}$ 时

$$\mu = 42.20 \text{ 克/厘米} \cdot \text{秒}$$

可见甘油的粘性相对于水大很多, 其 $\mu_{\text{甘油}}$ 比 $\mu_{\text{水}}$ 大好几千倍。

粘性系数 μ 也显著依赖于温度, 而很少随压力发生变化。 μ 与温度的关系对于液体和气体是截然不同的。液体的 μ 随 T 的升高而下降, 而气体的 μ 随 T 升高而上升。一个熟悉的例子就是沥青, 其随 T 升高粘性下降。

牛顿粘性律给出了粘性流体在剪切流动这一最简单情形的流动中剪切应力 τ 与速度梯度 $\frac{dv_1}{dx_2}$ 的关系, 但在一般情况下, 流动是复杂的, 那么剪切应力与速度梯度之间的关系如何? 像在弹性力学中推导广义虎克定律一样, 我们将牛顿粘性律作自然引申, 假定 (即基本假定 (1)) 一般情况下, 粘性剪切应力张量与速度梯度张量之间仍具有线性函数关系, 即有:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \qquad \dots (2-5-3a)$$

这里 C_{ijkl} 是表征流体粘性的四阶张量, 称为粘性系数张量。

假定 (基本假定 (2)) 流体是各向同性的, 因:

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) = \dot{\epsilon}_{kl} + \dot{\omega}_{kl}$$

而 τ_{ij} 是对称张量, 所以有:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} + C_{ijkl} \dot{\omega}_{kl} \qquad \dots (2-5-3b)$$

其中 $\dot{\epsilon}_{kl}$ 为应变率张量, $\dot{\omega}_{kl}$ 为旋转率张量

注意到 $\dot{\omega}_{kl} = -\dot{\omega}_{lk}$ 是一个反对称张量, 对各向同性流体, C_{ijkl} 是各向同性张量, 即 C_{ijkl} 关于 k, l 是对称的, 所以上式第二项为零, 这表明粘性剪切力 τ_{ij} 与流体微元的刚性转动无关,

只和变形有关。即有：

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad \dots (2-5-4)$$

我们知道（基本假定(3)）：流体静止时，流体面元上承受的应力为各项同性的法向应力（压应力）：

$$P_{ij} = -P\delta_{ij} \quad \dots (2-5-5)$$

而在运动流体中，由于宏观运动速度 v_i 分布不均匀，使得流体面元上不仅承受法向应力，还承受剪切应力 τ_{ij} ，即：

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad \dots (2-5-6)$$

当运动速度分布趋于均匀或运动停止时， $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0$ 。运动流体的压力函数趋于静止流体的压力函数，且流体应力张量趋于静止流体的应力张量。

我们可以写出一般情况下流体应力张量与应变率张量之间的线性本构方程：

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij} = -P\delta_{ij} + C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad \dots (2-5-7)$$

对于各项同性流体， C_{ijkl} 是一个各向同性张量，可表示成：

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad \dots (2-5-8)$$

其中 λ 和 μ 都是标量，可见对各向同性流体，粘性系数只有两个是独立的。所以各向同性流体的本构方程（即应力-应变速率关系）为：

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \lambda\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\dot{\epsilon}_{ij}$$

即：

$$\tau_{ij} = \lambda\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\dot{\epsilon}_{ij} \quad \dots (2-5-9)$$

显然，牛顿粘性规律正是上式当 $v_1 = v_1(x_2)$ ， $v_2 = v_3 = 0$ 时的特殊情况。

在主轴坐标系中， $\sigma_{ij} = 0$ ， $\dot{\epsilon}_{ij} = 0$ （当 $i \neq j$ 时），所以有

$$\begin{cases} \sigma_{11} = -P + 2\mu\dot{\epsilon}_{11} + \lambda\nabla \cdot \vec{v} \\ \sigma_{22} = -P + 2\mu\dot{\epsilon}_{22} + \lambda\nabla \cdot \vec{v} \\ \sigma_{33} = -P + 2\mu\dot{\epsilon}_{33} + \lambda\nabla \cdot \vec{v} \end{cases} \quad \dots (2-5-10)$$

膨胀率：

$$\dot{\epsilon}_{kk} = \dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33} = \nabla \cdot \vec{v}$$

我们引进

$$\mu' = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad \dots (2-5-11)$$

称 μ' 为第二粘性系数。则本构方程改写为:

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu\left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij}\right) + \mu'\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij} \quad \dots (2-5-12)$$

至于 μ' 的物理意义可由主轴系下, 一点的法向应力的平均值来讨论。
法向应力平均值:

$$\frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = -P + \mu'\nabla \cdot \vec{v} \quad \dots (2-5-13)$$

法向应力平均值的负值, 又称为流体动力学压强, 记为 \bar{P} :

$$\bar{P} = -\frac{1}{3}\sigma_{ii} = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad \dots (2-5-14)$$

可见:

$$P - \bar{P} = \mu'\nabla \cdot \vec{v} \quad \dots (2-5-15)$$

即有:

i>对于不可压缩流体($\nabla \cdot \vec{v} = 0$)或 Stokes 流体($\mu' = \lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$)运动流体的压力函数 P 就等于流体动力学压强 \bar{P} 。所以对不可压缩流体或 Stokes 流体, 其性质可唯一地由动力学粘性系数 μ 来描述。

ii>对于可压缩流体(如高速运动的气体), $\nabla \cdot \vec{v} \neq 0$, 这时流体在运动过程中, 其体积(或密度)发生膨胀或收缩, 从而引起运动流体的动力学压强 \bar{P} 发生 $\mu'\nabla \cdot \vec{v}$ 的改变。所以, μ' 表征了可压缩流体的体积胀缩, 故 μ' 又称为体胀粘性系数。

对于斯托克斯流体($\mu' = 0$), 它的本构方程(对应常温、非高频情况下的一般运动)为:

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu\left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij}\right) \quad \dots (2-5-16)$$

(2-5-9) 和 (2-5-16) 式都称为广义牛顿公式。
而对于不可压缩流体, 它的本构方程则为:

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu\dot{\epsilon}_{ij} \quad \dots (2-5-17)$$

§2.6 Navier-Stokes 方程

对于各项同性流体，将本构方程的 (2-5-9) 代入动量方程，得：

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{F} - \nabla P + 2\mu \nabla \cdot \vec{\varepsilon} + \nabla(\lambda \nabla \cdot \vec{v}) \quad \dots (2-6-1)$$

上式即为 Navier-Stokes 方程，该方程奠定了粘性流体的动力学基础。至此，本构关系为流体力学方程组又增加了六个方程。

§2.7 状态方程、内能及熵的表达式

<I>状态方程

由热力学理论知，对一个均匀的热力学体系（例如我们所研究的流体体系）在自然的平衡态下，描写平衡态的三个相互关联的物理量：体积 V （几何变数），压力 P （力学变数）和温度 T （热力学变数）之间可用一个方程联系起来，这就是热力学的状态方程。这个方程的一般形式为：

$$F(P, V, T) = 0 \quad \text{or} \quad P = f(T, V) \quad \dots (2-7-1)$$

例如，对于单位质量的理想气体，平衡时的状态方程为：

$$PV = RT \quad \text{or} \quad P = \rho R_d T$$

此式称为克拉贝龙方程（理想气体状态方程）。式中 V 是单位质量气体的体积， ρ 是密度。 R 为普适气体常数，是与气体种类及所处条件无关的普适常数， $R = 8.31 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ 。 $R_d = \frac{R}{M}$ 称为个别气体常数，由通用气体常数 R 除以摩尔质量 M 求出。

又例如，对于正常条件下（即常温、常压下）的均质液体，状态方程为：

$$\rho = \text{const}$$

<II>内能及熵

（详见吴望一书 P171~180）

流体力学体系是一个热力学系统。对于均匀的热力学系统，由热力学理论可知系统的热力学性质可完全由状态方程 $P = P(T, V)$ 以及系统的内能 $U = U(T, V)$ 和熵 $S = S(T, V)$ 这三个基本热力学状态函数来确定。由热力学理论（即热力学第一和第二定律）可推出内能及熵的表达式为：

$$U(T, V) = \int_{T_0, V_0}^{T, V} \left\{ C_V dT + \left[T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P \right] dV \right\} \quad \dots (2-7-2)$$

$$S(T, V) = \int_{T_0, V_0}^{T, V} \left[\frac{C_V}{T} dT + \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dV \right]$$

•••• (2-7-3)

其中： C_V 为等容比热：

$$C_V = C_{V_0} + T \int_{V_0}^V \left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right)_V dV$$

•••• (2-7-4)

由以上三个式子可见：只要知道了状态方程（可通过实验测出）及在某一体积 V_0 下测得的 C_{V_0} 就可以确定任意体积 V 时的等容比热 C_V ，进而就可以完全确定系统的内能及熵。

上述热力学函数公式都是对于均匀系和平衡态而言的，这些结果可以直接用于处于均匀平衡态的静止流体。流体在运动时一般是处于非平衡态和非均匀态，对非平衡态和非均匀态体系用均匀系的平衡态公式是否可行，是一个问题。需要通过检验理论与实践的符合程度来判断可否。大量的实践表明：

对处于非均匀、非平衡态的流体采用均匀系的平衡态公式的结果是近似准确的。即虽然运动流体可能偏离平衡态很远，但它们并不对热力学关系产生显著影响。

§2.8 流体力学基本方程组

（详见吴望一《流体力学》P180~193）

归纳前面的讨论结果，流体力学基本方程组可表述为：

<I> 微分形式的基本方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{连续性方程(标量, 1 个)} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \\ \text{动量方程(矢量, 3 个)} \quad \rho \frac{D \vec{v}}{Dt} = \rho \vec{F} + \nabla \cdot \vec{\sigma} \\ \text{能量方程(标量, 1 个)} \quad \rho \frac{DU}{Dt} = \vec{\sigma} : \vec{\dot{\epsilon}} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho q \\ \text{本构方程(二阶张量, 6 个)} \quad \vec{\sigma} = -P \vec{I} + 2\mu \left(\vec{\dot{\epsilon}} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{v} \vec{I} \right) + \mu' \nabla \cdot \vec{v} \vec{I} \\ \text{状态方程(标量, 1 个)} \quad P = f(\rho, T) \end{array} \right.$$

•••• (2-8-1)

上述由 12 个方程组成的方程组，用来确定 $v_i, P, \rho, T, \sigma_{ij}$ 共 12 个未知函数。可见方程组是封闭的，其中 $\mu, \mu', k(T)$ 是给定的。内能 U 的表达式由(2-7-2)式给出。

<II> 积分形式的基本方程

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{连续性方程} \quad \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0 \\
 \text{动量方程} \quad \iiint_V \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV + \iint_S \rho \vec{v} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho \vec{F} dV + \iint_S \vec{\sigma} \cdot d\vec{S} \\
 \text{能量方程} \quad \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(U + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] dV + \iint_S \rho \left(U + \frac{1}{2} v^2 \right) \vec{v} \cdot d\vec{S} \\
 \quad = \iiint_V \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dV + \iint_S \vec{\sigma} \cdot \vec{v} d\vec{S} + \iint_S k \nabla T \cdot d\vec{S} + \iiint_V \rho q dV \\
 \text{角动量方程} \quad \iiint_V \left[\vec{r} \times \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} \right] dV + \iint_S (\vec{r} \times \rho \vec{v}) \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{r} \times \rho \vec{F} dV + \iint_S \vec{r} \times \vec{\sigma} dS \\
 \text{本构方程} \quad \vec{\sigma} = -P \vec{I} + 2\mu \left(\vec{\varepsilon} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{v} \vec{I} \right) + \mu' \nabla \cdot \vec{v} \vec{I} \\
 \text{状态方程} \quad P = f(\rho, T)
 \end{array} \right.$$

•••• (2-8-2)

微分形式的方程组在流体内部点点满足，因在内部，流体是连续的。但在边界上，一般会出现物理量的不连续。这时积分形式的方程组仍然成立，故可用之。

§ 2.9 初、边条件

我们知道，要唯一地确定满足流体力学基本方程组的解，必须利用相应问题的初、边条件。

<I> 初始条件

对于定常问题，则不必给初始条件。对非定常问题，给出初始时刻 $t = t_0$ 流场中各物理量的分布函数，即：

$$\vec{v}(x_i, t_0) = \vec{v}_0(x_i); P(x_i, t_0) = P_0(x_i); \rho(x_i, t_0) = \rho_0(x_i); T(x_i, t_0) = T_0(x_i)$$

•••• (2-9-1)

<II> 边界条件

边界条件根据不同的边界面，有不同的给法。

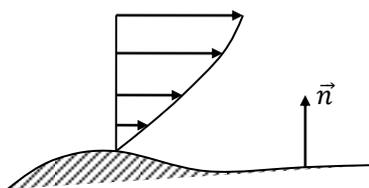
<a> 流、固分界面上的边条件

若固体界面是光滑的，不可渗透的，则在一般情况下（即粘性流动情况），流体在固体表面上没有相对滑动（无滑移条件），即：

$$\vec{v}_f = \vec{v}_s \text{ (速度连续)}$$

$$T_f = T_s \text{ (温度连续) 或 } \left(k \frac{\partial T}{\partial n} \right)_f = \left(k \frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = Q_s \text{ (已知固体壁面传导给流体的热流密度为 } Q_s \text{)}$$

•••• (2-9-2)



粘性流动无滑移。f=fluid 流体 s=solid 固体

这里 \vec{n} 是流、固界面的内法线单位矢量（从固壁面指向流体内部），今后定义固体向流体传导的热量为正。

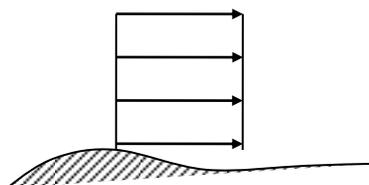
特别地：当固壁面是静止的，则有：

$$v_s = 0 \quad \dots (2-9-3)$$

而当为理想流体时，则只需法向速度连续：

$$(v_n)_f = (v_n)_s \quad \dots (2-9-4)$$

这表明流体质点在壁面上可滑移，这是由于理想流体忽略粘性的结果。



理想流体忽略粘性力，故在壁面上，流体质点可滑移，故只需法向速度分量连续。

 两种液体分界面上的边界条件

①液、液界面（例：密度不同的两种液体的分界面，江西九江附近的鄱阳湖水与长江水的交界面。）

分子运动论（分子运动的输运性质：使不同流体区域内的各物理量的统计平均在整个流体系统内趋于均匀）和实验证实，若两种液体互不渗透，而且界面不随时间而变，则在分界面上有：

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 ; T_1 = T_2 ; P_1 = P_2 \quad \dots (2-9-5)$$

分界面上粘性应力和通过界面的传热量也一定是相等的，即有：

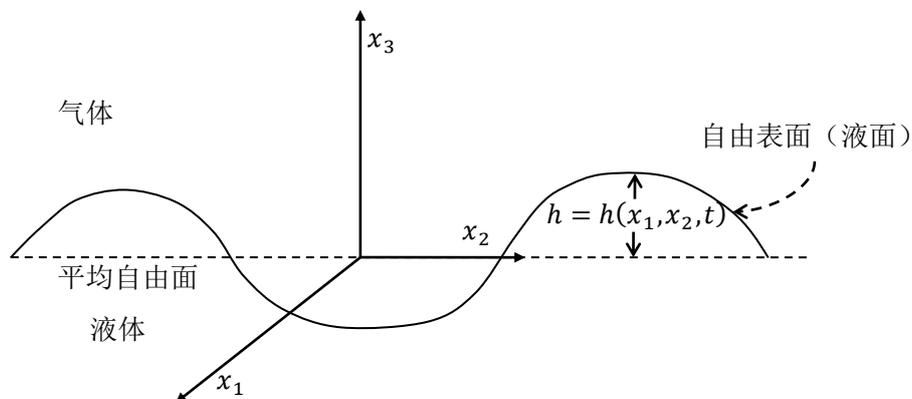
$$\mu_1 \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_1 = \mu_2 \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_2 ; k_1 \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_1 = k_2 \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_2 \quad \dots (2-9-6)$$

②液、气界面（自由界面。例如：洋面）

在自由界面上，运动学的边界条件是给出液体的自由表面的垂直波动速度与自由表面垂

向高度关系，即：

$$v_3(x_1, x_2, h) = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial h}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \quad \dots (2-9-7)$$



这里 $h = h(x_1, x_2, t)$ 是自由表面在垂向的高度。而 $\frac{dx_1}{dt}$ 和 $\frac{dx_2}{dt}$ 是自由表面流体质点在 x_1, x_2 方向的分速度。如果 $\frac{\partial h}{\partial x_1}$ 和 $\frac{\partial h}{\partial x_2}$ 都不大，那么可略去 (2-9-7) 式中右边的后两项，这时，自由面上近似有：

$$v_3(x_1, x_2, h) = \frac{\partial h}{\partial t} \quad \dots (2-9-8)$$

如果忽略液体的表面张力，则在自由面上液体的压力应等于大气压，即有：

$$P_{liquid} = P_{atmosphere} \quad \dots (2-9-9)$$

又因为： $\mu_l \gg \mu_a$, $k_l \gg k_a$, 故由剪应力和传热量连续条件可知，在自由面上：

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_l \doteq 0 \quad \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_l \doteq 0 \quad \dots (2-9-10)$$

第三章 理想流体力学的一般理论

§ 3.1 理想流体

我们知道：理想流体是指粘性和导热都不起重要作用，因而可以忽略的流体。因此，对理想流体运动，不考虑运动过程中系统的能量耗散（因为粘性（即内摩擦），和导热是系统能量耗散的根源）

由于不考虑导热，所以理想流体的运动必须假定为绝热的。而由热力学理论知，在可逆的绝热运动中，当任何流体质点在空间改变其位置时，它的熵保持不变（即：熵 $S(V, T)$ 的随体导数等于零）。

归纳上述，理想流体的特征为：①无粘性（剪切力为零）、②无导热（绝热过程，熵的随体导数等于零）。

§ 3.2 理想流体运动方程组

<I> 惯性系下的运动方程组

一般，理想流体运动的控制方程组可由连续性方程、动量方程和绝热方程组成完备的微分方程组，即：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{连续性方程 } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0^{(1)} \\ \text{动量方程 } \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{F} - \nabla P^{(2)} \\ \text{绝热方程(能量方程无粘性情况) } \frac{DS}{Dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla S = 0^{(3)} \\ \text{状态方程 } f(P, \rho, S) = 0^{(4)} \end{array} \right.$$

•••• (3-2-1)

注：

- (1) 记矢量 \vec{j} 为质量通量密度（ $\vec{j} = \rho \vec{v}$ ），方向就是流体运动方向，大小就等于单位时间内流过与速度垂直的单位面积的流体质量。
- (2) 该式称为 Euler 方程。
- (3) 该方程即为无粘无热传导的能量方程。
- (4) 借助连续性方程，可将绝热方程写成熵的“连续方程”： $\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho S \vec{v}) = 0$ ，其中 $(\rho S \vec{v})$ 称为熵通量密度。

其中， S 是单位质量流体的熵。由上述给出的 5 个独立的微分方程，用以确定 5 个未知函数 v_i, P, ρ 。由热力学理论知，对于一个热力学系统，只要给定任意两个热力学量的值（例如压力 $P(\vec{r}, t)$ 和密度 $\rho(\vec{r}, t)$ 的值），同时给定状态方程，那么所有的热力学量就都可由此确定。因此，如果我们给定了（通过在适当的初、边条件下求解（3-2-1）得到） v_i, P, ρ ，则理想流体的运动状态就完全确定了。

我们可以把 P 和 ρ 作为热力学关系式中的独立变量，对于任何一种特定的理想流体，熵 S 都是 P, ρ 的一个确定函数。所以熵 S 不是一个独立的未知函数（一般形式为 $f(P, \rho, S) = 0$ ，这

也是状态方程)。例如对于完全气体有:

$$S = C_v \ln \frac{P}{\rho^\gamma} + \text{const}$$

其中 C_v 和 γ 是常数。所以, 方程组(3-2-1)是完备的。

特别地, 不少流动问题常常具有: 初始时刻, 场是均匀的。即 $t = 0$ 时, v_i, P, ρ 与 x_i 无关。这样, 在初始时刻整个体积中的熵为一常数, 由理想流体在流体运动过程中, 流体质点的熵守恒性质可推知在随后的任一时刻, 熵将处处保持为同一常数。在这种情况下, 我们就可以将绝热方程简写为:

$$S = \text{const} \quad \dots (3-2-2)$$

这时压力 P 和密度 ρ 之间存在确定的单值函数关系:

$$\rho = \rho(P) \quad \dots (3-2-3)$$

我们把密度只是压力的函数而和其他热力学变数(例如温度、湿度、盐度等)无关的流体称为正压流体, 否则称为斜压流体。满足(3-2-2)式的流体运动称为等熵流动。这种情况下由方程组(3-2-1)控制的独立未知函数由5个减为4个(即: v_i, P)。

在等熵流中, 欧拉方程可写成另一种形式。为此, 我们应用热力学关系式:

$$d\omega = TdS + VdP \quad \text{or} \quad d\omega = TdS + \frac{1}{\rho}dP$$

上式中, ω 是单位质量流体的焓, $V = \frac{1}{\rho}$ 是比容, T 是温度。因为 $S = \text{const}$, 就有:

$$d\omega = \frac{dP}{\rho}$$

即:

$$\nabla\omega = \frac{1}{\rho}\nabla P \quad \dots (3-2-4)$$

若流场处于保守力场(例如重力场)中, 即有:

$$\vec{F} = -\nabla\varphi$$

其中 φ 是保守力场 \vec{F} 的势函数
则欧拉方程可改写成:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla(\omega + \varphi) \quad \dots (3-2-5)$$

欧拉方程的另一种形式:

利用矢量恒等式: $\frac{1}{2}\nabla v^2 = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$

我们还可将欧拉方程写成仅含速度的形式，从而使速度 v_i 与 ρ 和 P 解耦。将：

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) + \frac{1}{2}\nabla v^2$$

代入 (3-2-5) 式得： $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) + \frac{1}{2}\nabla v^2 = -\nabla(\omega + \varphi)$

对上式两边取旋度，注意到位势场是无旋场，就得到：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{v}) = \nabla \times [\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})]$$

..... (3-2-5a)

可见上式仅包含速度。

通常在解决具体问题时，为了处理上的方便，将速度场的位势部分和涡旋部分分开。利用矢量恒等式：

$$(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} = (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} - \frac{1}{2}\nabla v^2$$

即：

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2}\nabla v^2$$

(其中涡旋部分为 $(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}$ ，位势部分为 $\frac{1}{2}\nabla v^2$)

将上式代入欧拉方程得：

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2}\nabla v^2 = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\nabla P$$

..... (3-2-6)

上式由兰姆首先提出，故称为兰姆形式的运动方程。若是等熵流且流体处于有势场中，则有：

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2}\nabla v^2 = -\nabla(\omega + \varphi)$$

..... (3-2-6a)

<II> 非惯性系下的运动方程

在有些情形下，需要了解流体相对运动参考系（例：固定在自转着的地球上的参考系）的运动。例如，讨论大气的大尺度运动时，选地球为参考系是合适的，但地球的自转效应不能忽视。此时，我们就是在非惯性系中讨论问题。相应地，运动方程要作适当修改。

假设，在所考虑的时刻，我们让动参考系与静参考系重合，则由理论力学可知：流体质点在静止系中的绝对速度 \vec{v}_a 可写为：

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

其中， \vec{v}_r 是相对速度， \vec{v}_e 是牵连速度，且 $\vec{v}_e = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$ ， \vec{r} 为流体质点的矢径， \vec{v}_0 是动系相对静系的平动速度， $\vec{\omega}$ 为动系绕静系的转动角速度。流体质点的绝对加速度为：

$$\vec{A}_a = \vec{A}_r + \vec{A}_e + \vec{A}_c$$

其中, $\vec{A}_e = \frac{d\vec{v}_e}{dt} = \frac{d\vec{v}_o}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$, $\vec{A}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$ 为科里奥利加速度。我们通常遇到的情况是动系与静系原点重合, 动系仅是绕静系以恒定角速度旋转。即有:

$$\vec{v}_0 = 0, \vec{\omega} = \text{const vector}$$

此时有:

$$\vec{A}_a = \vec{A}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$$

而相对于旋转参考系, 流体质点的加速度为:

$$\vec{A}_r = \left(\frac{D\vec{v}_r}{Dt} \right)' = \left(\frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t} \right)' + (\vec{v}_r \cdot \nabla) \vec{v}_r$$

这里“'”表示微分运算都是相对旋转参考系进行的。

而相对于静止参考系, 流体质点的加速度为:

$$\vec{A}_a = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla P$$

由上述我们可将运动方程相对旋转参考系写出为:

$$\left(\frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t} \right)' + (\vec{v}_r \cdot \nabla) \vec{v}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{F} \quad \dots (3-2-7)$$

or

$$\left(\frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t} \right)' + \frac{1}{2} \nabla v_r^2 + (\nabla \times \vec{v}_r) \times \vec{v}_r = [\vec{F} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r] - \frac{1}{\rho} \nabla P \quad \dots (3-2-8)$$

由上式可见: 只要将外力 \vec{F} 换成虚拟外力 $\vec{F} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$, 则运动参考系中的运动方程和静止参考系中的运动方程 (即兰姆方程) 具有完全相同的形式。

虚拟外力中, $-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ 是惯性离心力, 它是动系旋转时作用在单位质量流体上的力, 它与流体是否存在相对于参考系的流动无关。

§ 3.3 流体静力学

<I> 均匀重力场中的静止流体

对处于均匀重力场中的静止流体, 欧拉方程的形式为:

$$\nabla P = \rho \vec{g} \quad (\text{因 } \vec{F} = \vec{g}, \vec{v} = 0) \quad \dots (3-3-1)$$

这个方程描述了流体的力学平衡。如果不存在外力, 平衡方程就是 $\nabla P = 0$, 即 $P = \text{const}$ 。亦即流体中每一点的压力相同。

若是不可压缩流体($\frac{D\rho}{Dt} = 0$)且均质($\nabla\rho = 0$), 则 $\rho = const$ (由 $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\rho$ 得 $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$), 这时(3-3-1)式可直接积分, 取 x_3 轴垂直向上, 则有:

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\partial P}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x_3} = -\rho g$$

..... (3-3-2)

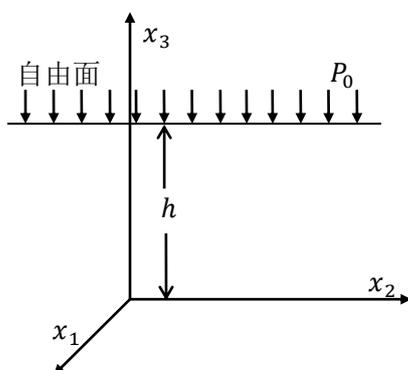
因此, 得:

$$P = -\rho g x_3 + C$$

若边界条件为: $x_3 = h$, $P = P_0$ (大气压), 则得 $C = P_0 + \rho g h$
所以:

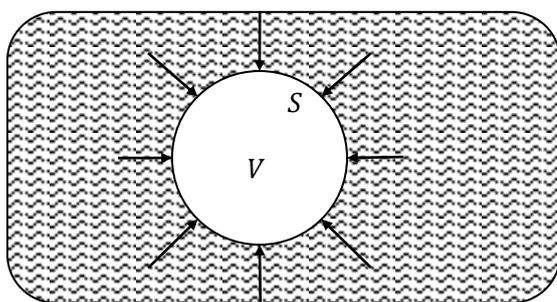
$$P = P_0 + \rho g (h - x_3)$$

..... (3-3-3)



自由面上每一点压力相同, 所以自由面是一个水平面。

<II> 阿基米德定律



浸没于静止流体中的物体受到四周流体的作用, 作用力的合力称为浮力。计算物体的浮力是一个古老的流体静力学问题。如图设浸没于流体中的物体表面为 S , S 所围体积为 V , 则浮力 \vec{F} 的第 i 个分量为:

$$\begin{aligned}
 F_i &= \iint_S P_{ij} n_j dS \xrightarrow{\text{静止流体 } P_{ij} = -P \delta_{ij}} - \iint_S P n_i dS \xrightarrow{\text{将(3-3-3)代入}} - \iint_S (P_0 + \rho g h - \rho g x_3) n_i dS \\
 &\xrightarrow{\text{利用高斯公式}} \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho g x_3) dV = \rho g \delta_{i3} \iiint_V dV = \rho g \delta_{i3} V \quad (i = 1, 2, 3)
 \end{aligned}$$

••• (3-3-4)

于是得：

$$F_1 = F_2 = 0, \quad F_3 = \rho g V$$

••• (3-3-5)

上式就是著名的阿基米德原理：沉入水中的物体上所受到的浮力，其大小等于被物体所排挤出去的液体的重量，方向是重力的反方向。

<III> 重力场中达到静力平衡时流体的 ρ , P 和 T

由 (3-3-1) 式可见：如果流体（如大气）在重力场中处于力学平衡，它的压力只能是高度 x_3 的函数，即 $\frac{\partial P}{\partial x_3} = \frac{dP}{dx_3}$ 。因为在重力场中的流体处于力学平衡时，只能是 $P = P(x_3)$ 。否则，若同一高度不同点有不同的压力，必将引起流体运动。于是由 (3-3-1) 式可得：

$$\rho = -\frac{1}{g} \frac{dP}{dx_3}$$

••• (3-3-6)

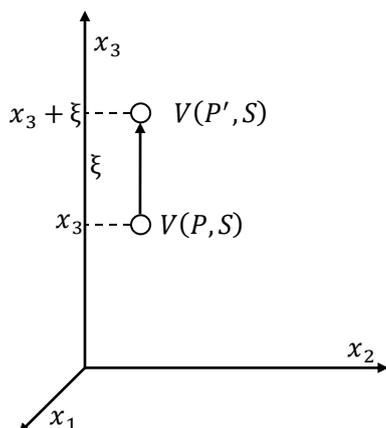
上式表明 ρ 也只是 x_3 的函数，即有 $\rho = \rho(x_3)$ 。

又由状态方程可知，温度 T 也只是 x_3 的函数。这样，在重力场中达到平衡的流体，其压力 P ，密度 ρ ，和温度 T 的分布仅仅依赖于高度。换句话说，力学平衡和热学平衡是相互影响的。

<IV> 重力场中不发生对流的条件

在重力场中，流体可以处于力学平衡（即不出现宏观运动）而并不同时处于热平衡。即使流体中温度不是常数，作为力学平衡条件的方程 $\nabla P = \rho \vec{g}$ 还是可以得到满足的。但是，由此却产生了关于这种平衡的稳定性问题。因为力学平衡和热学平衡是相互影响的。人们发现，只有当一定的条件得到满足时，这种温度的变化（一种热不稳定性）才能使得力学平衡不被破坏。

以下的分析中，我们将看到重力场中达静力平衡但热不平衡情况下的流体，其力学平衡的稳定性取决于温度梯度。当温度梯度满足一定条件时，力学平衡才是稳定的，否则，力学平衡就是不稳定的；而且，这种不稳定将导致流体的流动，促使流体混合，使得温度趋于均匀。这种运动称为对流（地学中，典型的例子是地幔对流。由于地幔内放射性热源的分非均匀，导致地幔内部热不稳定，在一定条件下，就会产生地幔对流）。因此，力学平衡成为稳定的条件也就是不发生对流的条件，该条件可用以下办法推导出来。



注意：理想流体运动是绝热的，亦即有熵守恒

考虑在力学平衡的流体中某 x_3 高度处的一个流体元（见上图），其密度为 $\rho(P, S)$ ， P 和 S 是 x_3 高度处的平衡压力和熵。当该流体元在温度扰动下产生一个向上的绝热移动，通过一小段路程 ξ 到达 $(x_3 + \xi)$ 高度处时，它的密度变成为 $\rho(P', S)$ ，其中 P' 是高度 $(x_3 + \xi)$ 处的平衡压力。为了使平衡稳定，一个必要（虽然一般不是充分的）条件是，作用在流体元上的合力趋于使它回到原来位置。这意味着移动到 $(x_3 + \xi)$ 处的流体元必须比它在此新位置上所“挤出”的流体元重一些。而被挤出的流体元的密度为 $\rho(P', S')$ ， S' 是 $(x_3 + \xi)$ 高度处的平衡熵。因此，按稳定性条件有：

$$\rho(P', S) - \rho(P', S') > 0 \quad \dots (3-3-7)$$

若用比容表示，则为（比容 $V = \frac{1}{\rho}$ ）：

$$V(P', S') - V(P', S) > 0 \quad \dots (3-3-8)$$

将这一差值展开成 $S' - S = \left(\frac{dS}{dx_3}\right)\xi$ 的幂级数，准确到一阶小量时，有：

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P \frac{dS}{dx_3} > 0 \quad \dots (3-3-9)$$

按热力学公式：

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P = \frac{T}{C_p} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

其中 C_p 是定压比热。 C_p 和 T 都是正数，因此，(3-3-9)式可以写成：

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \frac{dS}{dx_3} > 0$$

•••• (3-3-10)

一般流体加热后均产生膨胀，即有：

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P > 0$$

因此不发生对流的条件为：

$$\frac{dS}{dx_3} > 0$$

•••• (3-3-11)

即熵必须随高度而增加。

又因为：

$$\frac{dS}{dx_3} = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \frac{dT}{dx_3} + \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \frac{dP}{dx_3}$$

而：

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P = \left(-\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = \frac{C_P}{T}$$

$$\frac{dP}{dx_3} = -\rho g = -\frac{g}{V}$$

所以：

$$\frac{dS}{dx_3} = \frac{C_P}{T} \frac{dT}{dx_3} + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \cdot \frac{g}{V} > 0$$

$$\text{or } \frac{dT}{dx_3} > -\frac{gT}{C_P V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

•••• (3-3-12)

上式表明：如果温度随高度的增加而下降，并且温度梯度值超过： $\frac{gT}{C_P V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ ，则对流就可能发生。

§ 3.4 伯努利方程

伯努利定理：在流体的无粘无热传导的定常运动中，单位质量流体的总能量沿同一条流线保持不变。

<I>惯性系中的伯努利方程

在定常流的情况下，兰姆形式的运动方程 (3-2-6a) 可以直接积分出来，这个第一积分又称为伯努利积分或伯努利方程：

对定常流有 $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ ，则方程 (3-2-6a) 化为：

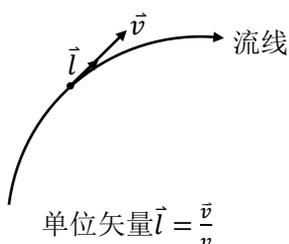
$$(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\nabla(\omega + \varphi)$$

•••• (3-4-1)

现在考虑某流线上任一点的切向单位矢量 \vec{l} ，它就是该点上流体质点的速度方向，即有：

$$\vec{l} = \frac{\vec{v}}{v}$$

•••• (3-4-2)



将 (3-4-1) 式两边点乘 \vec{l} 得：

$$\vec{l} \cdot (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} + \vec{l} \cdot \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\vec{l} \cdot \nabla(\omega + \varphi)$$

•••• (3-4-3)

因为 $\vec{l} // \vec{v}$ ，而 $(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} \perp \vec{v}$ ，亦即垂直于 \vec{l} ，所以 $(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}$ 在 \vec{l} 方向上的投影 $\vec{l} \cdot (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} \equiv 0$ 。于是 (3-4-3) 表示为：

$$\vec{l} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega + \varphi \right) = 0$$

•••• (3-4-4)

又因为梯度在任何方向的投影就是沿那个方向的方向导数，于是由上式得：

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega + \varphi \right) = 0$$

•••• (3-4-5)

积分上式得：

$$\frac{1}{2} v^2 + \omega + \varphi = C(m)$$

•••• (3-4-6)

上式即为伯努利方程。

这里， m 表示不同的流线。

上式表明：对同一条流线，不同点上的这三个量之和 $\frac{1}{2}v^2 + \omega + \varphi$ 为同一常数。沿不同的流线，该常数一般取不同的值。

如果流动处于重力场中，即 $\vec{F} = \vec{g}$ ，则有：

$$\varphi = gx_3$$

••• (3-4-7)

这时伯努利方程表为:

$$\frac{1}{2}v^2 + \omega + gx_3 = C(m)$$

••• (3-4-8)

<II>非惯性系中的伯努利方程

当流动相对旋转坐标系是定常的, 且体力有势, 则由方程 (3-2-7) 式可推导出非惯性系中的伯努利方程:

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{P}{\rho} + \varphi - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 = \text{const} \quad (\text{相对某一流线})$$

注*: 其中, v_r 是相对旋转坐标系的速度, 若流动相对旋转系是静止的, 则 $v_r = 0$ 。

例: 在半径为 a 的柱形圆筒中盛有高度为 h_0 的液体。设圆筒绕对称轴 (x_3 轴) 以恒角速度 $\bar{\omega}$ 旋转。试求圆柱中旋转液体自由面的形状, 及最高液面和最低液面差与 ω 的关系。

解:

分析: 以恒定角速度旋转, 经过一段时间后达到稳定状态, 这时往后流动是定常的, 即流体中任一点的速度不随时间变化。而定常流的连续性方程为 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ (且 $\rho = \text{const}$), 对本题连续性方程自然满足, 因:

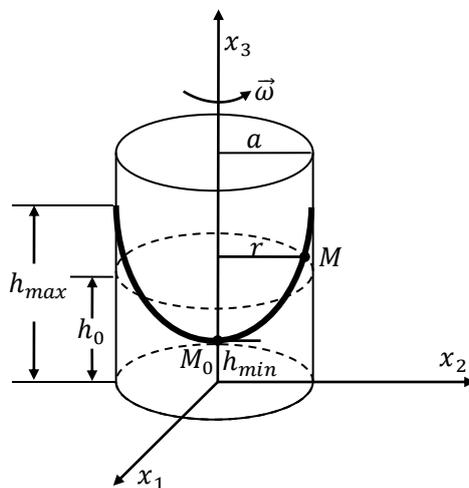
$$\vec{v} = \bar{\omega} \times \vec{r} = \omega \vec{e}_3 \times (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2) = \omega x_1 \vec{e}_2 - \omega x_2 \vec{e}_1$$

亦即:

$$v_1 = -\omega x_2, \quad v_2 = \omega x_1, \quad v_3 = 0$$

而:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}(-\omega x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\omega x_1) + 0 = 0$$



取如图所示的坐标系，考虑自由面上任一根过液面最低点($x_{3_0} = h_{min}$)的流线上任一点 M 与最低点 M_0 ，因这两点都在同一条流线上，则由非惯性系中的伯努利方程有：

$$\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{P_0}{\rho} + \varphi_0 - \frac{1}{2}\omega^2 r_0^2 = \frac{1}{2}v^2 + \frac{P}{\rho} + \varphi - \frac{1}{2}\omega^2 r^2$$

注*：因 $\nabla\omega = \frac{\nabla P}{\rho}$ ，当 $\rho = const$ 时，有 $\nabla\omega = \nabla\left(\frac{P}{\rho}\right)$ ，即 $\omega = \frac{P}{\rho}$ 。

•••• (1)

因为流线位于自由面上，故有 $P_0 = P$ ，而 v_0 、 v 是相对动系的速度，为零。 $\varphi_0 = gx_{3_0} = gh_{min}$ ， $\varphi = gx_3$ 。所以由 (1) 式得：

$$|x_3 - h_{min}| = \frac{1}{2g}\omega^2 r^2$$

•••• (2)

注意到： $r=a$ 时， $x_3 = h_{max}$ ，由上式得最高液面与最低液面的差与 ω 的关系为：

$$|h_{max} - h_{min}| = \frac{1}{2g}\omega^2 a^2$$

•••• (3)

上式给出了测量液面差 $h_{max} - h_{min}$ 来确定旋转角速度 ω 。因此盛有液体的旋转圆筒可用作测量角速度的仪器。

§ 3.5 理想流体的能量通量

我们选取空间的某个固定流体质元，求包含在这个流体质元中的能量随时间的变化。单位体积流体的能量为：

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho U$$

•••• (a)

注*：U 为单位质量流体内能。

其中第一项为动能，第二项为内能。这个能量随时间的变化为：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho U\right)$$

•••• (b)

下面为了计算这个量，分别来看动能和内能的变化。

注意到：动能的变化为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) = \frac{1}{2}v^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

•••• (c)

利用连续性方程和忽略体力 \vec{F} 的兰姆形式运动方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \dots (d)$$

和

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} \right] = -\nabla P \quad \dots (e)$$

对运动方程两边点乘 \vec{v} ，并注意到 $\vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} \equiv 0$
则有：

$$\rho \vec{v} \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 \right) = -\nabla P \cdot \vec{v} \quad \dots (f)$$

将 (d)、(f) 代入 (c) 得：

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \rho \vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - \nabla P \cdot \vec{v} \quad \dots (g)$$

由热力学关系：

$$\begin{aligned} d\omega &= TdS + \frac{dP}{\rho} \\ \Rightarrow \nabla \omega &= T\nabla S + \frac{\nabla P}{\rho} \\ \Rightarrow \nabla P &= \rho \nabla \omega - \rho T \nabla S \end{aligned} \quad \dots (h)$$

将 (h) 代入 (g) 得：

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \rho \vec{v} \cdot \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) + \rho T \nabla S \cdot \vec{v} \quad \dots (i)$$

再看内能的变化为：

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho U) = \omega \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho T \frac{\partial S}{\partial t} = -\omega \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \rho T \vec{v} \cdot \nabla S \quad \dots (j)$$

得到 (j) 式过程中我们利用了热力学关系： $dU = TdS - PdV = TdS + \frac{P}{\rho^2} d\rho \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} = T \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t}$
 $\dots (1)$

和单位质量流体的焓： $\omega = U + PV = U + \frac{1}{\rho} P \Rightarrow U = \omega - \frac{P}{\rho}$
 $\dots (2)$

由连续性方程有： $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v})$ ，由绝热方程有： $\frac{\partial S}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla S$

所以 (1) 式改写成： $\frac{\partial U}{\partial t} = -T \vec{v} \cdot \nabla S - \frac{P}{\rho^2} \nabla \cdot (\rho \vec{v})$
 $\dots (3)$

$$\begin{aligned} \text{而: } \frac{\partial}{\partial t}(\rho U) &= U \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial U}{\partial t} \xrightarrow{\text{将(2)(3)代入}} \left(\omega - \frac{p}{\rho}\right) [-\nabla \cdot (\rho \vec{v})] + \rho \cdot \left[-\left(T \vec{v} \cdot \nabla S + \frac{p}{\rho^2} \nabla \cdot (\rho \vec{v})\right) \right] \\ &\Rightarrow (j) \end{aligned}$$

联立 (i)、(j) 两式
最后得到:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho U \right) = - \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \rho \vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) = - \nabla \cdot \left[\rho \vec{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) \right] \quad \dots (3-5-1)$$

为了看清这个方程的物理意义, 我们将它对某个体积积分得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho U \right) dV &= - \iiint_V \nabla \cdot \left[\rho \vec{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) \right] dV = \\ &\xrightarrow{\text{用高斯公式}} - \iint_S \rho \vec{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad \dots (3-5-2)$$

现在看清楚了: 上式左边是给定体积中流体能量的变化率, 所以由能量守恒定理知 (在忽略体力, 且理想流体运动是绝热的) 右边的面积分就是单位时间内流出该体积的能量。

通常把 $\rho \vec{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right)$ 称为“能量通量密度”矢量, 其数值为单位时间内通过垂直于速度方向的单位面积的能量。

$\rho \vec{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right)$ 式表明: 任何单位质量的流体在运动过程中携带着 $\left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right)$ 的能量。这里出现焓 ω , 而不是内能 U , 具有明显的物理意义: 将焓 ω 与内能 U 的关系式 $\omega = U + \frac{p}{\rho}$ 代入, 则可以将通过一个封闭曲面的能量通量写为:

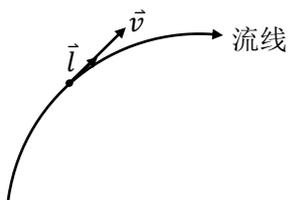
$$- \iint_S \rho \vec{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + U \right) \cdot d\vec{S} - \iint_S p \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

显然第一项是单位时间内被流体物质携带通过曲面的能量 (包括动能和内能), 第二项是作用在曲面内部流体上的压力所作的功。

特别, 在定常流动下方程 (3-5-1) 简化为 (注意用定常流动连续性方程 $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$):

$$\vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) = 0 \quad \dots (3-5-3)$$

记 \vec{l} 为流线上 (如图) 某点切线方向的单位矢量, 有 $\vec{l} = \frac{\vec{v}}{v}$ 。



则 (3-5-3) 式可表为:

$$\frac{\vec{v}}{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) = \vec{l} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) = 0$$

积分得:

$$\frac{1}{2} v^2 + \omega = c(m)$$

•••• (3-5-4)

可见上式就是无体力情况下的伯努利方程。因此，伯努利方程只是定常运动情况下的能量方程的一种特殊形式。

§3.6 理想流体的动量通量

考察空间某固定流体质元，单位体积流体的动量是 $\rho \vec{v}$ ， ρ 是流体质元的密度， \vec{v} 是其运动速度。我们来确定它的变化率 $\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t}$ ，我们已知：

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

由连续性方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Or

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k}$$

和无体力运动方程（欧拉方程）：

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i}$$

则有：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) &= -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial P}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x_k} \delta_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k) = -\frac{\partial}{\partial x_k}(P \delta_{ik} + \rho v_i v_k) \stackrel{\text{记为}}{\implies} -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} \end{aligned}$$

•••• (3-6-1)

其中二阶张量 Π_{ik} 定义为:

$$\Pi_{ik} = P \delta_{ik} + \rho v_i v_k$$

•••• (3-6-2)

注*: 实际上由无体力 ($\vec{F} = 0$), 理想流体 ($\sigma_{ij} = P_{ij} = -P \delta_{ij}$) 积分形式的动量方程: $\iiint_V \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV + \oint_S \rho \vec{v}(\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \oint_S \vec{P}_n dS$

$$\text{有: } \iiint_V \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dV = -\oint_S P \delta_{ik} dS_k - \oint_S \rho v_i v_k dS_k = -\oint_S (P \delta_{ik} + \rho v_i v_k) dS_k$$

$$\text{记: } \Pi_{ik} = P \delta_{ik} + \rho v_i v_k$$

实际上对理想流体有 ($P_{ik} = -P \delta_{ik}$), 则:

$$\Pi_{ik} = P \delta_{ik} + \rho v_i v_k = -P_{ik} + \rho v_i v_k$$

为了看清 (3-6-1) 式的物理意义, 对其两边对某一体积 V 进行积分, 即有:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho v_i dV = - \iiint_V \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV \stackrel{\text{格林公式}}{\implies} - \oint_S \Pi_{ik} dS_k$$

•••• (3-6-3)

上式实际就是理想流体在不考虑体力的情况下动量转换与守恒的关系式。上式中左边就是所讨论的体积内第 i 个动量分量的变化率 (or 增加)。因此, 右边的面积分就是单位时间内通过 V 的边界 S 流进和流出的动量的净增量 (包括由于流体进出 V 所携带的动量的净增量和由于压力 P 通过 S 面作用并传递到 V 内的动量)。所以, $\Pi_{ik} dS_k$ 就是流过面元 dS 的第 i 个动量分量。如果将 dS_k 写成 $n_k dS$ 的形式, 其中 dS 是面元的面积, \vec{n} 是面元的外法向单位矢量, 则 $\Pi_{ik} n_k$ 是第 i 个动量分量通过单位表面积的通量。我们可将:

$$\Pi_{ik} n_k = P n_i + \rho v_i v_k n_k$$

写成矢量形式, 有:

$$\vec{\Pi} \cdot \vec{n} = P \vec{n} + \rho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n})$$

•••• (3-6-4)

Π_{ik} 是单位时间内流过垂直于 x_k 轴的单位面积的第 i 个动量分量。我们把张量 Π_{ik} 称为“动量通量密度张量”。能量是零阶张量 (标量), 其能量通量是由一阶张量 (矢量) 确定; 动量是一阶张量, 其动量通量就要由一个二阶张量来确定。

(3-6-4) 式给出了 \vec{n} 方向的动量通量, 即通过垂直于 \vec{n} 的表面的动量通量。特别是, 取

\vec{n} 的方向平行于流速 \vec{v} ，则在这个方向上只输运动量的纵向分量，且其通量密度为 $P + \rho v^2$ 。而在垂直于速度的方向上，只输运动量（相对于 \vec{v} ）的横向分量，它的通量密度为压力 P 。

§ 3.7 环量守恒

在理想流体中任取一个可缩的“流体周线” L ，对 L 取速度环量有：

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad \dots (3-7-1)$$

对此速度环量取随体导数有：

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_L \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{l}$$

注*：速度环量的随体导数等于加速度的环量。

假定流动是等熵流（即初始流场是均匀场）且外力场有势，则由等熵流的运动方程：

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla(\omega + \varphi)$$

有：

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = - \oint_L \nabla(\omega + \varphi) \cdot d\vec{l} = - \oint_L d(\omega + \varphi) \equiv 0$$

注*： $-\oint_L d(\omega + \varphi) \equiv 0$ ，因 ω 和 φ 都是 \vec{r} 的单值函数。

所以：

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \text{const} \quad \dots (3-7-2)$$

上式表明：处于保守力场中的理想流体等熵流动，绕任一封闭“流体周线”的速度环量在运动过程中恒不变，此称为开尔文定理或环量守恒定律。利用 $\Gamma = J$ 可推得：通过以 L 为周界的任意开口曲面的涡通量也在运动过程中恒不变。

§ 3.8 势流

在第一章中我们已经引入了势流的概念：即流场中处处涡量为零（即 $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v} = 0$ ）的流动称为势流。而速度场无旋意味着它具有标量势 $\phi(\vec{r}, t)$ ，且：

$$\vec{v} = \nabla\phi$$

•••• (3-8-1)

这样, 求速度场的问题, 简化为求速度势的问题。特别, 对不可压缩流体, 因 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, 所以速度势满足拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

•••• (3-8-2)

所以, 求速度场的问题最终化为一个线性问题 (线性齐次方程), 而对线性问题, 数学处理就方便多了。

由上述分析可知: 流动的无旋性给问题的处理带来很大的便利。那么, 现在要解决一个首要问题, 即在什么样的条件下, 流动是无旋的? 下面我们利用开尔文定理来证明: 对于理想流体的等熵流动——

①只要流动在某一时刻是无旋的, 它将在以后的任何时刻都是无旋的。

②开始于静止状态的流动必为势流。

证: 我们在理想流体的等熵流中, 在任意时刻 t , 考察流场中任意一个流体质点 P , 环绕该质点作一条具有任意取向的无限小 (可缩) 封闭曲线 L , 并将此曲线作为物质线, 追溯到它在流场中具有无旋性的某一初始时刻 t_0 的情况。由于流动的连续性, 曲线 L 在 t_0 时刻应当还是一条无限小封闭曲线。因此, 按 Stokes 定理有:

$$\oint_{L(t_0)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_{S(t_0)} (\nabla \times \vec{v})_{(t_0)} \cdot d\vec{S} = 0$$

•••• (3-8-3)

由开尔文定理, 我们知道在 t 时刻仍有:

$$0 = \oint_{L(t)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_{S(t)} (\nabla \times \vec{v})_{(t)} \cdot d\vec{S}$$

•••• (3-8-4)

由曲线 L 的任意性, 我们可以断言 $[(\nabla \times \vec{v})_{(t)}]_P = 0$, 即在 t 时刻 P 点的旋度为零。再由 P 点的任意性, 所以在全流场, 均有:

$$\vec{\Omega}(t) = \nabla \times \vec{v}(t) \equiv 0$$

这就是要证明的①的结论。对于②的结论是显然的。

但是, 必须指出: 上述结论对于绕固壁边界的流动一般是不成立的。因为对于紧贴于固壁表面上的流体质点, 我们不能作出具有任意取向的无限小封闭曲线环绕它们, 这些质点的任意小的邻域总有一部分不在流场内。换句话说: 无限小封闭曲线如果有, 则一定不是可缩的。因此, 我们不能说固壁面上的质点的涡量也是为零的 (因对不可缩封闭曲线, Stokes 定理不可用)。所以当存在固壁边界时, 一般在固壁附近, 真实流动图像与理想流体势流图像相差甚远。但是, 对于特殊形状的物体——流线形物体, 绕固壁的真实流动和势流很相近。因此, 在具体问题中, 我们必须谨慎考虑真实流动能否用理想流体的势流解来近似描述。这个问题放在边界层理论中讨论。

由流动的无旋性, 使得我们把求速度场的问题化为一个线性问题, 但求压力场问题仍是

一个非线性问题。不过，欧拉方程的第一积分给出了由速度势求压力的代数关系式，推导如下：

由兰姆形式的欧拉方程：

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} \right] = \rho \vec{F} - \nabla P$$

在理想流体的等熵流情况下，加上体力有势和流动无旋的条件，上式可改写为：

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\nabla(\omega + \varphi) \quad \dots (3-8-5)$$

用 $\vec{v} = \nabla \phi$ 代入上式得：

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \omega + \varphi \right) = 0$$

积分得：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \omega + \varphi = f(t) \quad \dots (3-8-6)$$

这个第一积分称为拉格朗日积分（势流的第一积分）。其中 $f(t)$ 是时间 t 的任意函数，可由边界条件来确定。即若已知流场中某一点处的 $\phi(t)$ 、 $v(t)$ 、 $\omega(t)$ 和 $\varphi(t)$ ，则 $f(t)$ 即可定出来。对某一指定时刻， $f(t)$ 在整个流场中采用同一常数值。关于这一点是与伯努利积分只在同一流线上取同一数值所不同的。所以拉格朗日积分比伯努利积分有更重要的用途。

由于 ϕ 是 \vec{v} 的空间偏导数，则可在 ϕ 上加上一个时间 t 的任意函数。不妨以 $\phi - \int f(t) dt$ 代替 ϕ ，则有：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \omega + \varphi = 0 \quad \dots (3-8-7)$$

(3-8-7) 式给出了由速度势求压力函数的代数关系式，即若已知 ϕ 、 φ 、 $f(t)$ ，而 $\omega = \int \frac{dP}{\rho(P)}$ （正压流体 or 等熵流，则 $d\omega = \frac{1}{\rho} dP$ or $\nabla \omega = \frac{1}{\rho} \nabla P$ ），则可由 (3-8-7) 式计算压力函数 P 。

特别地，对于定常流动，我们有 $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ ， $f(t) = \text{const}$ 。于是拉格朗日积分简化为：

$$\frac{1}{2} v^2 + \omega + \varphi = \text{const} \quad \dots (3-8-8)$$

§ 3.9 不可压缩流体

对不可压缩 ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$ or $\frac{D\rho}{Dt} = 0$) 理想 ($\sigma_{ij} = P_{ij} = -P\delta_{ij}$) 流体在重力场中的流动, 其控制方程组大大简化为:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{g} \end{aligned} \quad \dots (3-9-1)$$

若令 $\rho = const$, 则有: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla\left(\frac{P}{\rho}\right) + \vec{g}$, 两边取旋度并注意到若为等熵流, 则有:

$$\nabla\left(\frac{P}{\rho}\right) = \nabla\omega, \quad \vec{g} = -\nabla\phi$$

而位势场必为无旋场, 即有:

$$\nabla \times (\nabla\omega) \equiv 0, \quad \nabla \times (\nabla\phi) \equiv 0$$

则有:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{v}) = \nabla \times [\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})] \quad \dots (3-9-2)$$

注*: 矢量关系式 $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$, 而 $\nabla \times \left(\frac{1}{2} \nabla v^2\right) \equiv 0$ 。

这样: 对密度 $\rho = const$ 的不可压缩流体的动力学基本方程组就可化为只含速度变量的方程组, 即连续性方程 (3-9-1) 和运动方程 (3-9-2)。另外, 在此情形下, 伯努利方程可写成更简单的形式, 用 $\frac{P}{\rho}$ 代替 ω , 有:

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{P}{\rho} + gx_3 = const(m) \quad \dots (3-9-3)$$

相应地, “能量通量密度” 矢量变为:

$$\rho \vec{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{P}{\rho} \right) \quad \dots (3-9-4)$$

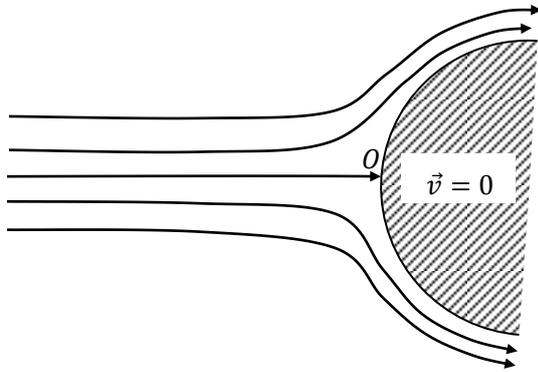
对不可压缩流体势流 ($\nabla \times \vec{v} = 0$), 方程 (3-9-2) 自动满足, 由 $\vec{v} = \nabla\phi$, 则不可压缩势流问题归结为:

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 \leftarrow \text{线性二阶偏微分方程(可用迭加原理)} \\ v_n|_{\text{固壁上}} = 0 \text{(静止固壁情形)} \text{ or } v_n|_{\text{流体}} = v_n|_{\text{固体}} \text{(运动固壁情形)} \\ \text{or 写成 } v_n = \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial n} \text{ 在边界上给定} \end{cases} \dots (3-9-5)$$

对于势流，速度和压力由拉格朗日积分相联系，当为不可压缩流动时，可用 $\frac{P}{\rho}$ 代替 ω ，这时拉格朗日积分表为（不考虑重力，即忽略重力）：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{P}{\rho} = f(t) \dots (3-9-6)$$

注：在不可压缩流体的定常流中（忽略重力），伯努利方程化为 $\frac{1}{2}v^2 + \frac{P}{\rho} = \text{const}(m)$ ，亦可直接用（3-9-6）式。



由上式可见，在不可压缩流体的定常流中，最大压力出现在速度为零的点上（见上图中O点），这种点通常在绕流物体的表面上，称其为驻点。如果 \vec{u} 是无穷远处的来流速度， P_0 是无穷远处的压力，则驻点的压力即为：

$$P_{max} = P_0 + \frac{1}{2}\rho u^2 \dots (3-9-7)$$

注*： $f(t)$ 由边界条件确定：当 $r = \infty$ 时， $v = u$ ， $P = P_0$ ，则：

$$f(t) = \frac{1}{2}u^2 + \frac{P_0}{\rho} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{P}{\rho}|_{v=0} = \frac{1}{\rho}P_{max}$$

§ 3.10 不可压缩流体的平面运动

<I> 平面运动，流函数及其必须满足的方程

假设运动流体的速度分布仅决定于两个坐标（设为 x_1 、 x_2 ），并且速度处处平行于 x_1x_2 平面，则称这种流动为二维流 or 平面流。在解不可压缩流体的平面流问题时，为了方便，常用流函数来表示速度。由连续性方程：

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \quad \dots (3-10-1)$$

引入函数 $\psi(x_1, x_2)$, 让:

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad \dots (3-10-2)$$

显然 (3-10-2) 是 (3-10-1) 的解。称 $\psi(x_1, x_2)$ 为流函数。这样, 连续性方程已自动满足。将 (3-10-2) 式代入 (3-9-2) 式得流函数必须满足的运动方程为:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 \psi = 0 \quad \dots (3-10-3)$$

<II> 流线就是等流函数线

下面可以看到, 如果我们知道了流函数 $\psi(x_1, x_2)$, 就能直接确定出流线形状。平面流的流线微分方程为 (按流线的定义):

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} \quad \text{or} \quad v_2 dx_1 - v_1 dx_2 = 0 \quad \text{亦即: } d\vec{l} \times \vec{v} = 0$$

上式表示流线的切线方向 $d\vec{l}$ 即为速度方向。

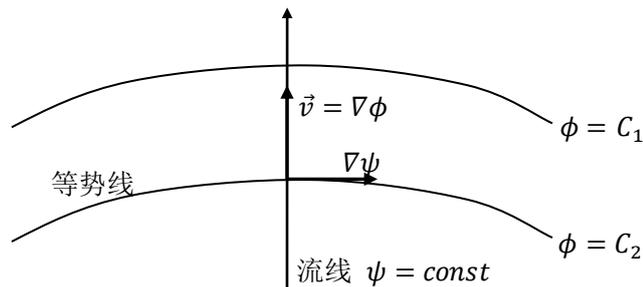
以 (3-10-2) 代入即有:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 = d\psi = 0$$

由此可得:

$$\psi = \text{const} \quad \dots (3-10-4)$$

上式表明: 流线就是令流函数等于任意常数所得到的曲线族。



特别在流线上点点有:

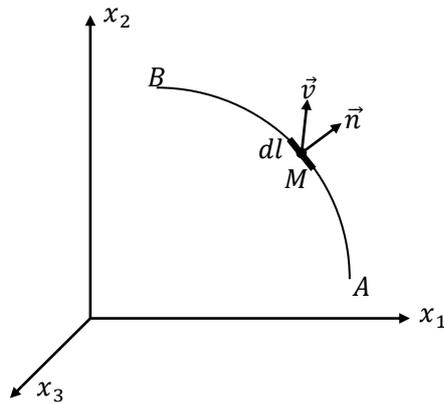
$$\vec{v} \cdot \nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0 \quad \dots (3-10-5)$$

上式表明: $\vec{v} \perp \nabla \psi$, 即流函数的梯度方向与流动速度方向正交。特别对于势流, 则有 $\vec{v} = \nabla \phi$, 亦即 $\nabla \phi \perp \nabla \psi$ 。此式表明: 等势线与流线正交。

<III> 两点的流函数值之差等于过此两点连线的流量

假设我们在 x_1x_2 平面上任取两点 A 、 B ，并在两点间引一条曲线，则通过该曲线的质量流量 Q_m 可由这两点上流函数之差给出，而与曲线的形状无关。设在曲线上 M 点的法向（在 x_1x_2 平面内）用 \vec{n} 表示，则通过 M 点的 dl 元弧段的元质量流量为：

$$\begin{aligned} dQ_m &= \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dl = \rho [v_1 \cos(\vec{n} \wedge \vec{e}_1) + v_2 \cos(\vec{n} \wedge \vec{e}_2)] dl \\ &= \rho (v_1 dx_2 - v_2 dx_1) = \rho d\psi \end{aligned} \quad \dots (3-10-6)$$



故通过 AB 段的质量流量为：

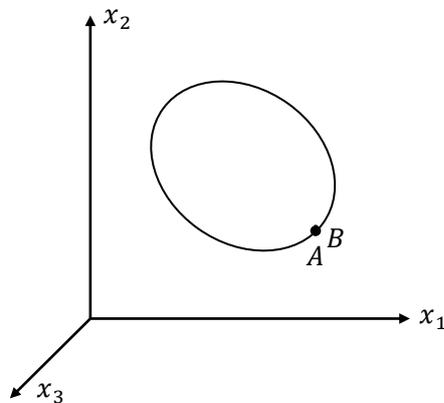
$$Q_m = \int_A^B \rho d\psi = \rho(\psi_B - \psi_A) \quad \dots (3-10-7)$$

由上式可见：

①若 AB 为封闭曲线，即 A 、 B 两点重合，则在 ψ 为单值函数的条件下，通过此封闭曲线的流量为零。或者说，在单连通区域内，若封闭曲线内无源、无汇，则通过封闭曲线的质量流量为零。

②若在单通域内，封闭曲线内有源或有汇，或是在多连通区域内，则流过封闭曲线的质量流量不为零，即：

$$Q_m = \rho \oint d\psi \neq 0$$



<IV> 不可压缩流体的平面势流

从 § 3.8 节我们已经知道, 在不可压缩 ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$) 的势流 ($\nabla \times \vec{v} = 0$) 中, 速度势函数 ϕ 满足拉普拉斯方程。我们将用流函数 ψ 表示的速度解代入 ($\nabla \times \vec{v} = 0$) 无旋条件中得:

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad \dots (3-10-8)$$

即流函数也满足拉氏方程, 且 ϕ 与 ψ 之间满足柯西——黎曼条件:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad \dots (3-10-9)$$

由复变函数理论知: ϕ 和 ψ 互为共轭调和函数, 且由 ϕ 和 ψ 构成的复变函数 $\omega(z) = \phi + i\psi$ 是复平面上复变量 $z = x_1 + ix_2$ 的解析函数。即 $\omega(z)$ 处处有完全确定的任意阶导数, 其中一阶导数为:

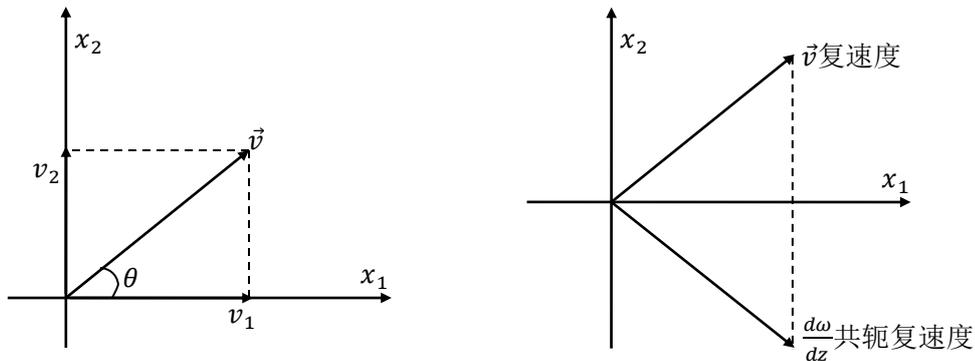
$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + i \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = v_1 - iv_2 = \bar{v}$$

或

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{1}{i} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - i \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = v_1 - iv_2 = \bar{v} \quad \dots (3-10-10)$$

引入复速度 $v = v_1 + iv_2$, 称 $\omega(z)$ 为复势, $\frac{d\omega}{dz}$ 为共轭复速度, 其模为 $|\bar{v}| = \left| \frac{d\omega}{dz} \right| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = v$, 给出了速度的大小, 幅角 θ 给出了 \vec{v} 与 x_1 轴之间的夹角。即有共轭复速度: (如下图, 引入复速度 $v = v_1 + iv_2$)

$$\text{共轭复速度: } \frac{d\omega}{dz} = v e^{-i\theta} = v(\cos \theta - i \sin \theta) = v_1 - iv_2$$



上式建立了复势与共轭复速度之间的关系。根据物理要求, 速度是单值函数, 因此共轭复速度也是单值解析函数。而速度势 ϕ 和流函数 ψ 则可以是多值函数, 因为 ϕ 和 ψ 加一个任意常数并不影响流体的运动。

若已知复势 $\omega(z)$, 则可由上式求复速度。反之, 若已知复速度, 则可由积分:

$$\omega(z) = \omega(z_0) + \int_{z_0}^z \frac{d\omega}{dz} dz \quad \dots (3-10-11)$$

给出复势。

复势 $\omega(z)$ 具有以下性质:

- ① $\omega(z)$ 可以差一个任意常数而不影响流体运动。

② $\omega(z) = \text{const}$ 等价于 $\phi(x_1, x_2) = \text{const}$, $\psi(x_1, x_2) = \text{const}$ 。它们分别代表等势线和流线, 且两者正交。

③:

$$\oint_L \frac{d\omega}{dz} dz = \oint_L d\omega = \oint_L (d\phi + id\psi) = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} + i \oint_L d\psi = \Gamma + i \frac{Q_m}{\rho} = \Gamma + iQ \quad \dots (3-10-12)$$

这里 $Q_m = \frac{m}{S \cdot t}$ (单位时间流过单位面积的流体质量, 称为质量流量);

而: $Q = \frac{Q_m}{\rho} (= \frac{V}{S \cdot t})$ (单位时间流过单位面积的流体体积, 称为体积流量)。

可见: 复速度沿复平面上封闭迴线 L 的积分, 其实部为沿 L 的速度环量, 虚部为通过 L 的体积流量。

另一方面, 由复变函数论中的留数定理知: 复速度在 L 上无奇点, 在 L 内有有限个奇点, 则由留数定理有:

$$\oint_L \frac{d\omega}{dz} dz = 2\pi i \sum_k A_k \quad \dots (3-10-13)$$

其中, A_k 是复速度在 L 内第 k 个奇点处的留数。特别, 若 L 内无源、汇, 则 $Q = 0$, 此时有:

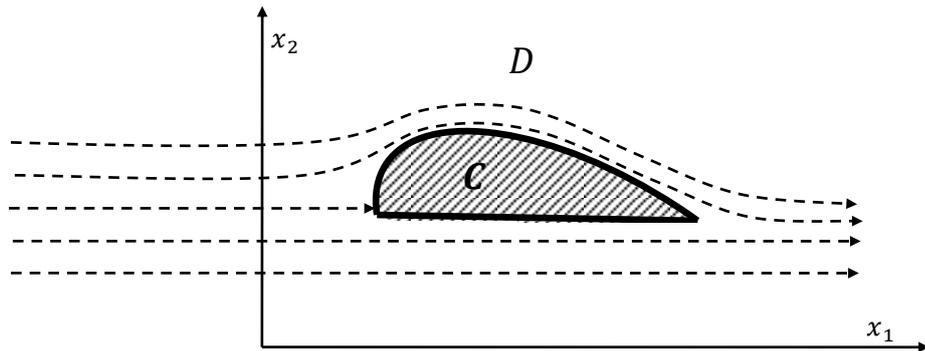
$$\Gamma = 2\pi i \sum_k A_k \quad \dots (3-10-14)$$

并且 A_k 必为纯虚数 (因 Γ 为实数)。

④ 在无源 ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$) 无涡 ($\nabla \times \vec{v} = 0$) 的单连通域内, $\omega(z)$ 是单值函数。在多连通域内或有源有涡的单连通域内, $\omega(z)$ 一般是多值函数。

<V> 理想不可压缩流体平面定常无旋运动问题的数学提法

分别以 $\phi(x_1, x_2)$, $\psi(x_1, x_2)$ 和 $\omega(z)$ 为未知函数, 将标题所述问题的数学提法分为三种, 我们以绕流问题为例分别说明。



设给定一平面物体 C , 在无穷远处有速度为 V_∞ 的均匀来流不脱体地绕流过此物体 (如图), 求此绕流问题的解。

$$(1) \begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} |_{C \text{上}} = 0 \quad (\text{边界上速度分量连续, 因物体 } C \text{ 固定, 故 } \frac{\partial \phi}{\partial n} |_{C \text{上}} = 0) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_1} |_{\infty \text{处}} = v_{1\infty}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_2} |_{\infty \text{处}} = v_{2\infty} \end{cases} \quad \dots (3-10-15)$$

$$(2) \begin{cases} \nabla^2 \psi = 0 \\ \psi|_{C上} = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \Big|_{\infty处} = v_{1\infty}, \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \Big|_{\infty处} = -v_{2\infty} \end{cases} \dots\dots (3-10-16)$$

$$(3) \begin{cases} \text{求在 } D + C \text{ 上连续, 在 } C \text{ 外的无界区域 } D \text{ 内解析的函数 } \omega(z) \\ \text{Im}\{\omega(z)|_{C上}\} = \psi = const \\ \frac{d\omega}{dz} \Big|_{\infty处} = \overline{V_\infty} \quad (\overline{V_\infty} \text{ 是无穷远处的共轭复速度}) (\overline{V_\infty} = v_{1\infty} - iv_{2\infty}) \end{cases} \dots\dots (3-10-17)$$

上述 (1)、(2) 两种提法是属于解偏微分方程的范畴, 第 (3) 种提法是属于复变函数求解解析函数的范畴。解拉氏方程只对一些边界形状比较简单的问题是成功的, 而复变函数法可以解决比较复杂的边界问题。所以, 我们在求解平面运动问题时, 主要用复变函数法。

<VI> 用复变函数法解平面无源、无旋定常运动

利用复变函数方法解平面问题, 主要用奇点法和保角映射方法。下面我们简单介绍奇点法。

我们知道共轭复速度是单值解析函数, 只要给定一个复势 $\omega(z) = \phi + i\psi$, 就对应有一个平面无源无旋运动。而任何一个解析函数 $\omega(z)$ 都可以代表一种平面无源无旋运动。奇点法的基本精神就是: 先研究一些具有简单流动图像的解析函数所代表的基本流动。根据解析函数的性质: 解析函数之和仍为解析函数, 则我们可以利用这些基本解析函数的任意组合去讨论更多更一般的平面无源无旋运动。

<一> 基本流动

① 线性函数:

$$\omega(z) = az \dots\dots (3-10-18)$$

其中 $a = a_1 + ia_2$ 是复常数。

由: $\omega(z) = \phi + i\psi = (a_1 + ia_2)(x_1 + ix_2) = (a_1x_1 - a_2x_2) + i(a_2x_1 + a_1x_2)$
可得:

$$\begin{aligned} \phi &= a_1x_1 - a_2x_2 \\ \psi &= a_2x_1 + a_1x_2 \end{aligned}$$

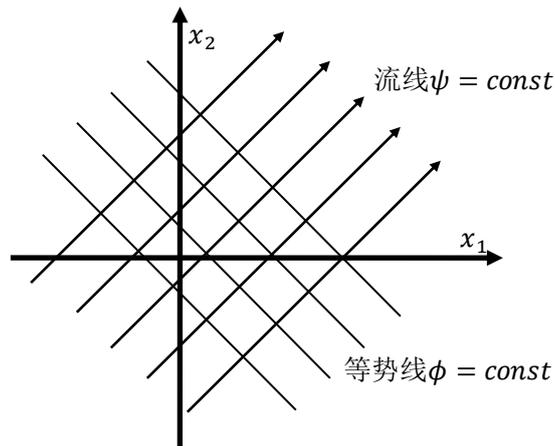
令: ϕ, ψ 分别等于 const, 得等势线和流线方程为:

$$\begin{aligned} \text{等势线: } x_2 &= \frac{a_1}{a_2} x_1 + C \\ \text{流线: } x_2 &= -\frac{a_2}{a_1} x_1 + D \end{aligned}$$

可见它们都是直线。且等势线的斜率为:

$$\tan^{-1}\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \quad \text{即: } \tan \alpha = \frac{a_1}{a_2}$$

而: $\tan(\alpha + 90^\circ) = -\cot \alpha = -\frac{a_1}{a_2}$ 正是流线的斜率, 所以等势线与流线是相互正交的两组直线 (见下图)。



其共轭复速度为:

$$\frac{d\omega}{dz} = a = a_1 + ia_2 = v_1 - iv_2 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = a_1 \\ v_2 = -a_2 \end{cases}$$

例如, 无穷远处均匀来流 $\vec{v}_\infty = v_{1\infty}\vec{e}_1 + v_{2\infty}\vec{e}_2 = a_1\vec{e}_1 - a_2\vec{e}_2$ 。

由此可见: 线性函数 $\omega(z) = az$ 对应的是均匀的平面无源无旋运动。(因 a_1, a_2 均为常数, 所以 $\nabla \cdot \vec{v} = 0, \nabla \times \vec{v} = 0$)

②对数函数 (点源或点汇)

$$w(z) = \frac{m}{2\pi} \ln z$$

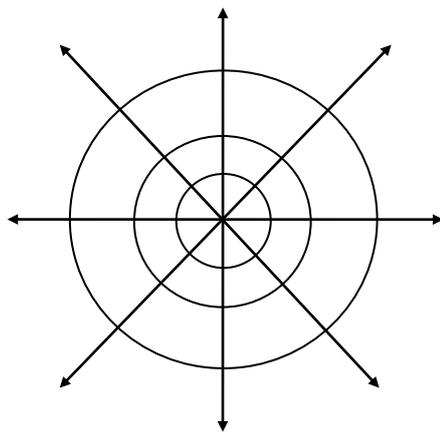
••• (3-10-19)

其中 m 为实数。分离 $w(z)$ 的实部和虚部, 有:

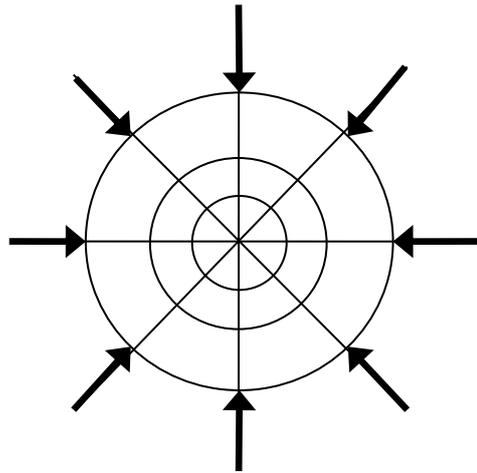
$$\phi = \frac{m}{2\pi} \ln r, \quad \psi = \frac{m}{2\pi} \theta$$

注*: 因用极坐标 r, θ 表示 $w(z) = \frac{m}{2\pi} \ln(re^{i\theta}) = \frac{m}{2\pi} [\ln r + i\theta] = \phi + i\psi$

令 $\phi = \text{const}$ 即 $r = \text{const}$, $\psi = \text{const}$ 即流线 $\theta = \text{const}$, 可见: 对数函数 $w(z) = \frac{m}{2\pi} \ln z$ 对应的流动的流线是从原点发出的 ($m > 0$) 或流向原点 ($m < 0$) 的射线族 (如图)。而等势线是以原点为圆心的圆族 ($r = \text{const}$)。



($m > 0$) 点源



($m < 0$) 点汇

共轭复速度为:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{m}{2\pi z} = \frac{m}{2\pi r e^{i\theta}} = \frac{m}{2\pi r} e^{-i\theta}$$

显然, $z = 0$ (即 $r = 0$) 是复速度函数的一个奇点。所以有:

$$\oint_L \frac{dw}{dz} dz = \oint_L \frac{m}{2\pi z} dz \xrightarrow{\text{留数定理}} 2\pi i \cdot \frac{m}{2\pi} = im = \Gamma + iQ$$

亦即:

$$\begin{cases} \Gamma = \oint_{L(\text{绕}o\text{点})} \vec{v} d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \text{无旋 (运动)} \\ Q = m \end{cases}$$

上式表明: 绕奇点 $z = 0$ 的任意封闭曲线 L 的速度环量为零, 而通过 L 的体积流量为 m 。当 $m > 0$ 时, 表示单位时间内有体积为 m 的流体从中心 ($r = 0$ 点) 流出; $m < 0$ 时, 表示单位时间内有体积为 m 的流体流入中心。前者称为“点源”, 后者称为“点汇”, $|m|$ 为源或汇的强度。

③对数函数 (点涡)

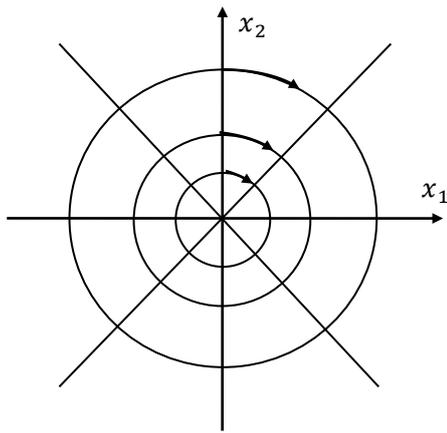
$$w(z) = \frac{n}{2\pi i} \ln z$$

..... (3-10-20)

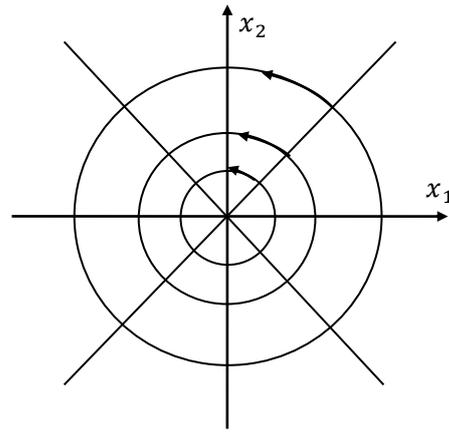
其中 n 为实数。分离 $w(z)$ 的实部和虚部得:

$$\phi = \frac{n}{2\pi} \theta, \quad \psi = -\frac{n}{2\pi} \ln r$$

显然, 上式表示流线 ($r = \text{const}$) 是以原点为圆点的圆族。等势线 ($\theta = \text{const}$) 是过圆点的射线族 (见图)。



$\Gamma < 0$ 顺时针点涡运动



$\Gamma > 0$ 逆时针点涡运动

复速度为: $\frac{dw}{dz} = \frac{n}{2\pi iz}$

显然, $z = 0$ 是复速度函数的奇点, 所以有:

$$\oint_L \frac{dw}{dz} dz = \oint_L \frac{n}{2\pi iz} = 2\pi i \cdot \frac{n}{2\pi i} = n = \Gamma + iQ$$

亦即:

$$\begin{cases} \Gamma = n \neq 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{v} \neq 0 \text{ 奇点导致有旋 (运动)} \\ Q = 0 \end{cases}$$

上式表明: 围绕奇点 ($z = 0$) 的任意封闭曲线 L 的速度环量为 n , 而通过 L 的流量为零。
由:

$$\Gamma = \oint_{L(\text{绕}o\text{点})} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S} = n \neq 0$$

可知, 点 O 处流体涡量 $\vec{\Omega} \neq 0$ 。把 $w(z) = \frac{n}{2\pi i} \ln z$ 表示的流动称为“点涡”。 $\Gamma = n$ 称为点涡强度。按规定: $\Gamma > 0$ 为逆时针的点涡运动, $\Gamma < 0$ 为顺时针的点涡运动。

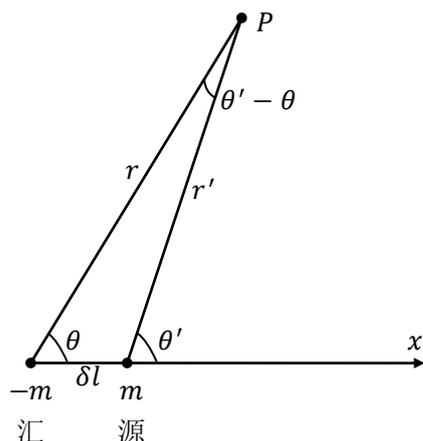
在点源位置处 $\nabla \cdot \vec{v} \neq 0$, 在点涡涡心处 $\nabla \times \vec{v} \neq 0$, 当 $r \rightarrow 0$ 时, 它们的速度均以 $\frac{1}{r}$ 速率趋于无穷大。点源 (或汇)、点涡是速度场的两类基本的奇点。除奇点外, 流场是无源无旋的。

④ 倒数函数

$$w(z) = \frac{C}{z}$$

..... (3-10-21)

其中 C 为复常数。可以证明: 复势 $w(z) = \frac{C}{z}$ 代表的是平面上强度相等的一个点源和一个点汇构成的偶极子流动。



证：根据解析函数的性质，点源和点汇场的迭加仍是解析函数，不妨取：

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{m}{2\pi} \ln z' - \frac{m}{2\pi} \ln z = \frac{m}{2\pi} [\ln(r'e^{i\theta'}) - \ln(re^{i\theta})] \\ &= \frac{m}{2\pi} [(\ln r' - \ln r) + i(\theta' - \theta)] = \phi + i\psi \end{aligned}$$

如图，取由汇到源的连线方向为极轴方向，考察平面上任意一点P的流动。由几何关系，有：

$$r - r' \doteq \delta l \cos \theta \ll r$$

而P点的速度势为：

$$\phi = \frac{m}{2\pi} (\ln r' - \ln r) = \frac{m}{2\pi} \ln \left(1 - \frac{r - r'}{r} \right)$$

将 $\ln \left(1 - \frac{r - r'}{r} \right)$ 展开，略去二阶以上高阶小量得：

$$\phi \doteq -\frac{m}{2\pi} \cdot \frac{r - r'}{r} = -\frac{m}{2\pi} \cdot \frac{\delta l \cos \theta}{r} = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{r}$$

其中： $M = m\delta l$ 为偶极子强度。

又P点的流函数为：

$$\psi = \frac{m}{2\pi} (\theta' - \theta)$$

注意到：

$$r(\theta' - \theta) \doteq \delta l \sin \theta$$

所以：

$$\psi \doteq \frac{m\delta l}{2\pi} \cdot \frac{\sin \theta}{r} = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\sin \theta}{r}$$

亦即：

$$\omega(z) = \phi + i\psi = -\frac{M}{2\pi r} (\cos \theta - i \sin \theta) = -\frac{M}{2\pi r} e^{-i\theta} = -\frac{M}{2\pi r e^{i\theta}} = -\frac{M}{2\pi z}$$

由上式可见：倒数函数 $\omega(z) = \frac{C}{z}$ 代表偶极子产生的流动，其中 $C = -\frac{M}{2\pi}$ 。
我们再来看偶极子产生的流线、等势线及速度分布。
因为：

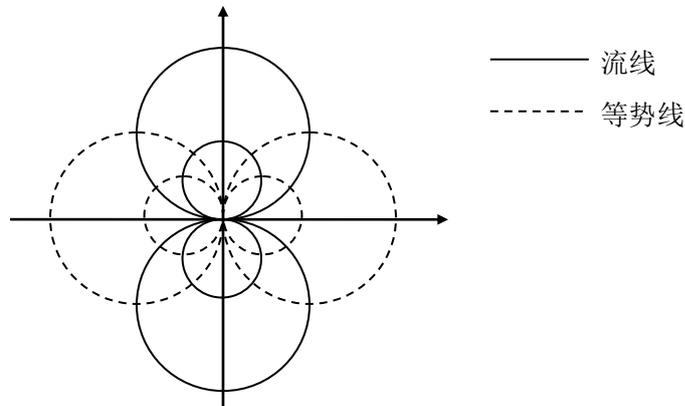
$$\omega(z) = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{z} = -\frac{M}{2\pi r} (\cos \theta - i \sin \theta) = \phi + i\psi$$

所以：

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{r} = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ \psi &= \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\sin \theta}{r} = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \end{aligned}$$

令： ϕ, ψ 等于 $const$ ，得：

等势线： $x_1^2 + x_2^2 + Cx_1 = 0$ ，其代表圆心在 x_1 轴且通过原点的圆族；流线： $x_1^2 + x_2^2 - Cx_2 = 0$ ，其代表圆心在 x_2 轴且通过原点的圆族，这两个圆族在交点处显然是正交的。



共轭复速度为：

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{z^2} = \frac{M}{2\pi r^2} e^{-2i\theta}$$

速度大小为：

$$\left| \frac{d\omega}{dz} \right| = \left| \frac{M}{2\pi r^2} \right|$$

显然，当 $r \rightarrow 0$ 时，偶极子流动的速度以 $\frac{1}{r^2}$ 的规律趋于无穷大，随着 r 的增加，偶极子流的速度逐渐减小，直至 $r \rightarrow \infty$ 时，其趋于零。

另外，由包围奇点 $z = 0$ 的线积分

$$\oint_{L \text{ (包围 } z=0 \text{ 点)}} \frac{d\omega}{dz} dz = \oint_L \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{z^2} dz \xrightarrow{\text{复速度是单值函数}} 0 = \Gamma + iQ$$

可知，绕奇点 $z = 0$ 的（即包围偶极子的）廻线的速度环量和流量均为零。这是显然的，因为 L 内无涡，所以 $\Gamma = 0$ ；另外，由点源流出的流体又全部流入点汇，一进一出，净流量等于零。以上均是偶极子位于原点的结果。

若偶极子不在原点，而在 $z = z_0$ 点，则复势为

$$\omega(z) = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{z - z_0}$$

⑤幂函数

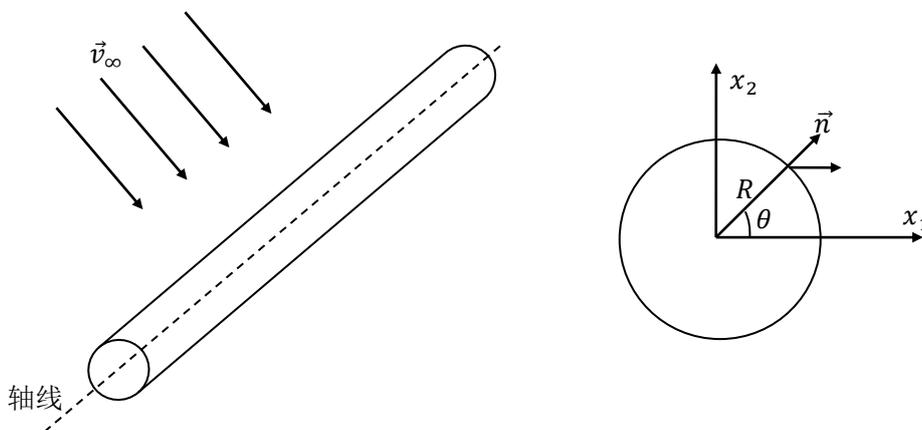
$$\omega(z) = Az^n \quad \dots (3-10-22)$$

其中 A 与 n 均为实数。其对应的是所谓绕角流动。(略, 详见吴望一《流体力学》下册 $P_{41\sim 42}$)

〈二〉基本流动的组合(平面无旋绕流)

作为基本流动的组合一个例子, 我们来讨论圆柱定常无环量绕流问题。这个问题在实际中经常遇到。例如气流绕过电线的流动, 河水绕圆柱形桥墩的流动。

设有一“无限长”, 半径为 R ($R \ll$ 柱长 l) 的圆柱体, 浸没于均匀流速为 \vec{v}_∞ (无穷远处的均匀来流, 且垂直于柱体轴线) 的流体中。取固定于柱体上的坐标系作为考察这个运动的参照系, 观察到的流动叫做平面绕流。这是因为柱体“无限长”, 所以在垂直于它的轴线的各平面上具有同样的流动情况。



当一个圆柱体沿着垂直于它的轴线方向在本来静止的流体中以恒定速度运动时, 则在柱体上观察到的流动是与上述流动完全等效的。由于初始流体是静止的, 且柱体本身不旋转, 所以由圆柱体运动引起流体作无旋运动 (即 $\Gamma = 0$)。

由(3-10-17)知: 无穷远处均匀来流 (设为 $\vec{V}_\infty = v_{1\infty}\vec{e}_1 + v_{2\infty}\vec{e}_2$) 不脱体地绕圆柱流动, 则未知函数 $\omega(z) = \phi + i\psi$ 中的虚部, 即流函数 ψ 在圆柱体上满足:

$$\begin{cases} \psi = \text{const} \quad (r = R \text{ 上}) \\ \left. \frac{d\omega}{dz} \right|_\infty = \vec{V}_\infty = v_{1\infty} - iv_{2\infty} \quad (\vec{V}_\infty \text{ 为无穷远处的共轭复速度}) \end{cases} \quad \dots (3-10-23)$$

因共轭复速度 $\frac{d\omega}{dz}$ 在圆柱体外是单值解析函数 (正则函数), 所以按罗朗定理, 复速度可展开成罗朗级数为:

$$\frac{d\omega}{dz} = \vec{V}_\infty + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \frac{C_3}{z^3} + \dots = \vec{V}_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{z^k} \quad \dots (3-10-24)$$

积分上式得:

$$\omega(z) = \bar{V}_\infty z + C_1 \ln z - \frac{C_2}{z} - \frac{C_3}{2z^2} + \dots \quad \dots (3-10-25)$$

为了确定复系数 $C_k = A_k + iB_k$ ，将上式的虚部（即 ψ ）分离出来，通过与 (3-10-23) 比较来确定 C_k ，分离出的虚部为：

$$\psi = v_{1\infty}x_2 - v_{2\infty}x_1 + A_1\theta + B_1 \ln r + \frac{A_2 \sin \theta - B_2 \cos \theta}{r} + \frac{A_3 \cos 2\theta - B_3 \sin 2\theta}{2r^2} + \dots \quad \dots (3-10-26)$$

注意到： $x_1 = r \cos \theta$ ， $x_2 = r \sin \theta$ ；当 $r = R$ 时（在柱面上），比较 (3-10-26) 与 (3-10-23) 的第一式，可得：

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -v_{1\infty}R^2, \quad B_2 = -v_{2\infty}R^2, \quad A_k = B_k = 0 \quad (\text{当 } k = 3, 4 \dots)$$

至于 B_1 ，它取决于流动是否有旋（由对数函数表示的基本流动知： $\psi = -\frac{n}{2\pi} \ln r$ 的系数 $n \neq 0$ ，表示为有旋运动），若流动无旋，则 $B_1 = 0$ ；若流动有旋，则 $B_1 = -\frac{n}{2\pi} = -\frac{\Gamma}{2\pi}$ 。

现在我们讨论的是平面无旋运动，所以 $B_1 = 0$ 。

将上面所确定的系数代入 (3-10-25) 式，得圆柱的平面无旋绕流的普遍解为：

$$\omega(z) = \bar{V}_\infty z + \frac{R^2}{z} V_\infty \quad \dots (3-10-27)$$

$\bar{V}_\infty = v_{1\infty} - iv_{2\infty}$ 与 $V_\infty = v_{1\infty} + iv_{2\infty}$ 为无穷远处互为共轭复数。

若来流沿 x_1 轴向，即 $v_{2\infty} = 0$ ，则有 ($\bar{V}_\infty = v_{1\infty}$ ， $V_\infty = v_{1\infty}$)：

$$\omega(z) = v_{1\infty}z + \frac{1}{z}R^2v_{1\infty} = v_{1\infty}\left(z + \frac{R^2}{z}\right), \quad |z| \geq R \quad \dots (3-10-28)$$

上式给出了无穷远处速度为 $\bar{v}_\infty = v_{1\infty} \bar{e}_1$ 的均匀来流绕半径为 R 的圆柱流动的复势。该流动是由均匀流和偶极子流的叠加所构成的。

从 (3-10-28) 式中将流函数分离出来，有：

$$\psi = v_{1\infty}x_2 - v_{1\infty}R^2 \cdot \frac{x_2}{x_2^2 + x_1^2} \quad \dots (3-10-29)$$

令： $\psi = \text{const}$ ，得：

$$v_{1\infty}x_2 - v_{1\infty}R^2 \cdot \frac{x_2}{x_2^2 + x_1^2} = \text{const} \quad \dots (3-10-30)$$

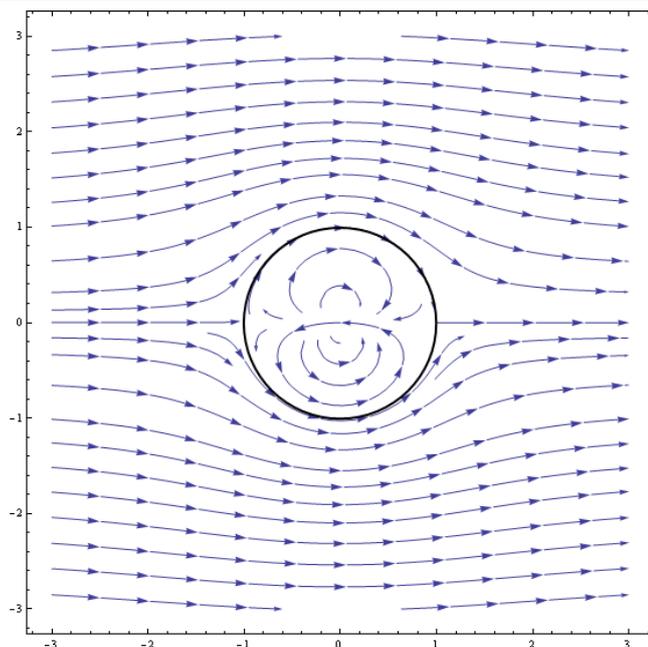
可见流线是一族三次方程所代表的曲线，其中零流线为：

$$v_{1\infty}x_2 \left(1 - \frac{R^2}{x_2^2 + x_1^2}\right) = 0$$

亦即：

$$x_2 = 0 \quad \& \quad x_2^2 + x_1^2 = R^2 \quad \dots (3-10-31)$$

前者是 x_1 轴，后者是圆柱面上的圆周线（下图中绕线所示）。其流动图像如下图所示。



应用 Mathematica7 所作来流沿 x_1 轴向、圆柱半径为 1、 $v_{1\infty} = 1$ 时的流动图像。可以看到圆柱内为偶极子流。

由图可见，绕圆柱流动的理论图像是对称的。
现在我们来计算圆柱面上的速度分布、压力分布及圆柱所受的力。
由 (3-10-28) 式可得共轭复速度为：

$$\frac{d\omega}{dz} = v_{1\infty} \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) \quad \dots (3-10-32)$$

在圆柱面上有 $z = R(\cos \theta + i \sin \theta) = R e^{i\theta}$ ，所以圆柱面上有：

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dz} \Big|_{z=R e^{i\theta}} &= v_{1\infty} \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) \Big|_{z=R e^{i\theta}} = v_{1\infty} (1 - e^{i2\theta}) \\ &= v_{1\infty} ((1 - \cos 2\theta) + i \sin 2\theta) \end{aligned} \quad \dots (3-10-33)$$

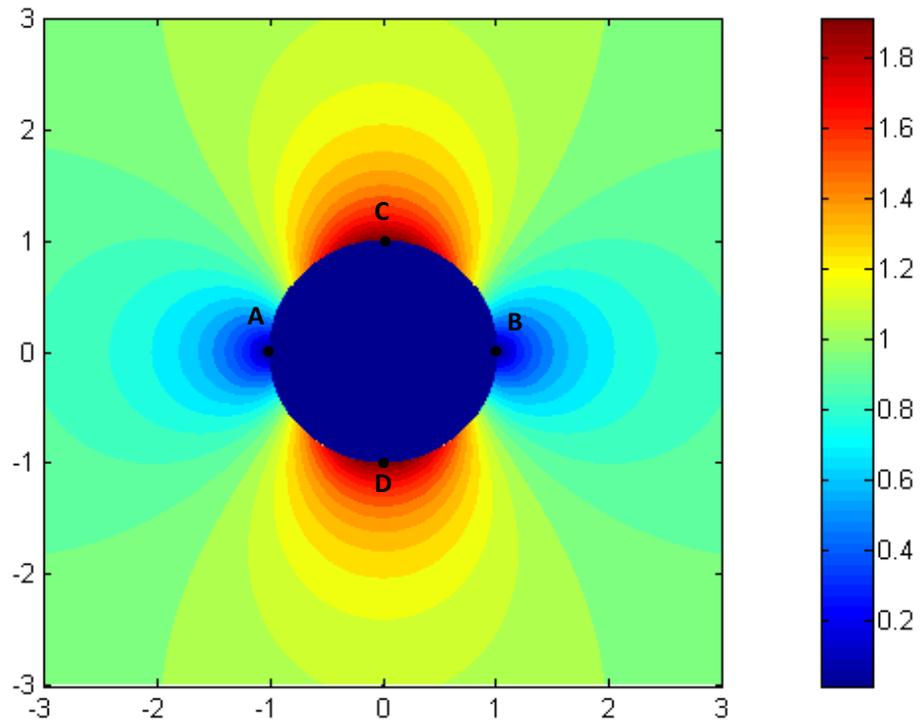
因为共轭复速度的实部和虚部的平方和就是速度的平方，所以在圆柱周边上的速度分布为：

$$|v| = v_{1\infty} \sqrt{(1 - \cos 2\theta)^2 + (\sin 2\theta)^2} = 2v_{1\infty} \sin \theta \quad \dots (3-10-34)$$

上式表明：圆柱周边上的速度分布按正弦规律。当流体质点处于 A 点时， $\theta = \pi$ ， $|v| = 0$ 。当其沿着圆周流动到 C 点时， $\theta = \frac{\pi}{2}$ ， $|v|$ 达到最大为

$$|v|_{\max} = 2v_{1\infty} \quad \dots (3-10-35)$$

当继续流动到 B 点时， $\theta = 0$ ， $|v| = 0$ （见下图）。所以 A、B 两点为驻点。



利用 Matlab7.0 所绘圆柱半径为 1、 $v_{1\infty} = 1$ 时的速率标量场

有了速度分布，我们可利用伯努利积分来计算圆柱面上的压力分布。按伯努利方程有：

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 = \frac{P_\infty}{\rho} + \frac{1}{2}v_\infty^2$$

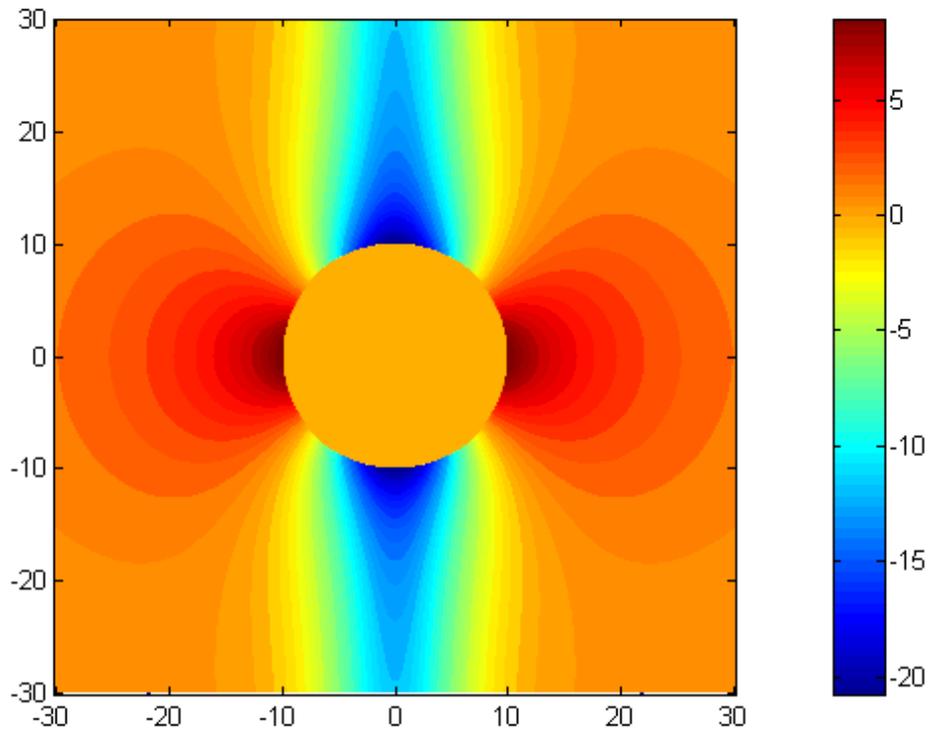
现在无穷远处流体速度为 $\vec{v}_\infty = v_{1\infty}\vec{e}_1$ ，即 $v_\infty^2 = v_{1\infty}^2$ ，而：

$$v^2 = |\vec{v}^2| = (2v_{1\infty} \sin \theta)^2 = 4v_{1\infty}^2 \sin^2 \theta$$

所以：

$$P = P_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 (1 - 4\sin^2 \theta)$$

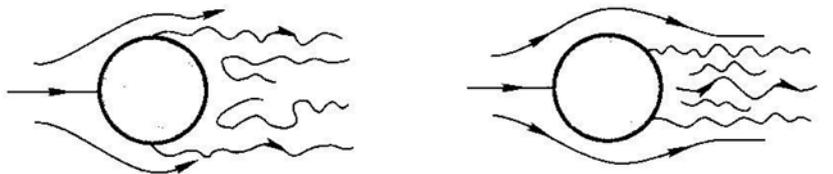
•••• (3-10-36)



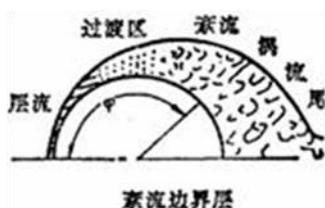
利用 mathematica7 解 navier-stokes 方程,并用 matlab7.0 所绘的圆柱半径为 10m 的压力标量场。

上式给出了柱面上的压力分布。由压力分布图可见压力分布对 x_1 轴和 x_2 轴都是对称的。所以圆柱所受的合力为零,即绕圆柱的流动对圆柱体既没有垂流方向的升力,也没有逆流方向的阻力。没有升力是与实际相符合的,但不受阻力却与实际不符。这就是流体力学中著名疑题——“达朗伯佯谬”。引起这不合理结论的原因是没有考虑粘性对圆柱所产生的摩擦阻力和由于边界层分离所产生的压差阻力。

实验结果与理论结果的流动图像相差甚远。



不同实验条件下的不同脱体绕流



第四章 粘性流体力学一般理论

§4.1 粘性流体

我们知道：自然界真实流体都是具有粘性、热传导性、扩散性等分子运动的输送性质。我们上一章所讨论的理想流体只是真实流体在某些条件下的近似。真实流体与理想流体的主要区别在于：①在速度分布不均匀的流场中，粘性流体质点间有剪切力的作用，而理想流体没有；②在温度分布不均匀的流场中，粘性流体质点间有热量传递，而理想流体没有；③粘性流体是粘附在固体壁上的，即在固体与流体的交界面上，要求流体的速度与固体的速度相同，而理想流体在固壁面上可以发生相对“滑移”；④粘性流体在固壁面上具有与固壁相同的温度，而理想流体在固壁面上与固壁之间可以有“温度跃变”。

另外，理想流体运动是绝热的，过程是可逆的，而真实流体运动一般不是绝热的，过程一般是不可逆的。

我们在第二章上给出的流体力学基本方程组，是一组非线性的偏微分方程。一般情况下，无论是用解析的方法或是数值的方法，去求解这一组完备的方程，都是一件非常困难的事情。因此，流体力学的一项基本任务，就是研究化简问题进而实现求解的各种方法。化简问题主要是从两方面着手，一是减少方程中变量的数目；二是简化方程的形式，包括探讨是否可能将方程组中的某些方程化简为线性方程。实际上，我们在前一章中已经涉及了这方面的工作。例如，在粘性力与惯性力相比小得多时，我们可以将真实的有粘性的流体近似地按理想的无粘性的流体来处理。又如，用均质不可压缩假设（即： $\rho = \text{const}$ ），不仅使方程组的未知变数减少了一个（密度 ρ ），而且连续性方程也被线性化了。

注：

$$\text{由} \begin{cases} \frac{D\rho}{Dt} = 0(\text{不可压缩}) \\ \nabla\rho = 0(\text{均质}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \text{const} \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}, \text{而 } \vec{v} = \nabla\phi \Rightarrow \nabla^2\phi = 0(\text{线性方程})$$

本章中，我们主要讨论不可压缩流动，即压缩性对流动的影响小到可以忽略不计的情况（更确切地说，是流体的密度变化对流动的影响可忽略不计的情况）。

§4.2 粘性流体的基本方程

为了看清方程简化的详细过程，我们先给出一般情况下的粘性流体的基本方程组。

<I> 粘性流体控制方程组

① 连续性方程：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0$$

•••• (4-2-1)

或

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{v}) = 0$$

•••• (4-2-1a)

② 运动方程 (动量方程):

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \rho \vec{F} + \nabla \cdot \vec{\sigma} = \rho \vec{F} - \nabla P + \nabla(\lambda \nabla \cdot \vec{v}) + \nabla(\mu \nabla \cdot \vec{v}) + \nabla^2(\mu \vec{v})$$

•••• (4-2-2)

③ 能量方程:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 + U \right) = \rho \vec{F} \cdot \vec{v} + \nabla \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{v}) + \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho q (\text{略去})$$

•••• (4-2-3)

上式可写为:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 + U \right) = v_i \frac{Dv_i}{Dt} + \frac{DU}{Dt} = v_i \left(F_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{\rho} \left[\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \right]$$

利用动量方程:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i$$

则能量方程可写为:

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)$$

•••• (4-2-4)

又应力张量:

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

所以:

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -P \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad \text{亦即:} \quad \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \left(-P \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

上式右边第一项表示流体体积变化时, 外压强在单位时间内对单位体积流体所做的功, 它引起机械能变成内能。但是, 这种转变是可逆的。第二项则表示流体变形时, 外部通过粘性力 (τ_{ij}) 对单位体积流体做功的功率, 这部分机械能向内能的转变是不可逆的。我们记:

$$\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \lambda \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2$$

注意到: $\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$ 且 $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ 是对称张量。

Φ 称为耗散函数。耗散函数反映了粘性过程造成的动能向热能的不可逆转变。因此，又热力学第二定律有：

$$\Phi > 0$$

另外我们知道（并应该记住！）， λ 和 μ 只是热力学状态的函数，而和速度场无关。因此：

(i) 对任意的不可压缩流体 ($\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$)，有：

$$\Phi = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 > 0$$

由此可知，对一切流体均有（因为 μ 主要与温度 T 有关，而与是否可压缩关系不大）：

$$\mu > 0$$

(ii) 对任意流体，当 $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} \neq 0$ ，且 $\epsilon_{ij} = 0 (i \neq j)$ 时，即在主轴系中有：

$$\Phi = \lambda \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 = 9 \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \epsilon_{11}^2 > 0$$

由此可知，对一切流体均有：

$$\mu' = \lambda + \frac{2}{3} \mu > 0$$

归纳 (i) (ii) 得：任何流体的第一粘性系数 μ 和第二粘性系数 μ' 一定是正数。

能量方程（4-2-4）可写成：

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + v_i \frac{\partial U}{\partial x_i} = -\frac{P}{\rho} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \Phi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \dots (4-2-5)$$

利用连续性方程 ($\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{v}) = 0$) 有：

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

和热力学关系式：

$$\omega = U + \frac{P}{\rho}$$

其中 ω 为单位质量流体的焓。

则（4-2-5）式可写成另一种形式

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + v_i \frac{\partial\omega}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{DP}{Dt} + \frac{1}{\rho} \Phi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad \dots (4-2-6)$$

将能量方程如此处理的好处是：①流体的焓这个量比内能更为有用；②分解出的 $\frac{DP}{Dt}$ 通常可以忽略。

$$\left[\text{注: } \frac{D}{Dt} \left(\frac{P}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{DP}{Dt} - \frac{P}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \right]$$

④本构方程：

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij} = -P\delta_{ij} + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} \quad \dots (4-2-7)$$

⑤状态方程：

$$P = f(\rho, T) \text{ 或 } F(P, \rho, T) = 0 \quad \dots (4-2-8)$$

以上方程组中独立变量是： v_i, P, ρ 和 U ， ω 和 T 可以由热力学关系式或状态方程写成为 P 和 ρ 的已知函数。而（运输系数） λ, μ, k 也是 P 和 ρ 的函数，这些函数的形式可由实验来确定。即已知：

$$\omega = \omega(P, \rho), \quad T = T(P, \rho), \quad \lambda = \lambda(P, \rho), \quad \mu = \mu(P, \rho), \quad k = k(P, \rho)$$

上述方程组是完备的。但是由以上各方程可见：基本变数 v_i, P, ρ, T 使得各方程互相耦合，必须联立求解，这在数学上是相当复杂的。一般情况下，以为 λ 和 μ 均是温度 T 的函数，从而使得动力学量 P 与运动学量 \vec{v} 和热力学量 T 相互影响。当温度变化不大时， λ 和 μ 可近似视为常数，若同时流体的压缩性（ $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ ）影响可忽略，则方程（4-2-2）可简化为：

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{v}$$

上式中： $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ 称为运动粘性系数。 μ 称为动力学粘性系数。上式就是著名的维纳叶—斯托克斯方程，简称NS方程。但若当温度变化不大时（ λ, μ 可视为const）且压缩性对流动的影响可以忽略时，方程组将大大简化。

<II> 粘性流体不可压缩流动控制方程组（当温度变化不大时）

① 连续性方程

根据非线性的连续性方程 $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$ ，由不可压缩假设 $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ （注意： $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ 这是不可

压缩流动条件，从 $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\rho$ ，可见 $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ 并不要求 $\rho = const$ ，而 $\rho = const$ 的流体一定满足 $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ ），则：

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

•••• (4-2-9)

这是一个关于速度的线性方程。可见不可压缩假设的一大功效就是将原来非线性的连续性方程，变成了一个线性方程。所以，密度均匀不可压缩流动是一个更强的假设。(4-2-9)式称为不可压缩流动的连续性方程。

② 运动方程 (动量方程)

对方程 (4-2-2) 令 λ, μ 为 $const$, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v}$$

•••• (4-2-10)

式中: $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ 称为运动粘性系数, μ 为动力学粘性系数。

(4-2-10) 式就是著名的 *Navier-Stokes* 方程, 简称 *NS* 方程。

一、当密度为常数时, (4-2-9) 和 (4-2-10) 就构成了完备的均匀粘性不可压缩流动的控制方程组。这时, 能量方程和连续性方程、动量方程不发生耦合, 我们可以先求解速度场 (见下面的“注*”), 然后再单独求解能量方程而得出温度场。此时, 能量方程 (4-2-5) 中的内能项可写成:

$$\frac{DU}{Dt} = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{\rho} \frac{DT}{Dt} + \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \right)_{T} \frac{D\rho}{Dt} = C_v \frac{DT}{Dt}$$

($\frac{D\rho}{Dt} = 0$ 为不可压缩流体)

于是, 能量方程就成为关于变量 T 的一个单变量偏微分方程, 为:

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = \rho C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T \right) = \Phi + k \nabla^2 T$$

•••• (4-2-11)

这里速度场确定后, Φ 就确定了。

二、当密度不是常数时 (即对应非均匀, 不可压缩粘性流)

此时除 (4-2-9) 和 (4-2-10) 外, 还需补充 $\frac{D\rho}{Dt} = 0$, 才可构成完备方程组。这种情况也是属于 v_i, p 和 T 解耦的情况。

<III> 初、边条件

此略, 见第二章。

注*: 重力场中 ($\vec{F} = \nabla \varphi$) 均质 ($\rho = const$) 粘性不可压缩 (即: $\frac{D\rho}{Dt} = 0$) 流动的控制方程组为:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0 & \text{--- 连续性方程} \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} & \text{--- NS 方程} \end{cases}$$

由矢量分析公式： $\frac{1}{2}\nabla v^2 = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ 和 $\nabla \times \frac{1}{2}\nabla v^2 \equiv 0, \nabla \times \frac{1}{\rho}\nabla p \equiv 0, \nabla \times \nabla \phi \equiv 0$

对 NS 方程两边求旋度，并利用上述关系得： $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{v}) = \nabla \times [\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})] + \nu \nabla^2(\nabla \times \vec{v})$

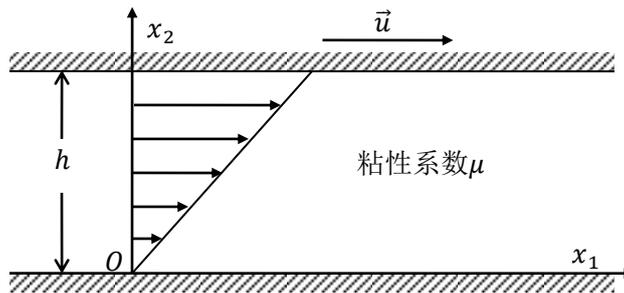
这时控制方程组化为：
$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{v}) = \nabla \times [\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})] + \nu \nabla^2(\nabla \times \vec{v}) \end{cases}$$

§ 4.3 不可压缩粘性流的几个简单精确解

NS 方程是一个二阶的非线性偏微分方程。一般情况用解析法求解这个方程，在数学上有很大困难。目前所得到的解析解，都是某些具体流动问题的解，这些具体问题之所以可求得解析解，是因为它们存在一定的对称性。下面，我们介绍几个最简单的例子，它们是可以线性化的定常粘性流动方程的解。

<I> 平板库艾特 (Couette) 流

两块互相平行的无限大平板，之间充满不可压缩的粘性流体。其中一板相对另一板以平行于自身的恒定速度 \vec{u} 运动。假设两板距离为 h ，且流体运动已达到定常状态，求平板间流体的运动，忽略体力 \vec{F} 。



解：如图取一直角系，让静止板与 ox_1x_3 平面重合，另一平板的运动方向取作 x_1 轴方向， x_2 轴与板平面垂直。由问题的对称性，应当有：

$$v_1 = v_1(x_2), v_2 = v_3 = 0, P = P(x_2)$$

对这组速度分量，显然连续性方程 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ 是满足的。此时， x_1 方向的 NS 方程退化为：

$$\frac{d^2 v_1}{dx_2^2} = 0 \Rightarrow v_1 = ax_2 + b$$

x_2 方向的 NS 方程退化为：

$$\frac{dP}{dx_2} = 0 \Rightarrow P = const$$

由无滑移边界条件： $x_2 = 0$ 时， $v_1 = 0$ ； $x_2 = h$ 时， $v_1 = u$ 可确定：

$$a = \frac{u}{h}, b = 0$$

于是:

$$v_1 = \frac{u}{h}x_2$$

•••• (4-3-1)

可见平板 *Couette* 流的速度分布是线性的。

定义平均流速为:

$$\bar{v} = \frac{1}{h} \int_0^h v_1 dx_2 = \frac{1}{2}u$$

•••• (4-3-2)

我们可以写出平板所受到的流体作用力。考虑板面上任一面元 $\vec{n}dS$ (\vec{n} 是流体界面的外法向单位矢) 上所受作用力。由动量定理知: 流动流体作用在 $\vec{n}dS$ 上的作用力应等于通过这个面元的动量分量, 即:

$$df_i = \Pi_{ik}dS_k = (\rho v_i v_k - \sigma_{ik})dS_k$$

•••• (4-3-3)

注: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial}{\partial x_k} \Pi_{ik}$

其中 Π_{ik} 是单位时间内流过垂直于 x_k 轴的单位面积的第 i 个动量分量, 即动量通量密度张量。 df_i 是流体对板面作用力的第 i 个分量。

把 dS_k 写成 $dS_k = n_k dS$, 考虑到在板面上有边界条件:

$$\vec{v}_{\text{流}} = \vec{v}_{\text{板}} = \begin{cases} 0, & (x_2 = 0) \\ \vec{u}, & (x_2 = h) \end{cases}$$

又: $\vec{n} \perp \vec{v}$, 所以有 $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, 即流动流体对板面只运输动量的横向分量 ($-\sigma_{ik}n_k$), 由此我们得到作用在单位面积上的力 \vec{P} 为:

$$\vec{P} = \frac{d\vec{f}}{dS} = P_1 \vec{e}_1 (\text{剪切力}) + P_2 \vec{e}_2 (\text{压力})$$

•••• (4-3-4)

而 \vec{P} 的第 i 个分量为:

$$\begin{aligned} P_i &= -\sigma_{ik}n_k = -(-P\delta_{ik} + \tau_{ik})n_k = Pn_i - \tau_{ik}n_k = Pn_i - \left(\lambda \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ik} \right) n_k \\ &= (P - \lambda \nabla \cdot \vec{v})n_i - 2\mu \dot{\epsilon}_{ik}n_k \end{aligned}$$

•••• (4-3-5)

注: 对不可压缩流体 $\tau_{ij} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}$ 。

(4-3-5) 式结果中第一项是普通的流体压力 (P) 加上由流体胀缩引起的附加压力 ($\lambda \nabla \cdot \vec{v}$), 第二项是由于粘性引起的作用在板面上的摩擦力。

$$\text{注意到} \left\{ \begin{array}{l} \text{在 } x_2 = 0 \text{ 板上, } n_2 = -1, n_1 = n_3 = 0 \\ \text{在 } x_2 = h \text{ 板上, } n_2 = +1, n_1 = n_3 = 0 \\ \text{而: } v_1 = v_1(x_2) = \frac{u}{h} x_2, v_2 = v_3 = 0 \\ \text{所以: } \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \equiv 0 \text{ (平板库艾特流是不可压缩的)} \end{array} \right.$$

由 (4-3-5) 式, 显然有:
在下板上:

$$\begin{aligned} P_1 &= -2\mu(\dot{\epsilon}_{11}n_1 + \dot{\epsilon}_{12}n_2 + \dot{\epsilon}_{13}n_3) = -2\mu\dot{\epsilon}_{12}n_2|_{\text{在 } x_2=0 \text{ 板上}(n_2=-1)} = 2\mu\dot{\epsilon}_{12} \\ &= 2\mu \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) = \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \mu \frac{dv_1}{dx_2} = \mu \frac{u}{h} \\ P_2 &= Pn_2|_{\text{在 } x_2=0 \text{ 板上}(n_2=-1)} = -P \end{aligned}$$

在上板上:

$$\begin{aligned} P_1 &= -2\mu(\dot{\epsilon}_{11}n_1 + \dot{\epsilon}_{12}n_2 + \dot{\epsilon}_{13}n_3) = -2\mu\dot{\epsilon}_{12}n_2|_{\text{在 } x_2=h \text{ 板上}(n_2=1)} = -2\mu\dot{\epsilon}_{12} = -\mu \frac{u}{h} \\ P_2 &= Pn_2|_{\text{在 } x_2=h \text{ 板上}(n_2=1)} = P \end{aligned}$$

综合有:

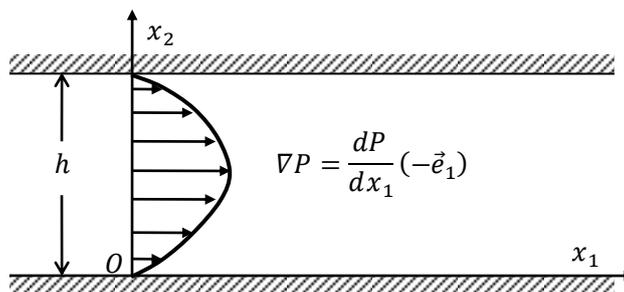
$$\vec{P} = P_1\vec{e}_1 + P_2\vec{e}_2 = \begin{cases} +\mu \frac{u}{h} \vec{e}_1 - P\vec{e}_2, & \text{在下板} \\ -\mu \frac{u}{h} \vec{e}_1 + P\vec{e}_2, & \text{在上板} \end{cases} \quad \dots (4-3-6)$$

另外还可求得质量通量:

$$Q = \int_0^h \rho v_1 dx_2 = \int_0^h \rho \cdot \frac{u}{h} x_2 dx_2 = \rho \cdot \frac{u}{h} \cdot \frac{1}{2} x_2^2 \Big|_0^h = \rho h \cdot \frac{1}{2} u = \rho h \bar{v} \quad \dots (4-3-7)$$

<II> 平板泊肖叶 (Poiseuille) 流

两固定且相互平行的无限大平板中充满不可压缩的粘性流体, 流体中作用一个与板平面平行的压力梯度。设流动处于定常状态, 求流体的运动。



解：选择如图所示平面坐标系。流体运动方向（即压力梯度的反方向）取为 x_1 轴方向。由问题的对称性，应该有：

$$v_1 = v_1(x_2), \quad v_2 = v_3 = 0, \quad P = P(x_1, x_2)$$

上述速度分量显然也是满足连续性方程 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ 的。
此时， x_2 方向的 NS 方程退化为

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = 0 \implies P = P(x_1)$$

即 P 是 x_1 的单变量函数。
 x_1 方向的 NS 方程退化为：

$$\frac{d^2 v_1}{dx_2^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx_1} = \text{const}$$

这里，因方程两边分别是 x_2 和 x_1 的单变量函数，故只能等于同一个常数。
解上方程得：

$$v_1 = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx_1} x_2^2 + ax_2 + b$$

由无滑移边界条件： $x_2 = 0$ 时， $v_1 = 0$ ； $x_2 = h$ 时， $v_1 = 0$ 可以求得：

$$a = -\frac{h}{2\mu} \frac{dP}{dx_1}, \quad b = 0$$

所以：平板泊肖叶流的速度分布为：

$$v_1 = -\frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx_1} \left[\frac{h^2}{4} - \left(x_2 - \frac{h}{2} \right)^2 \right]$$

•••• (4-3-8)

接下来容易求得：

①最大速度（由 $\frac{dv_1}{dx_2} = 0$ 求得相应 v_{max} 的 x_2 值为 $x_2 = \frac{h}{2}$ ）

$$v_1|_{x_2=\frac{h}{2}} = v_{max} = -\frac{h^2}{8\mu} \frac{dP}{dx_1} \quad \dots (4-3-9)$$

②平均速度

$$\bar{v} = \frac{1}{h} \int_0^h v_1 dx_2 = \frac{2}{3} v_{max} \quad \dots (4-3-10)$$

③质量流量

$$Q = \int_0^h \rho v_1 dx_2 = \frac{2}{3} \rho h v_{max} \quad \dots (4-3-11)$$

④剪切应力

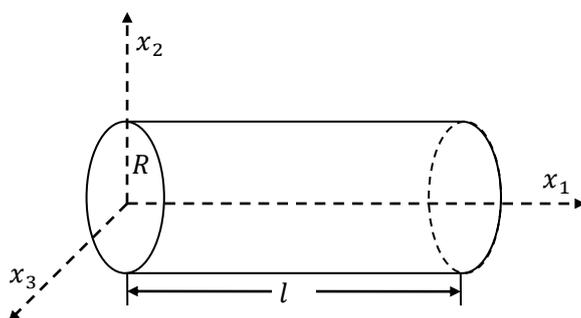
$$P_1 = \begin{cases} \mu \frac{dv_1}{dx_2} = \left(x_2 - \frac{h}{2}\right) \frac{dP}{dx_1} \Big|_{x_2=0} = -\frac{h}{2} \frac{dP}{dx_1} \\ -\mu \frac{dv_1}{dx_2} = -\left(x_2 - \frac{h}{2}\right) \frac{dP}{dx_1} \Big|_{x_2=h} = -\frac{h}{2} \frac{dP}{dx_1} \end{cases} \quad \dots (4-3-12)$$

而上下板所受压力仍是 P ，所以平板泊肖叶流对单位面积板面的作用力为：

$$\vec{P} = P_1 \vec{e}_1 + P_2 \vec{e}_2 = -\frac{h}{2} \frac{dP}{dx_1} \vec{e}_1 \pm P \vec{e}_2 \quad \dots (4-3-13)$$

<III> 圆管泊肖叶流（也可以是任意等横截面的管道）

在半径为 R 的等横截面圆管内，充满不可压缩的粘性流体。设在相距为 l 的两个管截面上，作用一个恒定的压力差 ΔP ，管内流动已处于定常状态，求管内的流动。



解：可以取一柱坐标系 (r, φ, x_1) ，令 x_1 轴与管轴重合， $r\varphi$ 平面与管轴垂直（亦即 ox_2x_3 平面），设流动沿 x_1 轴方向。由问题的对称性，应该有：

$$v_r = v_\varphi = 0, \quad v_{x_1} = v_{x_1}(x_2, x_3) = v_{x_1}(r), \quad P = P(x_1)$$

上述速度分量显然满足连续性方程 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ 。

此时，NS 方程的 x_1 分量方程给出：

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_{x_1}}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx_1} = \text{const}$$

方程左边是关于 x_2 、 x_3 的函数，方程右边是关于 x_1 的函数，所以方程两边应等于同一个常数。

注：柱坐标系下的拉普拉斯算符： $\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}$ 。

而：

$$\frac{dP}{dx_1} = -\frac{\Delta P}{l} = \text{const}$$

解 NS 的 x_1 分量方程得：

$$v_{x_1} = -\frac{\Delta p}{4\mu l} r^2 + a \ln r + b$$

由粘性边界条件： $r = R$ 时， $v_{x_1} = 0$ ；而 $r = 0$ 时 v_{x_1} 必保持有限值，即必有：

$$a = 0$$

所以：

$$b = \frac{\Delta P}{4\mu l} R^2$$

于是圆管泊肖叶流的速度场为：

$$v_{x_1} = \frac{\Delta P}{4\mu l} (R^2 - r^2)$$

•••• (4-3-14)

这是一抛物形分布。

接下来，容易求得

$$\textcircled{1} v_{max} = \frac{\Delta P}{4\mu l} R^2 \quad (\text{位于 } r = 0, \text{ 即轴线上})$$

•••• (4-3-15)

$$\textcircled{2} \bar{v} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r v_{x_1} dr = \frac{\Delta P}{8\mu l} R^2 = \frac{1}{2} v_{max}$$

•••• (4-3-16)

$$\textcircled{3} Q = \rho \bar{v} \pi R^2 = \frac{\pi \Delta P}{8\mu l} R^4 \left[Q = 2\pi \rho \int_0^R r v_{x_1} dr \right]$$

•••• (4-3-17)

上式表示：圆管泊肖叶流的流量正比与管径的四次方（此称泊肖叶公式）。

④剪切应力

$$P_1 = \mu \frac{dv_{x_1}}{dr} = -\frac{r}{2} \cdot \frac{\Delta P}{l}$$

•••• (4-3-18)

§4.4 粘性流动的相似律

我们知道，实际问题中的流体运动一般都是很复杂的，通常仅有少数简单的模型化的流动有精确的解析解（如上一小节所讨论的）。要解决复杂的真实流动问题，一方面依靠发展各种近似理论和数值解法（参阅：《计算流体力学》国防科技大学出版社，1989，作者：忻孝康、刘儒勋、蒋伯诚），另一方面则要通过实验观测和对观测结果的正确分析。

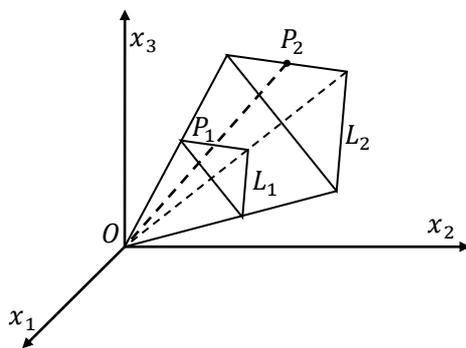
流体力学实验原则上是要研究尺度上缩小或放大的真实流动，即所谓模拟流动。通过对这种模拟流动的观测与分析，去推知真实流动的特性与规律。例如，把飞机模型放在风洞中进行吹风实验，在实验室做地幔对流（以及板块运动）的模型试验等等。那么要想利用实验的观测结果去外推真实流动，首先必须回答这样一些问题：①在模拟流动和真实流动之间是否可能存在一定的变换关系？②具备何种条件的实验才能使模拟流动和真实流动之间有简单的变换关系？③应当怎样表达和分析实验结果才能引出可应用于真实流动的合理结论？等等。这些就是本节相似律理论所要解决的问题。

<I> 几何相似、运动相似和动力相似

相似的概念起源于几何学。把一个几何图形（这个几何图形可视为流场中的物体图形，也可视为流动区域的图形）按照比例关系放大或缩小若干倍，得到的新图形称为原图形的相似形。为了对相似关系进行定量描述，可以取一个直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ ，然后将两个相似的图形在此坐标系中适当放置（如图），就可以从数值上建立起两个图形点集之间的一一对应关系：

$$x_i(P_1) = Kx_i(P_2)$$

•••• (4-4-1)



其中 P_1 , P_2 是任意一对对应的点， K 为比例常数。我们可以把 K 取为相似图形的某种特征长度之比，例如，上图中两个相似三角形的对应边长之比 L_1/L_2 ，于是，(4-4-1) 式可写成：

$$\frac{x_i(P_1)}{L_1} = \frac{x_i(P_2)}{L_2} \text{ 记为 } \bar{x}_i$$

•••• (4-4-2)

上式表示，如果两个相似图形分别用各自的特征长度作度量单位，则对应点的坐标测量值 \bar{x}_i 相同。 \bar{x}_i 称为无量纲坐标。具备(4-4-2)式关系的两个几何图形是相似形，这就是几何相似。

在建立了两种流动区域几何相似的概念后，还要引入“运动相似”的概念。运动相似就是建立在四维空间 (x_i, t) 中的图形对应关系。为此，我们分别取模拟流动和真实流动的适当的一个对应时刻 t_1 和 t_2 ，及它们的特征时间 T_1 和 T_2 来构成无量纲时间 $\frac{t_1}{T_1}$ 和 $\frac{t_2}{T_2}$ 。如果在几何相似的两个流场（即模拟和真实）中，在一切空间对应点以及一切对应的时刻，即在对应的时空相似点：

$$\frac{x_i(P_1)}{L_1} = \frac{x_i(P_2)}{L_2} = \bar{x}_i, \quad \frac{t_1}{T_1} = \frac{t_2}{T_2} = \bar{t}$$

•••• (4-4-3)

上有相同的无量纲速度：

$$\frac{v_i(P_1)}{V_1} = \frac{v_i(P_2)}{V_2} = \bar{v}_i(\bar{x}_i, \bar{t})$$

•••• (4-4-4)

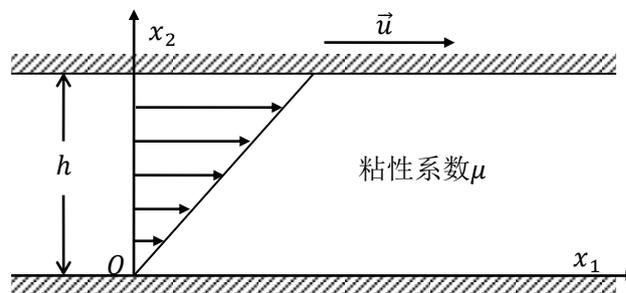
则这两种流动就称为“运动相似”。其中 V_1 和 V_2 分别是两种流动的特征速度。

仅仅具有运动相似性的流动还不一定能成为相似流动。相似流动除具有几何相似性和运动相似性以外，还必须具备动力相似性，即流动在四维空间对应点上的各种动力学量和热力学量，如体积力、粘性应力、压强、密度、温度、热通量密度等，都应当具有相应的比例变换关系。按照上面的分析，我们立刻可以得知：对于两种完全相似的流动，一定可以通过适当方式将流动中各种物理量无量纲化，即可以构造出各自的无量纲变数 \bar{x}_i 和 \bar{t} ，以及无量纲场 $\bar{v}_i, \bar{P}, \bar{\rho}, \bar{T}, \bar{\sigma}_j$ 等，使两种流动的各同名变量成为无量纲四维空间 (\bar{x}_i, \bar{t}) 上的相同函数。即：

$$\frac{f_1}{F_1} = \frac{f_2}{F_2} = \bar{f}(\bar{x}_i, \bar{t})$$

•••• (4-4-5)

其中 f_1 和 f_2 代表两种流动中的任一同名物理量， F_1 和 F_2 是相应的特征量。



例：对平板库艾特流，其速度分布为：

$$v_1 = \frac{u}{h} x_2$$

取：h 为特征长度，平均速度 $\bar{v} = \frac{1}{2}u$ 为特征速度，则上式改写成无量纲形式，就是：

$$\bar{v}_1(\bar{x}_2) = \frac{v_1}{\bar{v}} = \frac{\frac{u}{h} \bar{x}_2}{\frac{1}{2}u} = 2 \frac{\bar{x}_2}{h} = 2\bar{x}_2$$

因为平板库艾特流是定常流，故不用引进时间尺度。

上式表明：任何两种平板库艾特流动都是相似的。因为只要用每一种流动的板间距 h 作为特征长度，而用平均速度作为特征速度，无量纲速度 $\bar{v}_1(\bar{x}_2)$ 就是无量纲坐标 \bar{x}_2 的确定函数，也就是说：两种流动的同名变量无量纲速度：

$$\frac{(v_1)_I}{(\bar{v})_I} = \frac{(v_1)_{II}}{(\bar{v})_{II}} = \bar{v}_1(\bar{x}_2) = 2\bar{x}_2$$

••• (4-4-6)

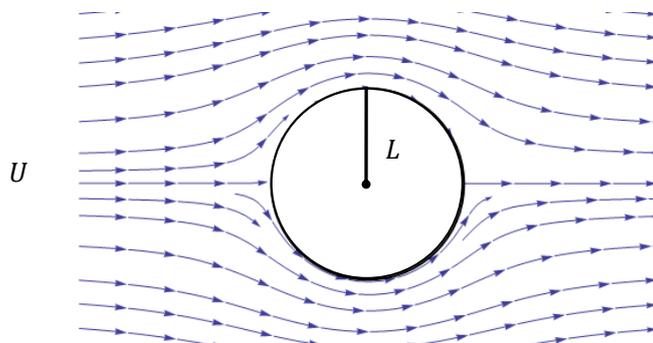
它们是无量纲空间 \bar{x}_2 上的相同函数。

而这两种平板库艾特流动的实际物理参数却是可以完全不同的。比如它们中可能一种是液体，另一种是气体；也或者可以一种是油，另一种是水；也可以一种是上千公里尺度的地球板块，另一种是实验室中几米尺度的板块模型。

<II> 粘性不可压缩流动动力相似的充要条件

由上面的讨论，我们解决了第一个问题，即在模拟流动和真实流动之间，当满足几何相似、运动相似和动力相似时，两种流动是相似流动，并且两种流动之间存在一定的变换关系。

另外，由上面的讨论，我们看到：两种相似的流动中任一同名物理量可以在无量纲数学形式的描述上表现出完全一致（如例中所述的 (4-4-6) 式），这使得我们能够据此寻找出确定流动是否相似的某些判据。因为描述流动的各种物理量的场函数，都是 NS 方程在特定的定解条件下的解，所以，只要两种流动的无量纲流体运动方程组，连同其定解条件的数学形式相同，它们的解的无量纲式也必然相同，因此，两种流动就一定是相似流动。下面，我们用一个例子说明如何运用这一推理来得出相似流动的判据。



球的定常粘性绕流问题可以作为说明上述问题的最好例子。首先，两个球的外部区域总是几何相似的。现在我们假设有两种绕球的定常流动。这两种流动的流体密度不同，粘性系数不同，球的半径以及来流速度也不一样，要确定这两种流动相似的条件。

先写出不可压缩粘性流的运动方程组。

连续性方程:

$$\frac{\partial v_i^{(k)}}{\partial x_i} = 0$$

(定常的) 运动方程:

$$v_j^{(k)} \cdot \frac{\partial v_i^{(k)}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho^{(k)}} \frac{\partial P^{(k)}}{\partial x_i} + \nu^{(k)} \frac{\partial^2 v_i^{(k)}}{\partial x_j^2}$$

••• (4-4-7)

其中, $k=1, 2$ 分别表示两种不同的流动。

边界条件为:

$$\text{当 } (x_i \cdot x_i)^{\frac{1}{2}} = \infty \text{ 时, } v_i^{(k)} = U_i^{(k)}; \text{ 当 } (x_i \cdot x_i)^{\frac{1}{2}} = L^{(k)} \text{ 时, } v_i^{(k)} = 0$$

••• (4-4-8)

这里 U_i 表示无穷远处来流速度, L 表示球半径。

我们取球半径 L 为特征长度, 取无穷远处来流速度 (的模) U 为特征速度, 引入无量纲变量:

$$\bar{x}_i = \frac{x_i}{L}, \quad \bar{v}_i = \frac{v_i}{U}, \quad \bar{P} = \frac{P}{\rho U^2}$$

••• (4-4-9)

注*: 因为是定常流动, 故不需要引入无量纲时间。 ρU^2 是具有压强量纲的一个特征量。则方程 (4-4-7) 和边界条件 (4-4-8) 均可化为无量纲形式, 即:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_i} = 0 \\ \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_j} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_i} + \left(\frac{\nu^{(k)}}{U^{(k)} L^{(k)}} \right) \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_j^2} \\ (x_i \cdot x_i)^{\frac{1}{2}} = \infty, \quad \bar{v}_i = \delta_{i1} \\ (x_i \cdot x_i)^{\frac{1}{2}} = 1, \quad \bar{v}_i = 0 \end{array} \right.$$

••• (4-4-10)

注*: 上式取来流沿 x_1 方向。

由上式可见, 只要:

$$\frac{\nu^{(1)}}{U^{(1)} L^{(1)}} = \frac{\nu^{(2)}}{U^{(2)} L^{(2)}}$$

••• (4-4-11)

则对于两种流动, 无量纲方程和边界条件 (4-4-10) 就完全相同, 进而它们的解 $\bar{v}_i(\bar{x}_i)$ 和 $\bar{P}(\bar{x}_i)$ 也就完全相同。当然这两种流动就是相似流动。因此, 等式 (4-4-11) 就成为这两种流动相似的条件。在本问题中, 几何相似的前提是满足的 (两个都是球体)。球又是各向同性的几何外形, 来流方向作任何改变也不破坏远场边界条件的相似性。所以我们简单起见, 取 x_1 轴

方向为来流方向。

将无量纲参数 $\frac{v}{UL}$ 写成：

$$Re^{-1} = \frac{v}{UL} \quad \text{or} \quad Re = \frac{UL}{v} \quad \dots (4-4-12)$$

Re 称为雷诺数。上面例子的分析可以推广为以下更一般的重要结论：

两个几何相似体按相同方位作等速运动，它们导致的定常不可压缩粘性绕流的相似条件为流动的雷诺数相等。这一结论称为定常不可压缩粘性流的雷诺相似律。各种不同类型的流动都有相应的相似律，这些相似律通常表示为流动的某些无量纲参数相等。所以，对流动进行分析一般都采取无量纲的数学形式，这样得出的结果才可以应用到一类相似流动，而不只限于某种特定的具体流动。

<III> 实验数据分析

应当怎样表达和分析实验结果才能引出可用于真实流动的合理理论？我们第三个要解决的问题就是怎样表达和分析实验结果。

应用相似性理论正确进行实验数据分析，才能得出流动参数之间的规律性联系。下面我们以球在粘性流体中等速运动的阻力定律为例加以说明。对于不可压缩流体的定常绕流，流动将由球的半径 L ，运动速度 U ，流体的密度 ρ 和粘性系数 ν 决定。因此，一般而言，球受到流体的粘性阻力 D 应是 L 、 U 、 ρ 、 ν 的函数：

$$D = D(L, U, \rho, \nu) \quad \dots (4-4-13)$$

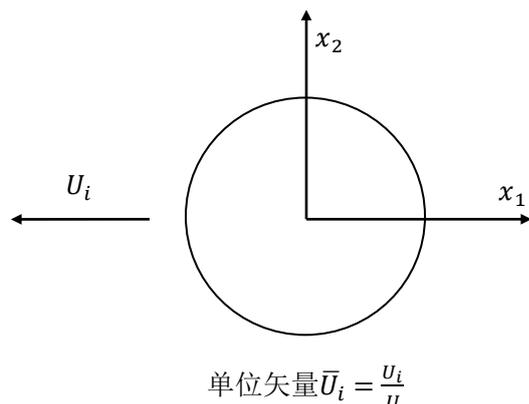
要确定四个自变量的函数，依靠实验方法是很困难的，但是，如果改写成无量纲形式，并利用相似理论，问题的解决就容易多了。

我们知道，球所受的阻力是球表面上应力矢量积分在球运动方向上投影值的反号，即：

$$D = - \iint_{r=L} \sigma_{ij} n_j \left(\frac{U_i}{U} \right) dS = \iint_{r=L} \left[p \delta_{ij} - \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j \left(\frac{U_i}{U} \right) dS \quad \dots (4-4-14)$$

写成无量纲形式为：

$$\frac{D}{\rho U^2 L^2} = \iint_{\bar{r}=1} \left[\bar{p} \delta_{ij} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \bar{x}_i} \right) \right] n_i \bar{U}_i d\bar{S} \quad \dots (4-4-15)$$



其中, \bar{U}_i 为球运动方向上的单位矢量。如果将该方向取作 x_1 轴的负方向, 则 \bar{U}_i 可以写成 “ $-\delta_{i1}$ ”。
(4-4-15) 式右边的函数 \bar{v}_i 和 \bar{P} 是无量纲方程和边界条件 (4-4-10) 这个定解问题的解, 如果写成:

$$\bar{v}_i = \bar{v}_i(\bar{x}_i; Re) \quad \bar{P} = \bar{P}(\bar{x}_i; Re) \quad \dots (4-4-16)$$

则 \bar{v}_i 和 \bar{P} 就是 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ 的确定函数, Re 是一个参数。
定义无量纲数 (称为球阻力系数):

$$C_D \equiv \frac{D}{\rho U^2 L^2} \quad \dots (4-4-17)$$

则:

$$C_D = \frac{D}{\rho U^2 L^2} = \iint_{\bar{r}=1} \left[\bar{P} \delta_{ij} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \bar{x}_i} \right) \right] n_i \bar{U}_i d\bar{S} = C_D(Re) \quad \dots (4-4-18)$$

上式表明, 球阻力系数是雷诺数的单变量函数。这样, 我们在整理球阻力测量的实验数据时, 就应当将测得的 D, ρ, L, U, ν 组合成两个无量纲量:

$$C_D = \frac{D}{\rho U^2 L^2} \text{ 和 } Re^{-1} = \frac{\nu}{UL} \text{ or } Re = \frac{UL}{\nu}$$

然后绘出 $C_D \sim Re$ 的单值函数曲线, 这个单变量函数就能给出球在流体中作等速运动 ($U \ll c$) 时的阻力规律。

<IV> 方程中各项数量级分析与比较

对于两种不定常, 粘性不可压缩且仅受重力的流体, 要讨论两者相似流动问题, 可完全用类似于上述方法去进行。我们跨过分析过程, 给出分析结果如下, 其无量纲速度和压力为:

$$\begin{cases} \bar{v}_i = \bar{v}_i(\bar{x}_i, \bar{t}; S_t, F_r, Re, Eu) \\ \bar{P} = \bar{P}(\bar{x}_i, \bar{t}; S_t, F_r, Re, Eu) \end{cases}$$

注*: S_t 斯托鲁哈利数; F_r 弗鲁特数; Eu 欧拉数

即：无量纲速度 \bar{v}_i 和压力 \bar{P} 是无量纲数 S_t, F_r, Re, Eu 和四维空间点 (\bar{x}_i, \bar{t}) 的函数。也就是说，只要满足上式右端所有的无量纲数对两个流动系统而言是相同的，则两种流动就是相似的。

但是，实际中要同时满足多个相似律几乎是不可能的。例如，当模拟流动和真实流动的流体相同时，(即 ν 相同)，为使 Re 数相等，就必须基本上满足 $U^{(1)}L^{(1)} = U^{(2)}L^{(2)}$ ；而为使 F_r 数相等，又必须基本上满足 $\frac{U^{(1)}}{L^{(1)}} = \frac{U^{(2)}}{L^{(2)}}$ 。显然，要使 Re 和 F_r 两个相似律不矛盾，唯有 $U^{(1)} = U^{(2)}$ ， $L^{(1)} = L^{(2)}$ 。由此可想而知，要使所有相似律都满足，就更难办到了。因此，实际上只能做到使主要的相似律满足，而放弃次要的相似律的要求。换句话说，在不可能实现完全相似的流动时，只能模拟流动的主要方面，用一个在主要方面部分相似的流动去模拟真实流动。所幸的是，在某些特定条件下，我们可以将方程简化，从而减少相似律数目。例如，对定常不可压缩粘性流就归结为只满足雷诺相似律。

简化方程，实际就是根据具体条件来决定方程中各项的取舍。为了实现简化方程的目的，我们可以根据无量纲参数 S_t, F_r, Re, Eu 等的物理意义，从分析这些无量纲参数的数量级入手，通过比较这些无量纲参数的数量级，来决定方程中各项的取舍。我们知道，粘性流体运动的基本方程就是质量，动量，能量守恒方程。例如，动量方程可以看做是流体所受的惯性力、压力、质量力 (or 体积力)、粘性力的平衡方程。如果把作用在某一流体微元上的这些力进行数量级比较，其比值就是某些无量纲特征参数或这些无量纲特征参数的组合。

下面先逐一列出用相应变量的特征值表述的方程中的各项。

注：角标“o”表示特征量

①惯性力项：

$$-\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \sim \rho_o \frac{U_o}{T_o} = \rho_o \frac{U_o^2}{L_o}$$

②粘性变形应力项 (1)：

$$\nabla \cdot 2\mu\epsilon_{ij} \sim \mu_o \frac{U_o}{L_o^2}$$

③粘性体胀应力项 (2)：

$$\nabla \cdot (\lambda\nabla \cdot \vec{v}) \sim \lambda_o \frac{U_o}{L_o^2}$$

④质量力项：

$$\rho\vec{g} \sim \rho_o g_o$$

⑤压力梯度项：

$$\nabla P \sim \frac{P_o}{L_o}$$

⑥相应于定点加速度的惯性力项 (1)：

$$-\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \sim \rho_o \frac{U_o}{T_o} = \rho_o \frac{U_o^2}{L_o}$$

⑦相应于定点加速度的惯性力项 (2):

$$-\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \sim \rho_o \frac{U_o^2}{L_o}$$

由此可见:

- i. $\frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力 (1)}} \sim \frac{\rho_o U_o^2 L_o^{-1}}{\mu_o U_o L_o^{-2}} = \frac{U_o L_o}{\nu_o} = Re$ 雷诺数
- ii. $\frac{\text{惯性力}}{\text{质量力}} \sim \frac{\rho_o U_o^2 L_o^{-1}}{\rho_o g_o} = \frac{U_o^2}{g_o L_o} = Fr$ 弗鲁特数
- iii. $\frac{\text{压力梯度}}{\text{惯性力}} \sim \frac{P_o L_o^{-1}}{\rho_o U_o^2 L_o^{-1}} = \frac{P_o}{\rho_o U_o^2} = Eu$ 欧拉数
- iv. $\frac{\text{惯性力项 (1)}}{\text{惯性力项 (2)}} \sim \frac{\rho_o U_o T_o^{-1}}{\rho_o U_o^2 L_o^{-1}} = \frac{L_o}{U_o T_o} = St$ 斯托鲁哈利数
- v. $\frac{\text{粘性应力 (2)}}{\text{粘性应力 (1)}} \sim \frac{\lambda_o U_o L_o^{-2}}{\mu_o U_o L_o^{-2}} = \frac{\lambda_o}{\mu_o}$ 粘性系数比

根据上述关系, 只要找出真正代表速度发生显著改变的空间距离 L_o 和速度改变的量级 U_o 以及其它特征量, 我们就可以估算方程中各项的量级, 从而决定取舍。如若 $Fr \gg 1$ (惯性力 \gg 重力) 时, 在动量方程中可以略去重力项; $Re \ll 1$ (惯性力 \ll 粘性力) 时, 在动量方程中就可以略去惯性力项。但必须注意: 当 $Re \gg 1$ 时 (可略去粘性力项), 由于在固体界面附近存在一边界层, 在此边界层内, 速度梯度很大。所以, 在边界层内, 即使粘性系数很小, 仍旧不可简单地略去粘性力。

另外, 能量方程可看作对流热、传导热以及粘性耗散生成热之间的平衡方程。如果把这些项逐一进行量级分析和比较, 其比值则是另一些无量纲特性参数或其组合。

由以上讨论, 我们可以得到这样两个结论:

- (1) 流体力学的相似理论, 给出了模拟流动与真实流动之间的变换关系。在相似流动的充要条件 (满足一定的相似律, 即满足无量纲的方程相同和满足无量纲定解条件相同) 被满足时, 我们可以有根据地把实验测得的模拟流动的数据按一定的变换关系变换为真实流动的相应数据。特别是: 两种流动相似 (例如: 不可压缩定常粘性绕流问题中) 是要求满足一定的相似律, 而相似流动的实际流动参数 (如 ρ, U, L, μ 等) 却可完全不同。这增强了我们在实验中的选择性。我们可以适当地选择 L, U, ρ, μ 来满足相似律 (例如实验室中飞机吹风模拟实验)。
- (2) 确定的一般流体力学问题所涉及的相似律一般不可能同时被满足。但我们可根据实际情况借用对无量纲参数的分析, 而决定方程中有关项的取舍, 进而简化方程以便求解。

下面举一个例子来看看如何将模拟实验的结果外推到真实流动中去。

例: 用比实物缩小三倍的模型在风洞中进行实验来确定深水潜艇悬挂物所受的阻力。已知该悬挂物与海水的相对速度为 6 km/h , 问风洞实验的风速应为多少? 又如模型的阻力为 12.8 牛顿, 则悬挂物所受阻力是多少?

解: 该悬挂物在深水中作等速直线运动时, 所受阻力主要是粘性阻力。进行模拟实验时, 必须保证 Re 相似律得到满足。即若记 (1) 为空气, (2) 为海水中, 则要求:

$$\frac{v^{(1)}}{U^{(1)}L^{(1)}} = \frac{v^{(2)}}{U^{(2)}L^{(2)}}$$

••• (a)

已知:

$$v^{(1)} = 1.45 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}, \quad v^{(2)} = 1.145 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad L^{(1)} = \frac{1}{3}L^{(2)}$$

则由 (a) 时有:

$$U^{(1)} = \frac{L^{(2)}}{L^{(1)}} \cdot \frac{v^{(1)}}{v^{(2)}} \cdot U^{(2)} = 3 \times \frac{1.45 \times 10^{-5}}{1.145 \times 10^{-6}} \times \frac{6 \times 1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 63.3 \text{ m/s}$$

即风洞实验时的风速为63.3m/s。

为了求得悬挂物所受的阻力, 必须先算出实验所得的无量纲阻力系数 $C_D^{(1)}$:

$$C_D^{(1)} = \frac{D^{(1)}}{\rho^{(1)}(U^{(1)})^2 S^{(1)}}$$

这里 $S^{(1)}$ 表示物体的最大迎风截面积。注意到, 当流动相似时, 有 $C_D^{(1)} = C_D^{(2)}$ 。

若已知:

$$\rho^{(1)} = 1.29 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3, \quad \rho^{(2)} = 1.024 \text{ g/cm}^3$$

而:

$$\frac{S^{(1)}}{S^{(2)}} = \left(\frac{L^{(1)}}{L^{(2)}}\right)^2$$

所以:

$$D^{(2)} = \frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}} \left(\frac{U^{(2)}}{U^{(1)}}\right)^2 \left(\frac{L^{(2)}}{L^{(1)}}\right)^2 \cdot D^{(1)} = 63.397 \text{ 牛顿}$$

§ 4.5 层流和湍流

大量的实验表明, 粘性流体运动有两种形态, 即层流和湍流。这两种形态的流动性质截然不同。层流的特性是: ①流体运动规则; ②各部分分层流动互不掺混; ③质点的迹线是光滑的; ④而且流场稳定。湍流的特征则完全相反: ①其流体运动极不规则, ②各部分激烈掺混, ③质点的迹线杂乱无章, ④流场极不稳定。这两种截然不同的运动形态在一定条件下是可以相互转化的, 而从一种形态转化成另一种形态的唯一标志性参数就是雷诺系数 Re 。

§ 4.5.1 层流

<I> 关于方程组的讨论和解题途径

层流运动是一种宏观上来看规则且稳定的粘性流体运动，原则上可以直接从NS方程出发通过解方程来确定流场。

但是，粘性不可压缩流动的控制方程组是一个二阶非线性偏微分方程，其中压力项和粘性力项都是线性的，而惯性力项却是非线性的，这给我们在解方程时带来很大的困难。在理想不可压缩流动中虽然也存在着非线性的惯性力项，但是多数实际问题都是无旋的，而对于无旋运动，问题可归结为解线性的二阶拉普拉斯方程，而且压力可由伯努利方程或拉格朗日积分求出，所以问题得到很大简化。在粘性不可压缩流动中，运动一般都是有旋的，不存在速度势，也不存在伯努利积分和拉格朗日积分，因此必须硬着头皮去解NS方程。虽然没有有力的数学工具和有效的方法，但我们可根据力学考虑作近似，以便简化方程求解。

实际上解NS方程通常有两种主要途径：

- (a) 准确解。在一些简单问题中，由于问题的对称性，NS方程得到简化，从而可通过解出方程，得到准确解。如我们前面讨论的平板库艾特流和伯肖叶流等。但具有准确解的问题极少，且实用价值不大。
- (b) 近似解。根据问题的物理特点，略去方程中的某些次要项，从而得到近似方程。在有些情况下可以得到近似方程的解。这种途径称为近似方法。近似方法又可分为两种情况：

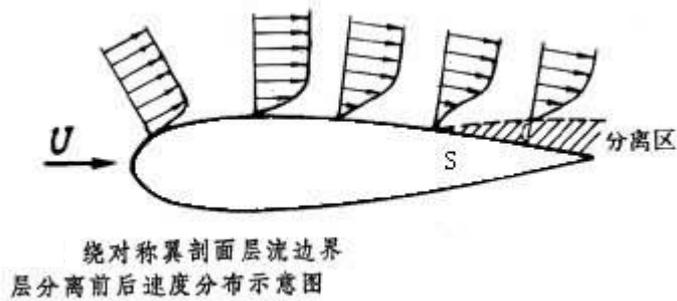
1. 小 Re $\left(\frac{\text{惯性力项}}{\text{粘性力项}} = Re = \left(\frac{v}{UL} \right)^{-1} \right)$ 数情形。此时粘性力较惯性力大得多，可以全部或部分地忽略惯性力而得到简化的线性方程（限于时间，不作讨论）
2. 大 Re 数情形。此时惯性力较粘性力大得多，这时可以将粘性力项忽略。从而使粘性流体方程组化为一阶的无粘流（理想流体）方程组。但是，在贴近固壁面的一个很薄的层内（称为边界层）粘性项不可略去。

对于中等 Re 情形，惯性力和粘性力的影响同等重要，此时两者都不可忽略。这种情况下，必须通过其他途径简化问题，或者利用数值计算方法求NS方程的数值解。（这是专门问题，不做讨论）

<II> 层流边界层

大量工程实际问题如航空、宇宙飞行、水利等方面所遇到的课题大多是大 Re 数情形。这是因为这些课题所涉及的流体是空气和水，它们的粘性系数 μ 很小，如果物体的特征尺度及特征速度不太小的话，那么 Re 数就可达到很高的数值。因此，研究大 Re 数情形的问题具有重大的实际意义。（注： $Re = \frac{UL}{\nu}$ ， $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ）

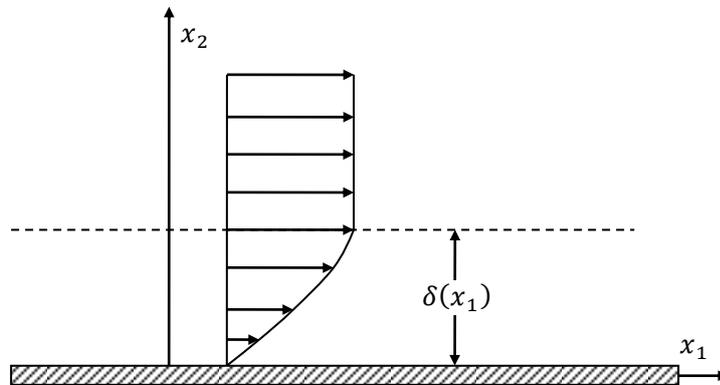
很大的 Re 数等价于很小的粘性系数。因此，当 Re 很大时，流体可近似看作是无粘流体（即理想流体）。但是，当考虑贴近固壁面的流动时，就不能采用这种近似了。因为对于理想流体，固壁边界条件只要求法向速度分量为零，切向速度分量保持为有限值（即可滑移）；而对于粘性流体，固壁上的速度必须完全为零（即无滑移）。



根据实验观测结果，普朗特 (Prandtl) 指出：由于粘性的存在（尽管粘性很小时），不管 Re 数是多么的大，在固壁附近总是存在一层粘性边界层。在这一薄层里，流动从外部无粘流速度迅速过渡到壁面无滑移速度（如图对称翼剖面层流边界层速度分布示意图），因此边界层中存在着非常大的速度梯度。这正是 Re 数很大时，粘性也不能轻易忽略的原因，因为粘性力项为 $\nu \nabla^2 \vec{v}$ ， ν 很小，但 $\nabla^2 \vec{v}$ 很大时，它们的积仍是一个大量。在边界层中的流动既可以是层流，也可以是湍流。我们只讨论层流边界层的性质。

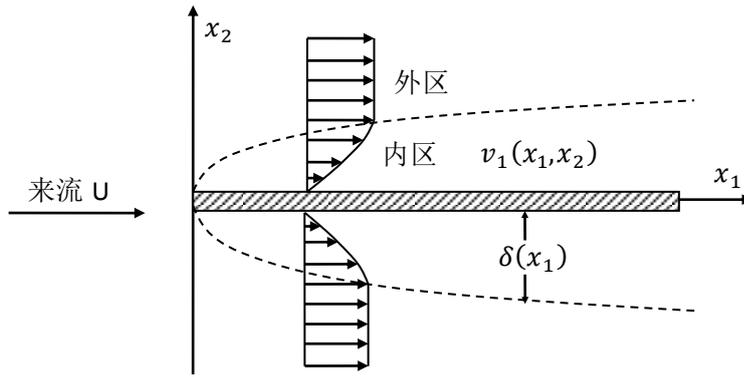
<III> 层流边界层方程

普朗特以实验事实为依据，提出：对大 Re 数流动，假设整个流场可以分成两部分处理：在边界层以外的区域（称为外区）是无粘流动问题，在边界层内区域（称为内区）是粘性流动，并且求解内区流动时把外区无粘流的解作为已知的边界层的外缘边界条件。这样的分开处理大大地简化了问题。



无粘流我们已经讨论过了。现在要研究边界层内粘性流动的控制方程组和相应条件。边界层内的粘性流动主要由 NS 方程控制，但是因为边界层厚度 $\delta(x_1)$ 比特征长度小很多，而且 x_1 方向速度分量沿法向（即厚度 $\delta(x_1)$ 的方向）的变化比切向大很多（即 $\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \gg \frac{\partial v_1}{\partial x_1}$ ），所以 NS 方程在边界层内可以得到相当大的简化。简化后的方程被称为普朗特边界层方程，是控制边界层流动的主要方程，下面我们来推导它。

根据实验结果知：大 Re 数下的边界层流动有两个主要性质：①边界层的厚度 $\delta(x_1)$ 较物体的特征长度 L 小很多，即无量纲量 $\bar{\delta} = \frac{\delta}{L}$ 是一小量。②边界层内粘性力和惯性力同阶。我们基于这两点来推导边界层流方程（即边界层理论）。



为简单起见，我们考虑沿着平板表面的二维流动。取平板面为 ox_1x_3 平面，流动沿 x_1 方向，则 NS 方程在此坐标系下为（略去质量力）：

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_2} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) \\ \text{连续性方程为: } \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

••• (4-5-1)

我们取平板长度 L 为特征长度，来流速度 U 为特征速度，则边界层内 x_1 方向的尺度为 $x_1 \sim L$ ， x_2 方向的尺度为 $x_2 \sim \delta$ （此为边界层厚度）， x_1 方向的速度分量的量级为 $v_1 \sim U$ 。这样 (4-5-1) 式中各项量级可估计如下：

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \sim \frac{U}{L}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \sim \frac{U}{\delta}, \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \sim \frac{U}{L^2}, \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \sim \frac{U}{\delta^2}$$

••• (4-5-2)

在连续性方程中，各项的量级应该相等，即有 $\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \sim \left| \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right| \sim \frac{U}{L}$ ，特别是因 δ 相对于 L 是一个小量，即 $\delta \ll L$ ，所以 v_2 相对于 v_1 也应该是一个小量。只有这样，才能保证连续性方程中两项的量级相等。这实际上也意味着在很薄的边界层内，流动是大体平行于物面的。

由上所述，所以有：

$$v_2 \sim \frac{U}{L} \delta, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \sim \frac{U \delta}{L^2}, \quad \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} \sim \frac{U \delta}{L^3}, \quad \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \sim \frac{U}{L \delta}$$

••• (4-5-3)

由以上两式可见，在粘性项中，总有：

$$\left| \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right|$$

••• (4-5-4)

若假设非定常项 $\frac{\partial v_1}{\partial t}$ 的量级不会超过惯性项 $v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1}$ 的量级，则可认为定点速度发生显著变

化的时间（即特征时间）量级为 $\frac{L}{U}$ ，于是有：

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} \sim v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \sim \frac{U^2}{L}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} \sim \frac{U^2}{L^2} \delta$$

另外，压力梯度项总是与惯性项同量级，即 $\frac{\partial P}{\partial x_1} \sim \frac{\rho U^2}{L}$ 。边界层内粘性项与惯性项同量级，

即 $\frac{U^2}{L} \sim \frac{\nu U}{\delta^2}$ ，由此得到：

$$\frac{\delta}{L} \sim \sqrt{\frac{\nu}{UL}} = \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

•••• (4-5-5)

因此，为使 $\delta \ll L$ ，必须有 $Re \gg 1$ ，这时边界层理论才能成立。(4-5-5)式还表明：边界层厚度 δ 随 Re 数的增大，以 $\frac{1}{\sqrt{Re}}$ 的规律减小。

根据上述量级估计，可以引入下列无量纲量：

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \frac{x_1}{L}, & \bar{x}_2 = \frac{x_2}{\delta} = \frac{\sqrt{Re} \cdot x_2}{L}, & \bar{t} = \frac{Ut}{L} \\ \bar{v}_1 = \frac{v_1}{U}, & \bar{v}_2 = \sqrt{Re} \cdot \frac{v_2}{U}, & \bar{P} = \frac{P}{\rho U^2} \end{cases}$$

•••• (4-5-6)

代入(4-5-1)得无量纲方程为：

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{t}} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_1} + \bar{v}_2 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_1} + \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2^2} \\ \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{t}} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{x}_1} + \bar{v}_2 \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{x}_2} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_2} + \frac{1}{Re^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial \bar{x}_2^2} \\ \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{x}_2} = 0 \end{cases}$$

•••• (4-5-7)

当 Re 数很大时，略去 $O\left(\frac{1}{Re}\right)$ 以上的高阶小量，就得到近似的层流边界层方程为：

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{t}} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_1} + \bar{v}_2 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2^2} \\ \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_2} = 0 \\ \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{x}_2} = 0 \end{cases}$$

•••• (4-5-8)

上述无量纲方程的一个显著特点是：方程（以及相应的无量纲边界条件）中不显含 Re 数。

这表明它们的解不依赖于 Re 数。因此，对于两个不同 Re 数，但有相同无量纲边界条件的流动，在边界层内流场图像仅仅是经历了一个相似变换(4-5-6)。在这种变换中， x_1 方向的距离和速度保持不变，而 x_2 方向的距离和速度却与 Re 数的平方根成反比。换句话说， Re 数的作用只是决定边界层的厚度。显然，根据(4-5-6)式所作的变换后，若求得某个 Re 数下的解，则这个解对其它 Re 数也有效。这个原则称为 Re 数相似原理。

另外，由(4-5-8)的第二式有：

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_2} = \frac{1}{\frac{\rho U^2}{\sqrt{Re}} \cdot \frac{\partial P}{\partial x_2}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow P = P(x_1)$$

•••• (4-5-9)

上式表明：在边界层内不存在 x_2 方向压力梯度，换句话说，边界层内的压力等于主流（即外区无粘流）的压力 $P_e(x_1)$ ，因此对于求解边界层问题来说，边界层内的压力是 x_1 的给定函数，且有：

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{dP}{dx_1} = \frac{dP_e}{dx_1}$$

•••• (4-5-10)

又当 $Re \gg 1$ 时，边界层外的流动可视为无粘流（即理想流动），则由欧拉方程有：

$$\frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x_1} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P_e}{\partial x_1}$$

•••• (4-5-11)

这里 U_e 和 P_e 分别是边界层外缘的无粘流速度和压强。在边界层计算中认为它们均为已知量。

最后，将(4-5-8)式变换回有量纲的二维边界层方程，即为：

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

•••• (4-5-12)

边界条件为：

$$\begin{aligned} x_1 > 0, x_2 = 0 : v_1 = v_2 = 0 & \text{(无滑移边条)} \\ x_1 > 0, x_2 \rightarrow \infty, v_1(x_1, x_2, t) \rightarrow U_e(x_1, t) & \text{(外区无粘流)} \\ x_1 < 0, v_1(x_1, x_2, t) = U & \text{(均匀来流)} \end{aligned}$$

初始条件为：

$$t \leq 0 \text{ 时, } v_1 = v_1(x_1, x_2) \text{ (给定初始速度分布)}$$

可以证明：上述方程虽然是对沿平板固壁的流动导出的，但它们对任意二维流动（如物面是曲面时）情况仍然成立。

<IV> 平板边界层

边界层方程解的一个最典型的例子是：均匀定常来流沿半无穷长平板的流动。在这种情况下有： $\frac{\partial}{\partial t} = 0, \frac{\partial U_e}{\partial x_1} = 0$ ，从而边界层方程（4-5-12）式化简为：

$$\begin{cases} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 = 0: v_1 = v_2 = 0 \\ x_2 \rightarrow \infty, v_1 = U \text{ (均匀来流)} \end{cases}$$

•••• (4-5-13)

由（4-5-8）式分析可知：无量纲速度 \bar{v}_1 和 \bar{v}_2 只能是无量纲坐标 \bar{x}_1, \bar{x}_2 的函数。但在半无穷长平板流动中，不存在 x_1 方向的特征长度 L ，因此， \bar{v}_1 和 \bar{v}_2 只能依赖于 \bar{x}_1 和 \bar{x}_2 的某个不含 L 的组合，这种组合记为：

$$\eta = \frac{\bar{x}_2}{\sqrt{\bar{x}_1}} = \left(\frac{U}{\nu x_1} \right)^{\frac{1}{2}} x_2$$

•••• (4-5-14)

于是， \bar{v}_1 和 \bar{v}_2 的一般函数形式为（用（4-5-5）和（4-5-6）式推得）：

$$\bar{v}_1 = \frac{v_1}{U} = \varphi_1(\eta), \quad \bar{v}_2 \sqrt{\bar{x}_1} = \sqrt{\frac{\bar{x}_1}{\nu U}} v_2 = \varphi_2(\eta)$$

•••• (4-5-15)

这里 $\varphi_1(\eta)$ 和 $\varphi_2(\eta)$ 是待求的无量纲函数。由连续性方程可知， $\varphi_1(\eta)$ 和 $\varphi_2(\eta)$ 不是独立的。将（4-5-15）写成有量纲形式为：

$$v_1 = U \varphi_1(\eta), \quad v_2 = \sqrt{\frac{\nu U}{x_1}} \varphi_2(\eta)$$

•••• (4-5-16)

利用连续性方程，可将 $\varphi_2(\eta)$ 用 $\varphi_1(\eta)$ 来表示，从而问题化为求一个单变量 $\eta = \sqrt{\frac{U}{\nu x_1}} x_2$ 的函数 $\varphi_1(\eta)$ 。

注意到：

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_1} = \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}_1} = -\frac{\bar{x}_2}{2\sqrt{\bar{x}_1}^3} \varphi_1'(\eta), \quad \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{x}_2} = \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}_2} = \frac{1}{\bar{x}_1} \varphi_2'(\eta)$$

所以：

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{x}_2} = -\frac{\bar{x}_2}{2\sqrt{\bar{x}_1}^3} \varphi_1'(\eta) + \frac{1}{\bar{x}_1} \varphi_2'(\eta) = 0$$

即：

$$\frac{1}{2}\eta\varphi'_1(\eta) = \varphi'_2(\eta)$$

•••• (4-5-17)

我们用 $\varphi_1(\eta) = f'(\eta)$ 来定义一个函数 $f(\eta)$ ，即：

$$f(\eta) = \int \varphi_1(\eta) d\eta$$

•••• (4-5-18)

则由 (4-5-17) 式可得 (利用分部积分)：

$$\varphi_2(\eta) = \frac{1}{2}[\eta f'(\eta) - f(\eta)]$$

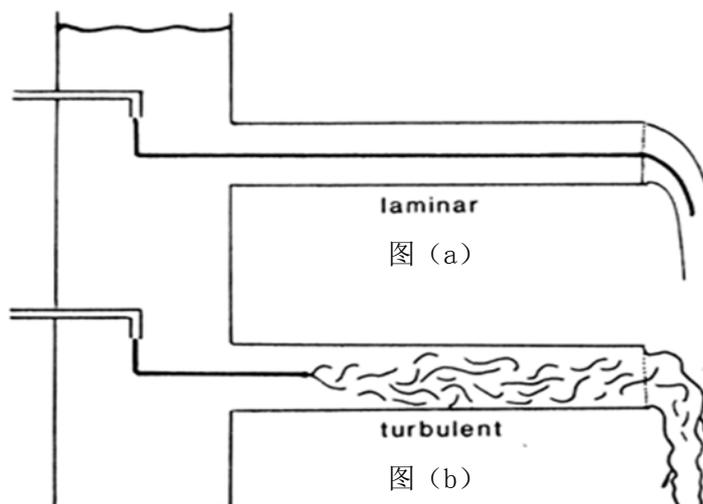
•••• (4-5-19)

注：对 (4-5-17) 式积分有：

$$\varphi_2(\eta) = \frac{1}{2} \int \eta \varphi'_1(\eta) d\eta = \frac{1}{2} \int \eta d\varphi_1 = \frac{1}{2} [\eta \varphi_1(\eta) - \int \varphi_1 d\eta] = \frac{1}{2} [\eta f'(\eta) - f(\eta)]$$

§ 4.5.2 湍流

我们知道，湍流是宏观上看极不规则，各部分激烈掺混，流场极不稳定的一种复杂的流动。湍流是雷诺在实验室里首先观察到的。雷诺的实验装置是一根水平放置的圆管（称为雷诺管），其中充满粘性流体（如图）。在入口的中心线上给流体染色。当流体的速度不大时，管内呈现一条与管壁平行的有色流丝，这表明此时管内流体分层流动互补掺混，流体质点的轨迹线和流线是与管壁平行的直线。这些正是层流特征，说明此时流体的运动处于层流状态，如图 (a) 所示。



实验中，逐渐增强管内流体的速度，有色流丝变粗，在下游开始出现摆动，随着管内流体速度的增加，摆动的数目和振幅逐渐增加，当速度到达某一数值时，有色流丝开始分裂成许多高频运动着的小涡流，向外扩散，迅速与周围未染色流体混合。这时管内流体各部分相

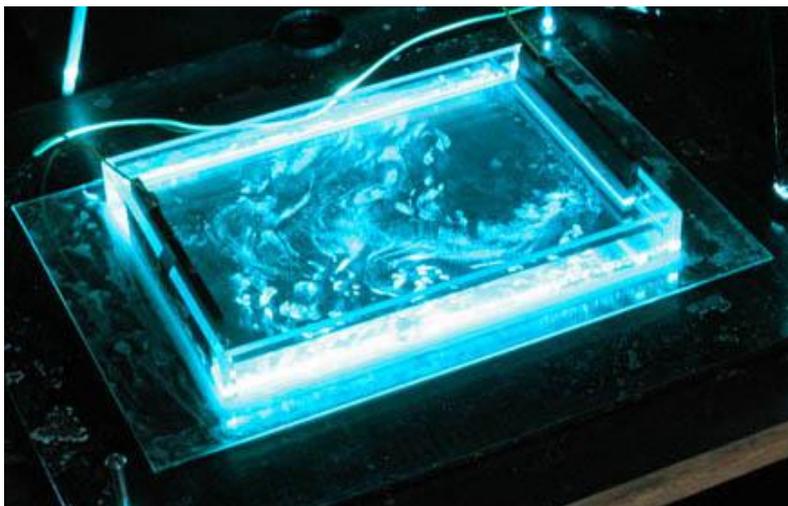
互剧烈掺混，流体质点迹线紊乱，流动的瞬时速度在时、空上都不规则的剧烈脉动着，是高度随机的。这些正是湍流特征，说明此时流体的运动处于湍流状态，如图（b）所示。

雷诺对不同直径的圆管及不同粘性系数的流体进行大量实验，发现：管内流体运动呈现层流或湍流主要取决于雷诺数 $Re = \frac{vd}{\nu}$ ，其中 v 是管流的平均速度， d 是管的直径， ν 是运动学粘性系数。由层流过渡到湍流的雷诺数称为临界雷诺数，记为 $(Re)_{critic}$ 。大量实验表明临界雷诺数不是一个固定的常数，它与入口处的条件有关，如流体在进口时的扰动大小，圆管入口处的粗糙程度等。若把这些视为外界扰动，则外界扰动大，临界雷诺数就小，外界扰动小（比如尽可能地是入口处光滑），临界雷诺数就大。但临界雷诺数有一个下限值，约为 2000。当 $Re < 2000$ 时，不管外界扰动多大，管内流动保持稳定的层流状态。通过改善实验条件，减少外界扰动的影响，临界雷诺数的数值可以不断提高，现在达到的最高临界雷诺数是 $(Re)_{critic} = 10^5$ ，当然，这样高 Re 数下的层流极不稳定，稍有扰动便立即转变为湍流。

很多流体力学家都喜欢引用葛饰北斋的浮世绘作品《神奈川冲浪里》来作为湍流的范例。以物理的角度来看，这张画作最重要的一点就是形象地描绘出了湍流在不同尺度上的行为：



真实的湍流也如葛饰北斋的绘画所表现的一样，具有不同尺度的涡旋。动能从大尺度注入流场，然后大尺度涡旋逐次瓦解，能量通过非粘性过程传递给更小的尺度，并产生小型涡旋，依此类推。但是这个过程并不会无限进行下去，若尺度足够小，雷诺数接近于 1，分子扩散成为主导，粘性力占据支配地位，非粘性能量传递不再发生，动能则经由耗散转化为热能，因此涡旋的最小尺度不会小于此值。



上图是实验室中的湍流图像，有许许多多高频运动着的小旋涡，不妨与《神奈川冲浪里》比较一下。

归纳上述有以下结论：从层流向湍流的转变（又称转捩（liè））取决于 Re 数。对于雷诺管中的层流向湍流转捩，存在一个 $(Re)_{critic}$ 数的下限值，即 $Re < 2000$ 时，无论外界扰动如何均不发生由层流向湍流的转捩，而 $(Re)_{critic}$ 数的上限值则与外界扰动程度有关。

大量其他类型的层流（如平面泊肖叶流、圆管哈根-泊肖叶流、边界层层流、平面混合层流、射流等）向湍流转捩的实验表明，上述结论适合于普通的层流向湍流转捩过程。不同类型的层流，只是临界雷诺数的上、下限值不同。

湍流的研究主要围绕两大问题：①湍流是怎样发生的（即产生的原因）；②湍流的机制及运动的规律是什么？下面简要讨论之。

<I> 热对流的不稳定性——Rayleigh - Bénard 对流模型

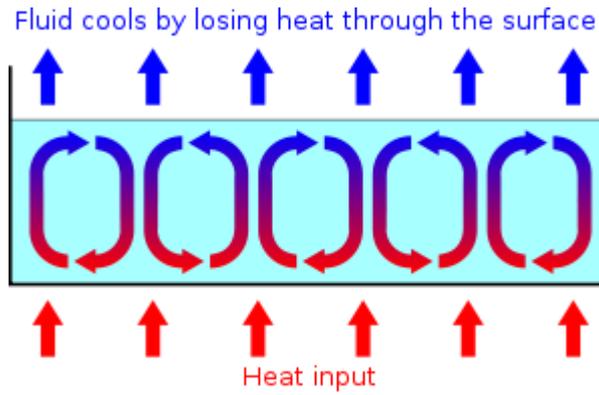
一般认为流动从层流转变为湍流是从层流流动的不稳定性开始的。研究湍流的发生，必须先了解流动的稳定性问题。

我们知道，在一定的控制方程和边界条件下，存在一定形式的流动。但是，流场中总会出现这样或那样的扰动（例如：水渠中的流动的水在遇到一石块时，石块对原流动状态将产生影响——扰动），如果流动有“抵抗”这些的能力，使它们逐渐衰减掉，恢复到原来的流动状态，则称流动是稳定的。反之，如果流动在受到扰动后不能回到原来状态，而变成另一种新的流动，则称流动是不稳定的。

流动不稳定性是一类流动现象的总称。但引起不稳定的物理因素却是各种各样的，可以是重力、浮力、表面张力和惯性力等等。各种类型的流动有各自的不稳定条件和失稳的准则，所以流动稳定性的问题的内容十分丰富，理论阐述也很困难。下面，我们仅对热对流的贝纳德（Bénard）不稳定性问题作简要介绍，我们将不涉及复杂的数学处理方法，只介绍它的主要物理概念和主要结果。

① 热不稳定性

热对流的不稳定是一定温度分布条件下，作用在流体上的重力和浮力相互制约的产物。静力平衡可以看作一种特殊的流动状态（ $\vec{\sigma} = 0$ 的状态），由这种特殊的运动状态（即静止状态）自发地转变为另一种运动状态（流动状态）也是一种不稳定现象。



下面为刚性板边界，上面为自由界面情况下的瑞利——贝纳德对流

我们在 § 3.3 节中曾用静态的方法讨论了流体热对流不稳定的条件，与此类似的一种实验室对流模型是所谓瑞利——贝纳德对流(Rayleigh - Bénard convection)问题：水平层状液体厚度为 d ，液体上下界面温度分别为常数 T_1 和 T_2 ，且 $T_2 > T_1$ 。温度沿界面垂线方向线性分布。此时流体在重力作用下处于平衡，但是，重的冷的流体位于轻的热流体之上，这种平衡是不稳定的，在一定条件下这种平衡将失稳，从而导致从静止转变成运动（热对流）。

因此，不稳定的第一准则是 $T_2 > T_1$ 。但是，这还不是唯一的准则。因为：

1. 粘性抑制不稳定的发生
2. 热传导力图减少上下界面之间的温度差

1916 年瑞利发表了新的研究成果表明：只有下部加热速度大到不能被热传导向外充分排出热量时，对流才会形成。

因此只有温度差大到足够强的程度，克服上述两种阻尼作用，才会发生对流。由线性稳定性理论可以得到被称为瑞利 (Rayleigh) 数的无量纲量表示的第二准则（这里略去数学推导，直接给出结果。）即：

$$Ra = \frac{g\alpha(T_2 - T_1)d^3}{\nu\kappa} \dots (4-5-26)$$

其中， α 为体膨胀系数， ν 为运动学粘性系数， $\kappa = \frac{k}{\rho C_p}$ 为热扩散系数(Thermal diffusivity)。 k 为热传导系数(Thermal conductivity)， C_p 是比热容。

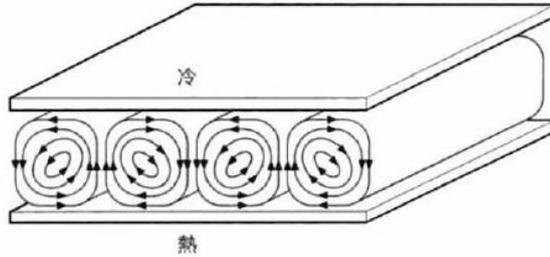
在瑞利——贝纳德对流(Rayleigh - Bénard convection)问题中，不同的边界情况使平衡失稳的临界瑞利数不同。

上边界	自由边界	自由边界	刚性板
下边界	自由边界	刚性板	刚性板
$(Ra)_{critical}$	657. 51	1100. 65	1708

当 $Ra < (Ra)_{crit}$ 时，是稳定。当 $Ra > (Ra)_{crit}$ 时，对流开始发生，随着 Ra 的不断升高，经过一个复杂的过程，转变为湍流。

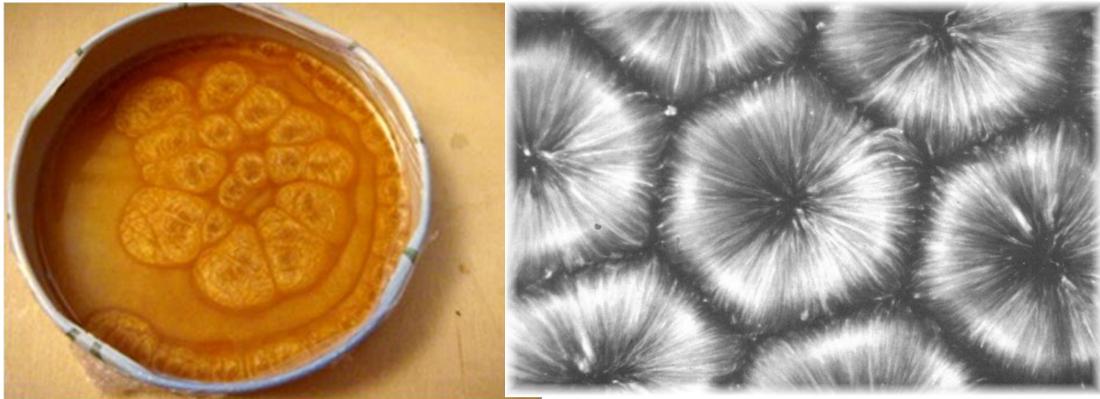
② Rayleigh - Bénard 对流向湍流的转变

由前所述，对底部加热，使 $Ra > (Ra)_{crit}$ 时，流体失稳，失稳的结果是流体发生对流，热的流体上升，冷的流体下降。为了保持连续性，在底部和顶部有水平方向的流动性存在（如图），当流动达到平衡状态之后，是定常对流阶段。



上下界面均为刚性板时的对流图像，
像被压扁的瑞士卷

当 Ra 超过 $(Ra)_{critic}$ 不大时，总是出现如上图所示的相当规则的对流图像。这种对流图像就是所谓的对流胞或贝纳尔胞 (Bénard cells)。不同流体、不同边界的对流胞是不同的。最典型的的就是上表面为自由界面，下表面为刚性板情况下的对流胞（下图）。



对流胞为规则的正六边形，又称贝纳尔蜂巢。温度增高的部分会在六角形中心上升，而冷却部分沿六角形边缘下降。进而还表明贝纳尔蜂巢是稳定的；流质层的厚度和正六角形的边长之比恒近于 1。

随着 Ra 数的增加，对流模式越趋复杂。这时它同普朗特数 ($Pr = \frac{\nu}{k}$) 关系极大。二维涡胞式对流转变为三维形式，然后流动由定常变成非定常。起初，这种非定常表现为扰动的有规则的周期性变化。随 Ra 数的增加，扰动变得完全无规则，但仍然可见到对流胞，只不过形状和尺寸上有很大的变化，涡胞内是湍流。当 Ra 数进一步增加，胞状结构完全消失，流动就转变成完全的湍流。

<II> 雷诺平均

由前面的讨论, 我们知道, 当制约层流稳定的无量纲参数 (在雷诺管流动中就是 Re 数; 而在贝纳德对流问题中就是 Ra 数) 超出临界值时, 层流就要失稳, 并随着这一标志性的无量纲参数的增加向湍流转捩。那么, 湍流运动一旦形成, 便具有难于准确描述的随机性质。

湍流的随机性质主要表现是: ①在空间任一点湍流的压力和速度都随时间不断地无规则的变化着; ②对给定系统的任何两次测量都不可能是相同的。但是, 实验证实, 湍流物理量的统计平均却有确定性的规律可循。平均值在各次实验中是可重复实现的。即湍流中存在拟序结构。(工程中感兴趣的和实验测量出来的物理量 (例如速度、摩擦阻力等) 也都是平均意义下的数值)

基于实验事实, 雷诺首先提出把湍流运动中瞬时量分解成平均和脉动两部分, 即

$$v_i = V_i + v'_i \quad p = P + p' \quad \dots (4-5-27)$$

其中, V_i 和 P 表示平均值, v'_i 和 p' 表示脉动值。

雷诺作这一分解的思想是: 湍流运动中每一点的速度有一平均值。不同时刻的瞬时速度在平均速度附近作小振幅但高频率的跳动。瞬时速度和平均速度之差称为脉动速度或称为涨落速度。湍流测量结果也表明, 湍流脉动的频率约 $10^2 \sim 10^5 \text{Hz}$ 之间, 而振幅一般不超过平均速度的 10%。

有了雷诺分解, 我们要解决的问题是如何取平均。在湍流研究中, 常用的取平均的方法有三种, 即时间平均、空间平均和整体平均 (或称系统综合平均——简称系综平均)。

(1) 时间平均

若用 $A(x_i, t)$ 表示空间 x_i 点处物理量的瞬时值, 则时间平均定义为:

$$\bar{A}^{(t)}(x_i, t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} A(x_i, t') dt' \quad \dots (4-5-28)$$

其中 T 为时均周期。

时间平均通常用在定常湍流场情形。若在给定点上, 于不同瞬时进行时间平均运算, 得到的 $\bar{A}^{(t)}$ 都相等, 则相应的湍流场就是定常湍流场。所以对定常湍流场有:

$$\bar{A}^{(t)} = \bar{A}^{(t)}(x_i) \quad \dots (4-5-29)$$

(2) 空间平均

在同一时刻, 在空间某点 x_i 附近的一个适当的空间尺度的邻域 $\delta\Omega$ 上的平均, 定义为:

$$\bar{A}^{(s)}(x_i, t) = \frac{1}{V} \int_{\delta\Omega} A(x'_i, t) dx'_i \quad \dots (4-5-30)$$

其中 $x_i \in \delta\Omega$, V 为空间域 $\delta\Omega$ 的体积。

空间平均通常用在均匀湍流场情形。若在指定时刻 t , 于不同空间点上进行空间平均运算, 得到的 $\bar{A}^{(s)}$ 都相等, 则相应的湍流场称为均匀湍流场。所以对于均匀湍流场有:

$$\bar{A}^{(s)} = \bar{A}^{(s)}(t) \quad \dots (4-5-31)$$

(3) 整体平均 (又称系综平均)

对于既非定常又非均匀的湍流场 (实际湍流场), 我们应用对同一系统的大量实验结果取平均, 即所谓系综平均, 其定义为:

(注: 同一系统的大量实验结果指的是对具有同样的初始条件和边界条件的大量的实验结果)

$$\bar{A}^{(e)}(x_i, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N A_n(x_i, t) \quad \dots (4-5-32)$$

实验次数 N 是一个大数。整体平均也可以用概率密度表示。设某物理量在某点的测量值为 A 的概率密度为 $P(A)$, 则测量值在 A 到 $A + dA$ 之间的概率为 $P(A)dA$ 。概率密度 $P(A)$ 在归一化条件下满足:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(A)dA = 1 \quad \dots (4-5-33)$$

则整体平均也可表示为:

$$\bar{A}^{(e)}(x_i, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \cdot P(A; x_i, t)dA \quad \dots (4-5-34)$$

特别, 在各态历经假设下, 上述三种平均方法导致同样的结果, 即有:

$$\bar{A} = \bar{A}^{(t)} = \bar{A}^{(s)} = \bar{A}^{(e)} \quad \dots (4-5-35)$$

所谓各态历经假设是指: 一个随机变量在重复多次的实验中出现的所有可能状态, 能够在一次试验的相当长时间或者相当大的空间范围内以相同概率出现。

即: 对一定常、均匀湍流 (各态历经假设对应的就是定常、均匀湍流), 三种平均方法的结果相同。

注*: 在符合各态历经的前提下, 时间平均也可用于非定常场, 只要平均流不是高频振荡。

实际中的湍流既不是定常的, 也不是均匀的。但由于实现整体平均比较困难, 所以为了实用, 常用所谓“短”时间平均代替整体平均。在“短”时间平均中, 时均周期 T 的选择必须满足以下条件:

1. T 应远小于使 \bar{A} 发生显著变化的时间 (即 T 应比流动作不定常运动时的特征时间小得很多); T 必须比湍流的时间尺度 (即湍流发生的空间尺度与平均流速之比) 大得多。
2. T 同时应远大于湍流脉动的周期, 即: 使平均值 \bar{A} 与 T 无关 (即得到稳定的平均值); T 又必须比流场中任何缓慢变化的周期小得多。

由于时间平均比较容易通过实验获得, 故常用之。

容易证明, 时间平均值服从以下运算法则 (注: 瞬时值 $A = \bar{A} + A'$):

$$\textcircled{1} \overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$$

$$\text{证: 由定义 } \overline{A+B} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} (A+B) dt' = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} A dt' + \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} B dt' = \bar{A} + \bar{B}$$

$$\textcircled{2} \overline{\bar{A} + A'} = \bar{A} + \bar{A}' = \bar{A} + \bar{A}'$$

(注*: 平均值本身是常数, 再取平均值仍为自身)

由此可得 $\bar{A}' = 0$, 即脉动量的平均值为零。(事实上, 随机的脉动在 T 内有正有负, 其和必为零)

$$\textcircled{3} \overline{\alpha A} = \alpha \bar{A} \quad (\alpha \text{ 为常数})$$

$$\textcircled{4} \overline{\bar{A} \cdot \bar{B}} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$\text{证: 由定义 } \overline{\bar{A} \cdot \bar{B}} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \bar{A} \bar{B} dt' \xrightarrow{\bar{A} \text{ 在 } T \text{ 内变化可以忽略}} \bar{A} \cdot \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \bar{B} dt' = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$\textcircled{5} \overline{\bar{A} \cdot \bar{B}} = \bar{A} \cdot \bar{B} + \overline{\bar{A} B'} + \overline{\bar{B} A'} + \overline{A' B'} = \bar{A} \cdot \bar{B} + \overline{A' B'}$$

$$\textcircled{6} \overline{\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$$

$$\text{证: } \overline{\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \frac{\partial A(x_i, t')}{\partial t'} dt' = \frac{1}{T} \left[A(x_i, t + \frac{T}{2}) - A(x_i, t - \frac{T}{2}) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} A(x_i, t') dt' \right\} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$$

$$\textcircled{7} \overline{\left(\frac{\partial A}{\partial x_i}\right)} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial x_i}$$

$$\textcircled{8} \overline{\int A ds} = \int \bar{A} ds$$

6~8 式表明: 微商和积分与求平均运算是可交换的。

注*: ①~⑧式 ••••• (4-5-36)

<III> 雷诺方程

雷诺提出雷诺分解(4-5-27)及平均法则, 是基于这样一种认识: 对于充分发展的湍流, 流场中各种物理量都是四维空间 (x_i, t) 的随机函数, 湍流最重要的统计特性则是这些随机量的数学期望或统计平均。实际上, 工程中感兴趣的和实验测量出来的各物理量也都是平均意义下的数值。因此, 求平均量是湍流研究的重要任务。实验证实, NS 方程同样适用于描写湍流。

下面我们从 NS 方程出发, 利用平均化运算的法则, 推导平均量所满足的方程组。
假设流体是不可压缩的, 忽略体力, 则瞬时量的连续性方程和 NS 方程为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \end{array} \right. \quad \text{or} \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial (v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}$$

对 v_i 和 p 进行雷诺分解后, 对上面方程组取平均值, 就得到平均量满足的方程, 即雷诺方程为:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \rho \overline{v'_i v'_j} \right) \quad \dots (4-5-37)$$

及连续性方程:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0 \quad \dots (4-5-38)$$

再将瞬时量的方程与平均量的方程相减, 就得到脉动量方程为:

$$\frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = 0 \quad \dots (4-5-39)$$

$$\frac{\partial v'_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{v'_i v'_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j^2} \quad \dots (4-5-40)$$

注*: $\overline{V_i} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} V_i dt' = V_i \cdot \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} dt' = V_i$ 因 V_i 在 T 内认为是不变的。

因:

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_j} v'_i v'_j} = \overline{v'_i \frac{\partial v'_j}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} = \overline{v'_i \frac{\partial v'_j}{\partial x_j}} + \overline{v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} = \overline{v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}}$$

注*: 由 (4-5-39) $\overline{v'_i \frac{\partial v'_j}{\partial x_j}} = 0$

而由平均值运算法则⑦有:

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_j} v'_i v'_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{v'_i v'_j} \xrightarrow{\text{由上关系}} \overline{v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}}$$

<IV> 雷诺应力

将雷诺方程与 NS 方程比较, 可以看出, 在形式上雷诺方程多出了一项 $(-\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{v'_i v'_j})$ 。

这一项是由于 NS 方程中迁移项 (or 对流项) $v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ 的非线性引起的。如果说雷诺方程中迁移项 $V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$ 表示湍流平均流的动量运输的话, 与它类比, $\overline{v_j' \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}}$ 就表示由湍流脉动速度所产生的动量的平均运输。它代表了脉动速度对平均流的影响。事实上, 正是由于这一项的存在, 脉动流与平均流之间会发生动量交换, 致使湍流的平均速度分布与相同外界条件下的层流速度分布大不相同。由动量通量密度张量表达式:

$$\Pi_{ij} = \rho v_i v_j - \sigma_{ij}$$

注*: 其中 $\rho v_i v_j$ 为迁移项, σ_{ij} 为应力张量项。

可知, 流体的动量通量密度张量除了迁移项的贡献外, 还有应力张量项的贡献。所以由雷诺方程 (4-5-37) 和 (4-5-38) 及 $\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{v_i' v_j'} = \overline{v_j' \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}}$, 我们可引入总平均应力张量:

$$\bar{\sigma}_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu\bar{\epsilon}_{ij} - \rho\overline{v_i' v_j'} \quad \dots (4-5-41)$$

注: 实际上不可压缩流忽略体力时的控制方程组为: $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \dots (1)$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij} \quad \text{or} \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i v_j) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (-P\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}) \dots (2)$$

$$\text{因: } \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i v_j) = v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

注*: 由连续性方程 $v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$

$$\text{由 (2) 得: } \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} [-(\rho v_i v_j - \sigma_{ij})] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{ij}$$

由 (4-5-41) 式可见: 平均应力张量与瞬时应力张量比较, 形式上多出了 $-\rho\overline{v_i' v_j'}$ 一项。

其中: $\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ 为平均应变率张量, P 为平均压力。

记:

$$\tau_{ij}^{(t)} = -\rho\overline{v_i' v_j'} = \begin{pmatrix} -\rho\overline{v_1' v_1'} & -\rho\overline{v_1' v_2'} & -\rho\overline{v_1' v_3'} \\ -\rho\overline{v_2' v_1'} & -\rho\overline{v_2' v_2'} & -\rho\overline{v_2' v_3'} \\ -\rho\overline{v_3' v_1'} & -\rho\overline{v_3' v_2'} & -\rho\overline{v_3' v_3'} \end{pmatrix} \quad \dots (4-5-42)$$

$\tau_{ij}^{(t)}$ 称为雷诺应力或湍流应力。由此可见, 由于湍流脉动, 在平均流中产生了一种新的应力, 即在湍流中除了分子粘性应力引起的动量交换 (or 输运) 外, 还增加了速度脉动对动量运输的贡献。这两者表现为不同的应力, 并且在大多数情形下, 湍流应力比分子粘性应力大得很多。

雷诺应力是一个二阶对称张量。它的主对角线分量是湍流正应力, 仿照层流的定义, 则

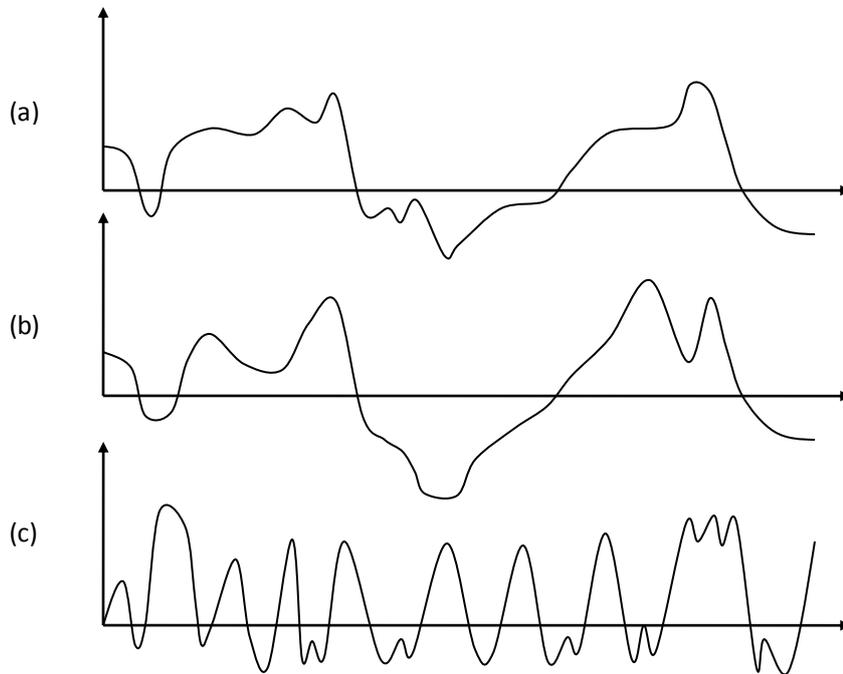
湍流压力可定义为:

$$P_t = -\frac{1}{3}\tau_{ii}^{(t)} = \frac{1}{3}\rho\overline{v'_i v'_i}$$

•••• (4-5-43)

在多数流动中,湍流正应力对平均动量运输的贡献很小。雷诺应力的非主对角线分量是湍流剪切应力,在平均流动量的运输中它们起着主导作用。一般,湍流应力张量也有三根相互垂直的主轴。在以主轴方向为法向的面元上,湍流剪切应力为零,法相应力为 $-\rho v'_i{}^2$ ($i=1,2,3$,但不求和,这里坐标轴取为主轴)。在特殊情况下,流场中各点主应力面上的主应力相等,剪应力处处为零,即湍流应力椭圆为正球形。这时,湍流应力张量为各向同性张量,相应的湍流称为各向同性湍流。

由定义式(4-5-42)知:雷诺应力张量表示为同一点处两个脉动速度分量乘积的平均值取负号。如果 $\overline{v'_i v'_j} \neq 0$,我们就称 v'_i 和 v'_j 是关联的;反之,若 $\overline{v'_i v'_j} = 0$,称之为不关联。为了阐明两个量关联的含义,我们用下图来说明。



由图可见:脉动分量 a 与 b 在大多数时间内符号基本上相同,这样使得 $\overline{v'_i v'_j} \neq 0$,另一方面,脉动量 c 与 a, b 相比,没有什么规律可循,所以它们是不关联的,即有 $\overline{a \cdot c} = 0, \overline{b \cdot c} = 0$ 。为了量度关联的大小程度,可定义关联系数:

$$R_{ij}(\vec{r}, \tau) = \frac{\overline{v'_i(\vec{x}, t)v'_j(\vec{x} + \vec{r}, t + \tau)}}{\sqrt{\overline{v_i'^2(\vec{x}, t)}} \cdot \sqrt{\overline{v_j'^2(\vec{x} + \vec{r}, t + \tau)}}}$$

•••• (4-5-44)

式中, \vec{x} 和 $\vec{x} + \vec{r}$ 分别是空间两点的矢径, t 和 $t + \tau$ 是两个不同时刻。这样:

$$Q_{ij}(\vec{x}, \tau) = \overline{v'_i(\vec{x}, t)v'_j(\vec{x} + \vec{r}, t + \tau)}$$

•••• (4-5-45)

称为两点间的二阶空间-时间关联矩。取同一时刻两点上参数的关联称为两点空间关联,

同一点处不同时刻参数之间的关联，称之为自关联或时间关联。

用于描述湍流统计特征的量，除了速度关联以外，还有压力和速度的关联，压力和温度的关联等等。并且除了二阶关联以外，还有三阶、四阶等更高阶关联。但阶数越高，它们的结构和规律就越复杂，物理意义也越不明显。

<V>湍流脉动动能方程和平均动能方程

将 v'_j 乘以脉动量方程(4-5-40)，然后将(4-5-40)式下标 i 和 j 置换，再乘以 v'_i ，得到两个方程，将这两个方程相加后取平均，就得到一组关于雷诺应力的微分方程：

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{v'_i v'_j} + V_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{v'_i v'_j} = D_{ij} + \varphi_{ij} - \varepsilon_{ij} + P_{ij} \quad \dots (4-5-46)$$

其中：

$$\text{扩散项 } D_{ij} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{v'_i v'_j v'_k} + \frac{p'}{\rho} (\delta_{jk} v'_i + \delta_{ik} v'_j) - v \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{v'_i v'_j} \right] \quad \dots (4-5-47)$$

$$\text{压力应变率项 } \varphi_{ij} = \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots (4-5-48)$$

$$\text{耗散项 } \varepsilon_{ij} = 2\nu \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} \quad \dots (4-5-49)$$

$$\text{生成项 } P_{ij} = -\left(\overline{v'_i v'_k} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} + \overline{v'_j v'_k} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right) \quad \dots (4-5-50)$$

我们知道：湍流中，雷诺应力 $\tau_{ij}^{(t)} = -\rho \overline{v'_i v'_j}$ 是由于湍流脉动而在平均流动中产生的一种新的应力，一般 $\overline{v'_i v'_j} < 0$ 。

对于生成项，因 $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ 为正时， $\overline{v'_i v'_j}$ 多半为负，因此大多数情形下 P_{ij} 是正的。所以称为生成项。

如果令(4-5-46)式中 $i = j$ ，对重复下标约定求和，并记 $k = \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i}$ ，则得到湍流脉动动能方程（简记 k 方程）如下：

$$\frac{\partial k}{\partial t} + V_l \frac{\partial k}{\partial x_l} = D - \varepsilon + P \quad \dots (4-5-51)$$

其中：

$$\text{迁移项 } V_l \frac{\partial k}{\partial x_l}$$

$$\text{扩散项 } D = -\frac{\partial}{\partial x_l} \left[\overline{v'_l \left(\frac{1}{2} v'_i v'_i + \frac{p'}{\rho} \right)} - v \frac{\partial k}{\partial x_l} \right] \quad \dots (4-5-52)$$

$$\text{压力应变率项 } \varphi = \frac{1}{2} \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v'_i}{\partial x_i} \right) = \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_i} \right) = 0$$

（因由脉动连续方程 $\frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = 0$ ）

$$\text{耗散项 } \varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_l} \frac{\partial v'_l}{\partial x_i}} \quad \dots (4-5-53)$$

$$\text{生成项 } P = -\overline{v'_i v'_l \frac{\partial v'_l}{\partial x_i}} \quad \dots (4-5-54)$$

上式表示了湍流脉动动能的平衡关系。等式左边第一项是单位质量流体的湍流脉动动能的时间变化率；第二项是迁移值，其表示湍流脉动动能被平均流从一处输运到另一处。等式右边的扩散项包括湍流脉动扩散和粘性扩散，它仅使能量重新分布，而不增加或减少湍流的总动能。将迁移项和扩散项合并在一起，利用散度定理可以清楚地看出这一点。

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial x_l} \left[kV_l + \overline{v'_i \left(\frac{1}{2} v'_i v'_i + \frac{p'}{\rho} \right)} - \nu \frac{\partial k}{\partial x_l} \right] dV = - \iint_A n_l \left[kV_l + \overline{v'_i \left(\frac{1}{2} v'_i v'_i + \frac{p'}{\rho} \right)} - \nu \frac{\partial k}{\partial x_l} \right] dA$$

其中 V 是控制体积， A 是其界面。可见右边的面积分正是通过控制面的能量通量，它由三部分组成：①由平均流速度携带通过界面的湍流脉动动能；②由速度脉动和压强脉动产生的能量输运；③由分子粘性扩散产生的能量输运。如果把控制体取得无穷大，进入和流出控制体的能量流为零。由此可知，这些项仅起到在体系内实现能量再分配的作用。

耗散项 ε 表示分子粘性把湍流动能转化为热。因为 $\left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j}\right)^2$ 总是正的， $-\varepsilon < 0$ 就表示该项总是使湍流动能减少。

右边最后一项是生成项 P ，它对于湍流是至关重要的，这一项表示了平均流能量和脉动动能之间的交换。该项是唯一为湍流提供能量的，为了看清这一点，我们再写出平均流的动能方程。

将雷诺方程各项乘以 v_i ，再对下标 i 求和就得到平均流动能方程：

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} V_i^2 \right) + V_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{1}{2} V_i^2 \right) = - \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\frac{1}{2} V_i^2 V_l + \frac{P}{\rho} V_l - 2\nu \overline{\varepsilon_{il}} V_i \right] - \Phi + \overline{v'_i v'_l \frac{\partial V'_i}{\partial x_l}} \quad \dots (4-5-55)$$

将上式与(4-5-51)式比较，立刻发现生成项 P 在两个方程中正好反号。这表明湍流脉动动能的获得是以平均流动的损失为代价的(相反的情形有时也会发生)。因此，一般说来，如果 $P > 0$ ，并大于湍流能量耗散，湍流将得到发展。如果 $P < 0$ 或小于湍流能量耗散，湍流将衰减，直至湮灭。稳定的湍流则是生成与耗散相平衡的情形。

最后，关于雷诺方程的说明：

在前面推出的雷诺方程中，出现了一组新的未知变量——雷诺应力 $(-\rho \overline{v'_i v'_j})$ (共有六个独立的)。这样，连同三个速度分量 V_i 和压力 P ，共有十个未知量；而控制平均流运动的方程只有四个(雷诺方程+连续性方程)。所以，雷诺方程不是封闭的。如果我们引入雷诺应力方程(4-5-46)式，立刻会发现方程中又出现了新的未知量—三阶关联量。因此，不管怎么样，控制方程数目总小于未知函数的数目。这个问题一直困扰着流体力学工作者和工程师们，成为一个著名的难题。虽然湍流理论和实验研究已经取得很大的进展，但直至目前关于湍流的机理尚未彻底搞清，还没有一种湍流理论能普适而有效地应用于工程实际。另一方面，工程中又有大量的湍流问题需要解决，因此不能束手等待理论的发展。在此背景下，使得根据实验数据建立起来的一些半经验理论方法得到了广泛的发展和应用。

最初的半经验理论是由 Boussinesq(布辛涅斯克)，Prantle(普朗特)，Taylor(泰勒)和 Karman(卡门)等人发展起来的输运理论。他们的目标是建立雷诺应力与平均速度之间的关系，实际上是沿用或效仿粘性应力的处理方法。

由于课时所限，我们略去湍流半经验理论。湍流的基本概念和基础理论我们已经作了简要介绍，感兴趣者可以在此基础上去进一步深入研究。